

Centrale 2010 PC Physique 1

I. Claviers à percussion

IA. Vibrations longitudinales

IA1.a. La tranche comprise entre x et $x+dx$ au repos se trouve à l'instant t entre les sections d'abscisses $x + \xi(x, t)$ et $x + dx + \xi(x + dx, t)$, ce qui donne une variation de longueur $\frac{\partial \xi}{\partial x} dx$ au premier ordre en dx . D'où avec $S = hb$:

$$F(x, t) = Ehb \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

IA1.b. La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la tranche précédente et projetée sur (Ox) donne:

$$\rho S dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = F(x + dx + \xi(x + dx, t), t) - F(x + \xi(x, t), t) \approx \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} dx$$

soit $\rho hb \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial F(x, t)}{\partial x}$. D'où avec IA1a:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$$

où $c_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

IA2. En remplaçant $\xi(x, t) = f(x)g(t)$ dans l'équation de d'Alembert, on obtient pour $f(x) \neq 0$ et $g(t) \neq 0$:

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{c_l^2} \frac{g''(t)}{g(t)}$$

Chacun des termes de cette égalité est donc égal à une constante et en se limitant aux solutions sinusoïdales:

$f(x) = f_0 \cos(kx + \varphi)$ et $g(t) = g_0 \cos(\omega t + \psi)$ avec $\omega = c_l k$

IA3. En $x = 0$ et $x = L$, la force $F(x, t) = 0$, d'où $f'(x = 0) = f'(x = L) = 0$, soit $\begin{cases} \sin \varphi = 0 \\ \sin(kL + \varphi) = 0 \end{cases}$

Ce qui donne pour k les valeurs possibles: $k_n = \frac{n\pi}{L}$, avec n entier

On a alors

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = n \frac{c_l}{2L}$$

IA4. Pour la lame en acier de longueur 24,3cm, les fréquences propres sont $f_n = n.1,03.10^4 \text{ Hz}$. La fréquence émise est trop faible pour résulter d'une excitation longitudinale.

I.B. Vibrations transversales

IB1. $dL = dx = R d\alpha$ et $dL' = (R - u) d\alpha$. D'où

$$\frac{dL' - dx}{dx} = -u \frac{d\alpha}{dx} = -Cu$$

IB2.a. $dS = h du$

D'où d'après la définition du module d'Young: $dF = Ehdu \frac{dL' - dx}{dx} = -EhC(x)udu$, la force dF exercée par la partie du matériau situé à droite de la tranche étudiée étant comptée algébriquement vers la droite sur la figure 2. En considérant $C(x) \approx C(x + dx)$, $dF' \approx dF$

IB2.b. Sur une section, $F = - \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} EhC u du = -EhC \left[\frac{u^2}{2} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = 0$

IB2.c. $M(x) = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (\vec{AP} \wedge d\vec{F}') \cdot \vec{u}_z = EhC \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} u^2 du$, soit

$$M(x) = EhC \frac{b^3}{12}$$

IB3. $T(x, t) = -\frac{\partial M}{\partial x} = -Eh \frac{b^3}{12} \frac{\partial C}{\partial x}$

En appliquant la relation fondamentale de la dynamique à la tranche d'épaisseur dx et en projetant sur l'axe (Oy) :

$\rho h b dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T(x + dx, t) - T(x, t) = \frac{\partial T}{\partial x} dx \implies \rho h b \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -Eh \frac{b^3}{12} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$. Soit, puisque $C = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ et $c_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{b^2}{12} c_l^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$$

IB4. En remplaçant dans l'équation précédente, vraie pour tout t :

$$-\omega^2 f(x) + \frac{b^2}{12} c_l^2 \frac{d^4 f}{dx^4} = 0$$

IB5. $\frac{d^4 f}{dx^4} = k^4 f$. On en déduit

$$\omega^2 = \frac{b^2}{12} c_l^2 k^4$$

IB6. En $x = 0$ et en $x = L$, on a à la fois $y(x, t) = 0$ puisque les extrémités sont fixes, et $M(x, t) = 0$ (donc $C(x, t) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$) puisque les liaisons sont parfaites. D'où:

$$\begin{cases} y(0, t) = A + C = 0 \\ y(L, t) = A \cos(kL) + B \sin(kL) + C \cosh(kL) + D \sinh(kL) = 0 \\ C(0, t) = -k^2 A + k^2 C = 0 \\ C(L, t) = k^2 (-A \cos(kL) - B \sin(kL) + C \cosh(kL) + D \sinh(kL)) = 0 \end{cases} \quad \text{On en déduit}$$

$$\begin{cases} A = C = 0 \\ B \sin(kL) + D \sinh(kL) = 0 \\ -B \sin(kL) + D \sinh(kL) = 0 \end{cases}$$

Pour avoir une solution non identiquement nulle, on doit avoir: $\sin(kL) = 0$. D'où les valeurs possibles de k et de la fréquence avec IB5.:

$$k_n = n \frac{\pi}{L}$$

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{bc_l\pi}{4\sqrt{3}L^2}n^2$$

IB7. En $x = 0$ et en $x = L$, il n'y a pas de contrainte transversale: $T(0, t) = T(L, t) = 0$

Sur chaque élément de section en $x = 0$ et en $x = L$, la force longitudinale dF est nulle, donc son moment élémentaire par rapport à l'axe Oz , et par conséquent le moment résultant est nul. D'où $M(0, t) = M(L, t) = 0$.

On obtient avec $C = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ les quatre conditions:

$$\begin{cases} M(0, t) = 0 \Rightarrow C(0, t) = 0 \iff -k^2 A + k^2 C = 0 \\ M(L, t) = 0 \Rightarrow C(L, t) = 0 \iff k^2(-A \cos(kL) - B \sin(kL) + C \cosh(kL) + D \sinh(kL)) = 0 \\ T(0, t) = 0 \Rightarrow \frac{\partial C}{\partial x}(0, t) = 0 \iff k^3(-B + D) = 0 \\ T(L, t) = 0 \Rightarrow \frac{\partial C}{\partial x}(L, t) = 0 \iff k^3(A \sin(kL) - B \cos(kL) + C \sinh(kL) + D \cosh(kL)) = 0 \end{cases}$$

IB8. Avec la relation théorique donnée, on obtient:

$\frac{f_2}{f_1} = 2,76$, $\frac{f_3}{f_1} = 5,40$, $\frac{f_4}{f_1} = 8,94$. Ces rapports sont du bon ordre de grandeur par rapport aux valeurs expérimentales mais un peu plus grandes. Il est probable qu'il faudrait tenir compte des frottements de l'air et des frottements au niveau des fixations non rigides.

$f_1 = 796\text{Hz}$ proche de la valeur expérimentale indiquée en A4.

IB9. On obtient $L = 1,21m$, ce qui est assez grand.

IB10. En entaillant le bois, on diminue b . Comme la fréquence varie en $\frac{b}{L^2}$, cela permet de diminuer L pour atteindre une fréquence donnée.

Pour le glockenspiel, la fréquence $f_2 = 4f_1$ est plus élevée ($3,2 \cdot 10^3 \text{Hz}$), bien que toujours audible, mais pour le métal l'amplitude des harmoniques élevés est plus faible que pour le bois (ce que l'énoncé ne signale pas...). Leur importance est donc moindre.

IC. Accord des résonateurs

IC1.a. La suppression acoustique obéit à une équation de d'Alembert de célérité c (valeur numérique donnée en début de sujet), et $\omega = kc$

IC1.b. L'équation d'Euler linéarisée s'écrit: $\rho_a \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}(p)$

IC1.c. Par intégration (sans constante puisque l'air est au repos en l'absence de son) et en représentation complexe, la vitesse acoustique est :

$$\vec{V}(y, t) = \frac{1}{\rho_a c} (A e^{j(\omega t - ky)} - B e^{j(\omega t + ky)}) \vec{u}_y$$

$$\text{IC2. } V(-H, t) = \frac{1}{\rho_a c} (A e^{j(\omega t + kH)} - B e^{j(\omega t - kH)}) = 0 \Rightarrow B = A e^{2jkH}$$

$$\text{Donc } p(y, t) = A(e^{j(\omega t - ky)} + e^{2jkH} e^{j(\omega t + ky)}) = 2A e^{jkH} \cos(k(y + H)) e^{j\omega t}$$

Pour tout t : $p(0, t) = p_0 e^{j\omega t}$, donc :

$$p(y, t) = p_0 e^{j\omega t} \frac{\cos(k(y + H))}{\cos(kH)}$$

$$\text{et } A = \frac{P_0 e^{(-jkH)}}{2\cos(kH)}, B = \frac{P_0 e^{jkH}}{2\cos(kH)}$$

IC3. Il y a résonance lorsque le dénominateur $\cos(kH)$ s'annule, soit pour $kH = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, avec n entier, soit: $H = (2n + 1)\frac{c}{4f}$

La plus petite valeur de H est:

$$H = \frac{c}{4f}$$

Pour $f_1 = 65Hz$, $H = 1,3m$.

Pour avoir résonance pour $f_2 = 4f_1$, il faut avoir n entier tel que $\frac{2n+1}{4}=1$, ce qui n'est pas possible.

IC4. Le fait que H soit variable permet d'avoir résonance dans le tube pour des fréquences différentes. Les fréquences étant fixées par les mouvements transversaux de la lame, on peut ainsi sélectionner avec le résonateur l'harmonique de son choix.

ID. Vibrations d'une cymbale

ID1. En remplaçant la solution $y(x, z, t)$ dans l'équation de propagation:

$$-\omega^2 + \frac{c_l^2 b^2}{12(1-\sigma^2)} (k_x^4 + k_y^4 + 2k_x^2 k_y^2) = 0, \text{ soit}$$

$$\omega^2 = \frac{c_l^2 b^2}{12(1-\sigma^2)} k^4$$

$$\text{Avec } k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ et } \omega = 2\pi f, f = \frac{c_l b}{\sqrt{3(1-\sigma^2)}} \frac{\pi}{\lambda^2}$$

ID2. $V_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c_l b}{\sqrt{3(1-\sigma^2)}} \frac{\pi}{\lambda}$. La vitesse de phase dépend de λ . La propagation est dispersive.

ID3. Sur les figures 4, les déformations s'espacent lorsque le temps augmente, ce qui implique une propagation dispersive

ID4. On suit la propagation d'une déformation de longueur d'onde donnée sur les différentes figures.

Pour $\lambda_1 = 6mm$, on mesure avec 4a et 4b $V_\varphi(\lambda_1) \approx \frac{4}{30} cm/\mu s$. Pour $\lambda_2 = 12mm$, on mesure avec 4b et 4c $V_\varphi(\lambda_2) \approx \frac{4}{60} cm/\mu s$.

D'après ID2. $\frac{V_{\varphi}(\lambda_1)}{V_{\varphi}(\lambda_2)} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 2$, ce qui correspond bien aux vitesses mesurées.

$b = V_{\varphi} \sqrt{3(1-\sigma^2)} \frac{\lambda}{\pi c_l}$. Pour la cymbale en bronze, on obtient: $b = 1,2mm$

Remarque: La vitesse mesurée à partir des photos est la vitesse de groupe (vitesse réelle du signal) et non la vitesse de phase comme a l'air de le suggérer l'énoncé, ainsi que le rapport de jury.... On peut à partir de l'équation de dispersion obtenir $\omega d\omega = \frac{c_l^2 b^2}{12(1-\sigma^2)} 4k^3 dk$ et déduire la vitesse de la phase à partir de la mesure de la vitesse de groupe: $V_{\varphi} = \frac{c_l^2 b^2}{3(1-\sigma^2)} \frac{k^2}{V_g} = \frac{c_l^2 b^2}{3(1-\sigma^2)} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \frac{1}{V_g}$

On obtient alors: $\frac{V_{\varphi}(\lambda_1)}{V_{\varphi}(\lambda_2)} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2 \left(\frac{V_g(\lambda_2)}{V_g(\lambda_1)}\right)$. Avec les valeurs obtenues on retrouve le même résultat $\frac{V_{\varphi}(\lambda_1)}{V_{\varphi}(\lambda_2)} \simeq 2!$

Partie II. Vibration d'une anche libre

IIA. Ordres de grandeur et analyse quantitative

IIA1. $f'_1 = 210Hz$ et $f'_2 = 1,32kHz$. La fréquence mesurée est plus proche du mode fondamental $n=1$.

IIA2. On utilise la relation de Bernoulli sur une ligne de courant pour le fluide incompressible (donc écoulement incompressible et homogène) en écoulement stationnaire et en négligeant l'effet

de la pesanteur pour trouver cet ordre de grandeur: $P_a + \Delta p = P_a + \rho_a \frac{V^2}{2}$. Soit $V = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho_a}}$

A.N: $V \approx 12m.s^{-1}$

IIA3. Le nombre de Reynolds est $R_e = \frac{Vh}{\nu} = \frac{Vh\rho_a}{\eta}$ est d'environ $2,8.10^3$ ce qui correspond à un écoulement plutôt turbulent

IIA4a. Equation d'Euler: $\rho_a \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} \right] = -\vec{\nabla} p + \rho_a \vec{g}$ en l'absence d'autres forces volumiques et en référentiel galiléen. On identifie

$$T_1 = \rho_a (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} \text{ et } T_2 = \rho_a \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

IIA4b. $S_r \approx \frac{f d}{U}$

IIA4c. L'émission périodique de tourbillons se fait pour une seule valeur de S_{r0} et pour toute une plage de valeurs de R_e . Si ce phénomène est à l'origine de l'émission du son par pour un instrument de dimension d donnée, on pourrait avoir l'ordre de grandeur de la vitesse qui pourrait varier aussi pour tout une plage puisque $U = \frac{\nu R_e}{d}$, avec une fréquence variant aussi puisque $f = S_{r0} \frac{U}{d}$. Or la fréquence associée à l'anche est unique (304Hz), il faut donc chercher un autre mécanisme.

IIA5. Pour obtenir un nombre de Reynolds équivalent le rapport des vitesses doit être égal au rapport des viscosités cinématiques, soit une vitesse de l'eau du l'ordre de $1,2m.s^{-1}$

IIA6. Pour visualiser l'écoulement d'eau, on peut par exemple injecter du colorant en amont de l'écoulement et suivre ainsi les trajectoires particulières.

IIB. Ecoulement stationnaire

IIB1. La conservation du débit volumique permet de calculer ce débit à travers un demi-cylindre de longueur l de rayon r : $lD = \int \vec{V} \cdot d\vec{S} = V(r) \cdot \pi r l$. D'où

$$V(r) = \frac{D}{\pi r}$$

et le potentiel des vitesses

$$\phi_1(r) = \frac{D}{\pi} \ln(r)$$

IIB2. En utilisant la question précédente: $d\phi(y, z) = -\frac{dD}{\pi} \ln(\sqrt{y^2 + (z-u)^2})$

IIB3. On retrouve le débit dD dans la partie $y < 0$:

$$dD = V du$$

IIB4. Par intégration de IIB2. $\phi(y, z) = \int_0^e d\phi = -\frac{V}{\pi} \int_0^e \ln(\sqrt{y^2 + (z-u)^2}) du$

Pour $z > e, y = 0^+, \phi(y = 0^+, z) = -\frac{V}{\pi} \int_0^e \ln(z-u) du$

Par intégration par parties et en posant $Z=z-u$:

$$\phi(y = 0^+, z) = \frac{V}{\pi} [Z \ln(Z) - Z]_z^{z-e} = \frac{V}{\pi} ((z-e) \ln(z-e) - (z-e) - z \ln(z) + z)$$

IIB5. $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}\phi} = \frac{d\phi(0^+, z)}{dz} \vec{u}_z$. Pour $z > e$:

$$\vec{v} = \frac{V}{\pi} (\ln(z-e) - \ln(z)) \vec{u}_z$$

IIB6. L'écoulement est irrotationnel puisque potentiel, stationnaire, incompressible: on applique le théorème de Bernoulli en considérant un point sur la face supérieure de l'ancre et un point de l'interstice où la vitesse est $\vec{V}$:

$$P_a + \frac{1}{2} \rho_a V^2 = P + \frac{1}{2} \rho_a v^2. \text{ D'où}$$

$$P(z) = P_a + \frac{1}{2} \rho_a V^2 (1 - \frac{2}{\pi^2} \ln(\frac{z-e}{z}))$$

IIB7. La lame est soumise aux forces de pression exercées par l'air au-dessus et au-dessous de la lame. Les termes en P_a se compensent et

$$\vec{F}_a = -L \int_e^{e+h} \frac{1}{2} \rho_a V^2 (1 - \frac{2}{\pi^2} \ln(\frac{z-e}{z})) dz \vec{u}_y$$

D'où $F_a = -\frac{1}{2} \rho_a h L V^2 (1 - A_1)$ avec

$$A_1 = \int_e^{e+h} \frac{2}{h\pi^2} \ln(\frac{z-e}{z}) dz$$

Lorsque e augmente à V fixé, a priori la force devrait diminuer.

IIB8. Pour $r \gg e$, d'après IIB4. $\phi(r) \approx -\frac{V}{\pi} e \ln(r)$

IIC. Ecoulement variable

IIC1. L'écoulement est toujours potentiel, donc irrotationnel. L'équation d'Euler s'écrit:

$$\rho_a \left[\overrightarrow{\frac{\partial grad \phi}{\partial t}} + \overrightarrow{grad}(\frac{1}{2}v^2) \right] = -\overrightarrow{grad}P, \text{ soit :}$$

$$\overrightarrow{grad}(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho_a}) = \overrightarrow{0}, \text{ d'où}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho_a} = C(t)$$

IIC2. Avec l'expression du potentiel donné, on évalue $C(t)$ grâce au point A:

$$C(t) = \frac{V^2}{2} + \frac{P_a}{\rho_a} + \frac{q'(t)}{\pi} - \frac{Ve'}{\pi}(1 + \ln(\frac{e}{2})) + \frac{V'}{\pi}(-\frac{e}{2}Ln(\frac{e}{2}) - \frac{e}{2}Ln(\frac{e}{2}))$$

$$C(t) = \frac{V^2}{2} + \frac{P_a}{\rho_a} + \frac{q'(t)}{\pi} - \frac{Ve'}{\pi} + \frac{V'e + eV'}{\pi}Ln(\frac{e}{2}), \text{ soit:}$$

$$C(t) = \frac{V^2}{2} + \frac{P_a}{\rho_a} + \frac{q'(t)}{\pi} - \frac{Ve'}{\pi} + \frac{q'}{\pi}Ln(\frac{e}{2})$$

IIC3. La vitesse en B est quasi nulle et avec l'expression du potentiel de IIB8, on obtient que:

$$C(t) = \frac{P_0}{\rho_a} - \frac{q'}{\pi}Ln(r_0)$$

$$\text{Avec IIC2: } C(t) = \frac{V^2}{2} + \frac{P_a}{\rho_a} + \frac{q'(t)}{\pi} - \frac{Ve'}{\pi} + \frac{q'}{\pi}Ln(\frac{e}{2}) = \frac{P_0}{\rho_a} - \frac{q'}{\pi}Ln(r_0)$$

On obtient bien l'expression demandée avec

$$K_0(t) = \frac{1}{\pi}(Ln(r_0) + Ln(\frac{e}{2}) + 1)$$

IID. Paramètres du modèle à un degré de liberté

$$\text{IID1. } E_c = hb \int_0^L \frac{1}{2} \rho (\frac{\partial y}{\partial t})^2 dx$$

$$\text{IID2. } E_c = \frac{e}{2} h b g'(t)^2 \int_0^L (f(x))^2 dx = \frac{m}{2L} \frac{f(L)^2}{9} g'(t)^2 \int_0^1 (6u^2 - 4u^3 + u^4)^2 L du, \text{ soit}$$

$$E_c = \frac{52}{405} m f(L)^2 g'(t)^2$$

$$\text{IID3. } \frac{1}{2} M Y'(t)^2 = \frac{52}{405} m f(L)^2 g'(t)^2, \text{ d'où } M = \frac{104}{405} m = \frac{104}{405} \rho L h b$$

$$\text{A.N.: } M = 5,6.10^{-5} kg$$

IID4. Les forces effectives appliquées à la lame sont la force de rappel élastique $K(-Y + Y_0)\overrightarrow{u_y}$ et la force de frottement $\overrightarrow{F_d}$. Le théorème de la résultante dynamique appliqué à l'anche et projeté sur l'axe (Oy) s'écrit:

$$MY'' = -K(Y - Y_0) - cY'$$

soit avec $\lambda = \frac{c}{2M}$ et $\omega_0^2 = \frac{K}{M}$

$$Y'' + 2\lambda Y' + \omega_0^2 Y = \omega_0^2 Y_0$$

qui est l'équation d'un oscillateur harmonique amorti.

IID5. La solution est $Y(t) = Y_0 + Ae^{(-\lambda t)} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t + \varphi)$

Du second graphe, on déduit λ par exemple en déterminant l'intersection de la pente $\frac{1}{\lambda}$ à l'origine d'une des parties de l'enveloppe avec l'asymptote: $\lambda = 2,8 s^{-1}$. Du premier graphe, on obtient $(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2})$ en mesurant la pseudo-période $T \approx \frac{0,099}{30} s = 3,3 \cdot 10^{-3} s$, d'où $\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = 1,9 \cdot 10^3 rad.s^{-1} \approx \omega_0$.

D'où $K = M\omega_0^2 = 2,0 \cdot 10^2 N.m^{-1}$ et $c = 3,1 \cdot 10^{-4} kg.s^{-1}$

II.E. Mouvement de l'anche effective dans l'écoulement

IIE1. Pour $Y \geq 0$, $e(t) = \sqrt{a^2 + Y(t)^2}$, pour $Y \leq 0$, $e(t) = a$

IIE2. Par rapport à la partie D, on tient compte de la résultante des forces de pression dont on suppose que l'expression obtenue en IIC4. reste valide. Le théorème de la résultante dynamique projeté sur l'axe (Oy) donne:

$$MY'' = -K(Y - Y_0) - cY' + F_a(t)$$

$F_a(t)$ dépend de V , V' , q' et aussi de $e(t)$ par l'intermédiaire de A_1, A_2, A_3 .

IIE3. On dispose de l'équation mécanique de la question précédente et de l'équation obtenue en IIC3 dont on admet encore la validité.

$Q' = Lq'$ et $Q = VeL$ est donné au début de IIC supposé valide (ce qui n'est pas évident puisque l'orientation de l'orifice de passage de l'air change mais $\vec{V}$ est toujours supposé porté par (Oy)). Ainsi

$$\begin{cases} Q' = \frac{1}{LK_0} \left[\frac{P_0 - P_a}{\rho_a} - \frac{1}{2} \frac{Q^2}{L^2 e^2} + \frac{Qe'}{\pi e L} \right] \\ Y'' = -\frac{K}{M}(Y - Y_0) - \frac{c}{M}Y' + \frac{1}{M} \left[-\frac{1}{2} \rho_a L h \frac{Q^2}{L^2 e^2} (1 - A_1) + \rho_a L h^2 A_2 \frac{Q'}{eL} - \rho_a L h A_3 \frac{Q'}{L} \right] \end{cases} \quad \text{avec } e, A_1, A_2, A_3$$

qui dépendent de $Y(t)$, e' qui s'exprime en fonction de Y, Y'

Ces deux équations montrent que si on connaît $Y(t_0), Y'(t_0), Q(t_0)$ on peut exprimer leurs dérivées premières à t_0 .

IIE4. On peut réaliser une intégration numérique grâce au système précédent. La méthode la plus simple de type "Newton" consiste à réaliser une boucle sur un indice i en choisissant un intervalle de temps Δt et à déterminer:

$$\begin{cases} Y(t_0 + (i+1)\Delta t) = Y(t_0 + i\Delta t) + \Delta t.Y'(t_0 + i\Delta t) \\ Y'(t_0 + (i+1)\Delta t) = Y'(t_0 + i\Delta t) + \Delta t.Y''(t_0 + i\Delta t) \\ Q(t_0 + (i+1)\Delta t) = Q(t_0 + i\Delta t) + \Delta t.Q'(t_0 + i\Delta t) \end{cases} \quad \text{L'intervalle } \Delta t \text{ doit être choisi suffisamment petit}$$

pour assurer le bien-fondé de ces relations approchées.

IIF. Commentaire des résultats

IIF1. La fréquence des résultats est la même dans l'expérience et la simulation numérique. Elle est de l'ordre de $8,3 \cdot 10^2 \text{ Hz}$, qui est bien une fréquence audible et correspond grossièrement à un doublement de fréquence par rapport à la fréquence propre de cet oscillateur non linéaire.

IIF2. Lorsque l'anche ferme la rigole ($e=a$), le débit devient constant. Lorsque e augmente on a une augmentation du débit à travers la rigole qui est plus large. La courbe du débit suit grossièrement la variation de e . Il y a cependant un écart (en particulier la "montée" du débit est plus lente que sa "descente") car la vitesse V n'est pas constante. Il est vraisemblable que la vitesse diminue à l'ouverture de l'anche.

A la fermeture de l'anche, on observe une surpression aérodynamique, l'air ne peut plus s'écouler et il est comprimé au voisinage de l'anche. Au même instant la diminution du flux d'air au niveau de l'anche entraîne une diminution de la pression acoustique. Puis la pression aérodynamique reprend une évolution régulière.

La surpression acoustique présente un petit pic à l'ouverture de l'anche qui n'existe pas pour la pression aérodynamique; ce pic est beaucoup plus important dans l'expérience que dans le modèle.

IIF3. La courbe expérimentale de la position de l'anche, contrairement à la courbe théorique, n'est pas symétrique par rapport à la position de l'anche au repos.

La pression aérodynamique est bien décrite. La pression acoustique expérimentale semble s'écarter davantage du modèle, cependant les échelles ne sont pas les mêmes et hormis le pic à l'ouverture, les écarts ne sont que de quelques Pa.

La modélisation du mouvement de l'anche par un oscillateur harmonique amorti est assez sommaire. On pourrait rajouter un terme d'anharmonie d'ordre supérieur et tenter de mieux représenter les vibrations de l'anche en tant que solide. La vitesse $\vec{V}$ juste après la rigole est supposée toujours verticale alors que $Y(t)$ n'est pas négligeable devant a (l'ouverture n'est pas toujours dans un plan horizontal). L'écoulement de l'air à travers la rigole très fine (0,14mm) pourrait intervenir la viscosité de l'air.