

Corrigé ENAC 2010

1 - C La formule de la vitesse de satellisation donne

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + h}} \simeq 7,8 \text{ km.s}^{-1}$$

2 - B La période peut se calculer par la formule suivante (orbite circulaire parcourue à vitesse constante en norme)

$$T = \frac{2\pi(R_T + h)}{v} \simeq 1 \text{ h } 29 \text{ min}$$

3 - B L'énergie potentielle liée à l'interaction gravitationnelle entre la Terre et le satellite distants de r vaut

$$E_p = -\frac{GM_T m}{r} + C^{\text{te}}$$

Par différence, on en déduit

$$\Delta E_p = GM_T m \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h} \right)$$

4 - A L'énergie cinétique sur l'orbite vaut

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \frac{GM_T m}{R_T + h}$$

La vitesse du satellite dans le référentiel géocentrique sur le pas de tir situé à l'équateur vaut

$$v = R_T \Omega = R_T \frac{2\pi}{T_0}$$

On en déduit que

$$\Delta E_c = \frac{GM_T m}{2(R_T + h)} - \frac{2\pi^2 m R_T^2}{T_0^2}$$

5 - A

$$\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_p = 135 \text{ GJ}$$

6 - CD S'il y a frottements, l'énergie mécanique diminue or $E_m = E_c + E_p = -E_c = E_p/2$ (si l'on prend la constante égale à zéro pour l'énergie potentielle). Donc si l'énergie mécanique diminue, E_c diminue et donc la vitesse augmente, E_p diminue et donc r diminue.

7 - B En régime stationnaire, il convient de remplacer le condensateur par un interrupteur ouvert et la bobine par un fil. Il reste R_1 branché sur le générateur et donc

$$u_{R_1} = E$$

8 - B R_2 étant court-circuitée par la bobine, aucun courant n'y circule, la puissance qu'elle reçoit est donc nulle.

9 - A L'interrupteur ouvert, les deux dérivation $R_1 - C$ et $R_2 - L$ se comportent de manière indépendante. Notons i_L le courant circulant de « bas en haut » dans la bobine, on a donc

$$u_L = L di_L / dt = \frac{L}{R} du_L / dt$$

puisque la loi d'Ohm indique que $u_L = -R i_L$ car $-i_L$ circule de « bas en haut » dans la résistance.

10 - D La continuité du courant dans la bobine implique que $i_L(0^+) = i_L(0^-) = E/R_1$. Ainsi

$$u_L(0^+) = -R_2 i_L(0^+) = -\frac{R_2}{R_1} E$$

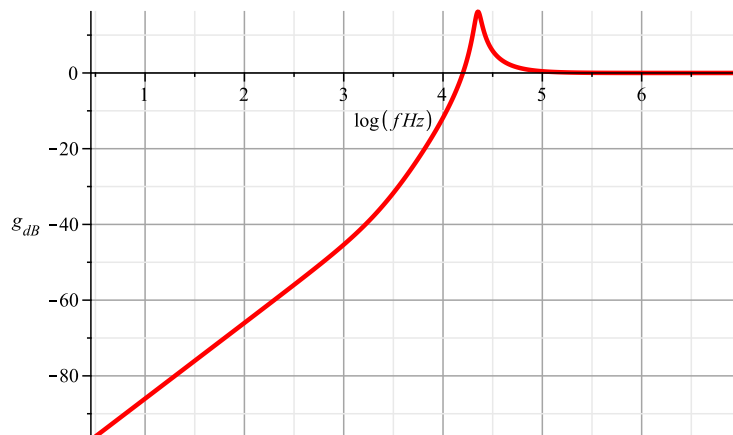
11 - A $u_C(0^+) = u_C(0^-) = E$ (continuité de la tension aux bornes d'un condensateur) et $u_C(+\infty) = 0$ (décharge dans la résistance R_1). L'énergie emmagasinée dans un condensateur (à une constante près) vaut $\mathcal{E}_C = C u_c^2/2$. On en déduit que

$$\Delta \mathcal{E}_C = -C E^2/2$$

12 - AC À basse fréquence (C : interrupteur ouvert, L : fil), $u_L = 0$. À haute fréquence (L : interrupteur ouvert, C : fil), $u_L = E$. Le comportement asymptotique suggère donc que le filtre agit comme un passe-haut. La fonction de transfert de ce filtre vaut

$$\underline{H} = \frac{jL\omega/R_1 + LC(j\omega)^2}{1 + jL\omega(R_1 + R_2)/(R_1 R_2) + LC(j\omega)^2}$$

On ne retrouve pas l'une des quatre formes canoniques des filtres au programme (pas de MPSI d'ailleurs). Numériquement la fonction de transfert a l'allure suivante



La présence d'une résonance peut en faire en pratique un passe-bande, d'où l'incertitude sur la réponse attendue. (à noter également une pente de seulement 20 dB/décade au lieu des 40 attendus pour un passe-haut du 2nd ordre). Au final, tout est question de définition...

13 - B Tout faisceau parallèle incident sur une lentille converge réellement ou virtuellement dans le plan focal image de cette dernière. Pour déterminer ce plan, on trace donc un second rayon incident passant par O_1 et parallèle au premier rayon incident passant par C . Ce rayon n'est pas dévié par passage de la lentille. Clairement ce rayon et le premier rayon émergent passant par A forment un faisceau divergent, la lentille est donc bien divergente comme indiqué sur le schéma. Par ailleurs le plan focal image sera le plan perpendiculaire à l'axe optique contenant l'intersection des deux rayons émergents (plan virtuel). On en déduit graphiquement

$$f'_1 = -10 \text{ cm}$$

14 - A Formule de conjugaison de Descartes :

$$\overline{O_1 A} = \frac{\overline{O_1 A'} f'_1}{f'_1 - \overline{O_1 A'}} = 7,5 \text{ cm}$$

15 - B Formule de conjugaison de Descartes :

$$\overline{O_1 B'} = \frac{\overline{O_1 B} f'_1}{f'_1 + \overline{O_1 B}} = -5 \text{ cm}$$

16 - D Formule du grandissement :

$$B'C' = |\gamma_1|BC = (O_1B'/O_1B)BC = 7,5 \text{ cm}$$

17 - BC Notons $e = \overline{O_1O_2}$. Alors $\overline{O_2B'} = -e + \overline{O_1B'}$ et $\overline{O_2B''} = -e + \overline{O_1A'}$. B' et $B'' = A'$ étant conjugués par L_2 , on a

$$\frac{1}{\overline{O_2B''}} - \frac{1}{\overline{O_2B'}} = \frac{1}{f'_2}$$

dont on déduit après simplifications que e est solution de l'équation du deuxième degré suivante

$$e^2 + (\overline{O_1A'} + \overline{O_1B'})e + \overline{O_1A'}\overline{O_1B'} - f'_2\overline{A'B'} = 0$$

dont les solutions sont

$$e = 5,9 \text{ cm} \quad \text{et} \quad e = 19,1 \text{ cm}$$

18-CD $B''C'' = |\gamma_1\gamma_2|BC$. Or $\gamma_2 = \overline{O_2B''}/\overline{O_2B'}$. Dans le premier cas ce grandissement vaut $-2,2$ dans le second cas $-0,45$. En se rappelant que $|\gamma_1| = 0,5$, on en déduit que

$$B''C'' = 16,5 \text{ cm} \quad \text{ou} \quad B''C'' = 3,4 \text{ cm}$$

19 - B À l'équilibre la masse du glaçon $V_0\rho_{\text{gl}}$ égale la masse de fluide déplacé (Archimède) $V_{\text{im}}\rho_{\text{liq}} + (V_0 - V_{\text{im}})\rho_{\text{air}}$. ρ_{air} étant inférieur de trois ordres de grandeur à ρ_{liq} , on peut négliger son influence sur le résultat, on en déduit

$$V_{\text{im}} = V_0\rho_{\text{gl}}/\rho_{\text{liq}} = 13,8 \text{ cm}^3$$

20 - C Si l'on retire le glaçon le niveau baisse de V_{im}/S où $S = \pi R^2$ est la section du récipient. Le glaçon une fois fondu aura un volume égal à $V_0(\rho_{\text{gl}}/\rho_{\text{liq}})$ par conservation de la masse. Le glaçon fondu réintroduit dans le récipient fait donc remonter le niveau de V_{im}/S . Au final le niveau ne varie pas :

$$h_1 - h_0 = 0$$

21 - D Après fonte de la glace, le volume d'eau liquide augmente tandis que la masse de sel reste constante, donc la masse volumique d'eau salée diminue (réponse A fausse).

Le volume immergé vaut maintenant $V'_{\text{im}} = V_0\rho_{\text{gl}}/\rho_{\text{liq-sel}} < V_{\text{im}}$. En revanche le volume d'eau liquide fourni par la fonte du glace reste égale à $V_{\text{im}} = V_0\rho_{\text{gl}}/\rho_{\text{liq}} > V'_{\text{im}}$. Le niveau va donc monter.

22 - B Comme à la question 19, on doit avoir égalité entre la masse de l'objet flottant et la masse de fluide déplacé, soit

$$\rho_{\text{liège}}V_{\text{liège}} + (V_0 - V_{\text{liège}})\rho_{\text{gl}} = (V_0 - V_{\text{émergé}})\rho_{\text{liq}}$$

donc

$$\frac{V_{\text{émergé}}}{V_0} = 1 - \frac{\rho_{\text{gl}}}{\rho_{\text{liq}}} + \frac{V_{\text{liège}}}{V_0} \frac{\rho_{\text{gl}} - \rho_{\text{liège}}}{\rho_{\text{liq}}} = 0,22$$

23 - C Retirons le glaçon enfermant la bille, le niveau baisse de $V_{\text{im}}/S = (V_0 - V_{\text{émergé}})/S$. Ajoutons l'eau fondue du glaçon, de volume $(V_0 - V_{\text{liège}})\rho_{\text{gl}}/\rho_{\text{liq}}$, le niveau remonte de $(V_0 - V_{\text{liège}})\rho_{\text{gl}}/(\rho_{\text{liq}}S)$. Ajoutons la bille de liège dont le volume immergé vaut $V_{\text{liège}}\rho_{\text{liège}}/\rho_{\text{liq}}$ et fait donc monter le niveau de $V_{\text{liège}}\rho_{\text{liège}}/(\rho_{\text{liq}}S)$. En faisant la somme de ces trois contributions, on obtient zéro.

24 - A Pour que le glaçon flotte il faut que sa masse volumique moyenne $(V_{\text{Al}}\rho_{\text{Al}} + (V_0 - V_{\text{Al}})\rho_{\text{gl}})/V_0$ soit inférieure à la masse volumique du liquide ρ_{liq} . On en déduit que

$$V_{\text{Al}} \leq V_0 \frac{\rho_{\text{liq}} - \rho_{\text{gl}}}{\rho_{\text{Al}} - \rho_{\text{gl}}} = V_{\text{Al,max}} = 0,7 \text{ cm}^3$$

25 - BD c'est du cours !

26 - B Faisons l'hypothèse que dans l'état initial l'eau est à l'état vapeur uniquement. Calculons alors la pression de cette vapeur

$$P = \frac{nRT_1}{V} = 0,77 \text{ bar}$$

Cette pression étant inférieure à la pression de vapeur saturante à T_1 , l'hypothèse est confirmée.

27 - B Faisons l'hypothèse que dans l'état final l'eau est à l'état vapeur uniquement. Calculons alors la pression de cette vapeur

$$P = \frac{nRT_2}{V} = 0,74 \text{ bar}$$

Cette pression étant supérieure à la pression de vapeur saturante à T_2 , l'hypothèse est infirmée.

Faisons l'hypothèse que dans l'état final l'eau est à l'équilibre liquide-vapeur. On a

$$x_V = \frac{V - V_L(T_2)}{V_V(T_2) - V_L(T_2)}$$

Par hypothèse $V_L(T_2) \ll V_V(T_2)$ donc

$$x_V = \frac{V}{V_V(T_2)}$$

Par ailleurs on peut calculer $V_V(T_2)$ par l'équation des gaz parfaits, soit $V_V(T_2) = nRT_2/P_{\text{sat}}(T_2) = 5,9 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$. Finalement

$$x_V = 0,68$$

28 - B Décomposons la transformation en plusieurs étapes :

- On liquéfie $n(1 - x_V)$ mole d'eau liquide à température constante T_1 , ce qui conduit à une variation d'enthalpie de $-n(1 - x_V)\Delta H_{\text{vap}}$
- On refroidit l'ensemble de T_2 à T_1 . Pour l'eau liquide, la variation d'enthalpie vaut $n(1 - x_V)C_L(T_2 - T_1)$, pour la vapeur $C_p(T_2 - T_1) = \frac{nx_V R \gamma}{\gamma - 1}(T_2 - T_1)$.

Au final

$$\Delta H = n(x_V - 1)\Delta H_{\text{vap}} + \frac{nx_V R \gamma}{\gamma - 1}(T_2 - T_1) + n(1 - x_V)C_L(T_2 - T_1)$$

29 - A On a $\Delta H = \Delta U + V\Delta P$ (la transformation étant isochore). De plus $\Delta U = W + Q = Q$ (la transformation étant isochore). Finalement

$$Q = \Delta H - V\Delta P = -1,3 \text{ kJ}$$

$$(\Delta P = P_{\text{sat}}(T_2) - nRT_1/V)$$

30 - AD D'après l'énoncé (question 27), « on attend l'équilibre thermique » ceci implique que la température du thermostat a été abaissée « rapidement » et que les transferts thermiques entre l'intérieur et l'extérieur permettant le retour à l'équilibre se sont effectués entre corps à températures différentes, l'évolution est donc irréversible, l'entropie de l'univers a augmenté.

Par ailleurs, le système étant refroidi à volume constant, l'entropie de l'eau a diminué.

31 - D La distribution de charge étant à symétrie sphérique, le champ en tout point M est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{O_1M}$ et ne dépend que de la distance O_1M . Par application du théorème de Gauss sur une sphère de rayon $O_1M < R$, on obtient

$$\vec{E}(M) = \frac{\rho_e}{3\varepsilon_0} \overrightarrow{O_1M}$$

32 - A Par application du théorème de Gauss sur une sphère de rayon $O_1M > R$, on obtient

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\frac{R^3 \rho_e}{3} + R^2 \sigma_e \right) \frac{\overrightarrow{O_1 M}}{O_1 M^3}$$

33 - B L'analogie entre les champs de gravitation et électrostatique repose sur la structure des forces correspondantes. Il suffit de remplacer les distributions de charge par les distributions de masse et de changer $1/\varepsilon_0$ par $-4\pi G$. On en déduit (en prenant $O_1 M = R^+$) :

$$g_0 = 4\pi G \left(\frac{R \rho_m}{3} + \sigma_m \right)$$

34 - D Il faut que q soit l'opposé de la charge totale contenue dans et sur la sphère soit

$$q = - \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \rho_e + 4\pi R^2 \sigma_e \right)$$

Note : le sujet ici change de notation : $\rho_e \rightarrow \rho_0$.

35 - C Si $r \gg a$ alors on peut considérer que la distribution de charge se résume à une charge $+q$ en O_2 et une charge $-q$ en O_1 , soit un dipôle électrostatique, on en déduit que

$$\vec{E}(M_1) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{O_2 M_1^2} - \frac{1}{O_1 M_1^2} \right) \vec{u}_z \simeq \frac{aq}{2\pi r^3 \varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{O_1 O_2}}{O_1 O_2}$$

à l'ordre le plus bas non nul en a/r .

36 - B Le champ créé par les distributions volumique et surfacique de charge vaut en M_2

$$\vec{E}_{-q}(M_2) = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{y^2} \vec{u}_y$$

Par un développement limité à l'ordre 2 en y/a , on trouve que le champ créé en M_2 par la charge $+q$ vaut

$$\vec{E}_{+q}(M_2) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 y^2} \left(\left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{a}{y} \right)^2 \right] \vec{u}_y - \frac{a}{y} \vec{u}_z \right)$$

Le champ total à l'ordre le plus bas non nul en a/y (ordre 1) vaut donc

$$\vec{E}(M_2) = -\frac{aq}{4\pi\varepsilon_0 y^3} \vec{u}_z$$

Si l'on remplace y par r (confusion dans l'énoncé) et $\vec{u}_z$ par $\overrightarrow{O_1 O_2}/O_1 O_2$, on obtient

$$\vec{E}(M_2) = -\frac{aq}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \frac{\overrightarrow{O_1 O_2}}{O_1 O_2}$$