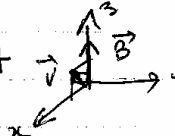


Corrigé C.S.E 2010 PSI PHYSIQUE 1

(1)

I.A.  $\vec{F} = -q\vec{v}\wedge\vec{B}$ donc $\vec{F} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{v} = v_z \vec{u}_z$ et $z(t) = v_z t$

I.B.1 Dans le plan xOy :
$$\begin{cases} m\ddot{x} = -q\dot{y}B \\ m\ddot{y} = +q\dot{x}B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\dot{v}_x = -qBv_y \\ m\dot{v}_y = qBv_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\dot{v}_x = -qBv_y \\ m\dot{v}_y = qBv_x \end{cases}$$

Donc
$$\begin{cases} \ddot{y} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 y = 0 \\ \ddot{x} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 x = 0 \end{cases} \quad \text{on pose } \omega_c = \frac{qB}{m} \Rightarrow \begin{cases} v_y = A \cos(\omega_c t + \varphi) \\ v_x = B \cos(\omega_c t + \varphi) \end{cases}$$

à $t=0$ $\begin{cases} v_z = v_{0z} = B \cos \varphi \\ v_y = 0 = A \cos \varphi \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_x(0) = -\frac{qB}{m} \dot{y}(0) = 0 = -B \omega_c \sin \varphi \\ a_y(0) = \frac{qB}{m} \dot{x}(0) = -A \omega_c \sin \varphi \end{cases}$

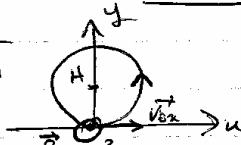
Donc : $\varphi = 0$ et $\varphi = -\pi/2 \Rightarrow B = v_{0x} = A \Rightarrow \boxed{\begin{cases} v_x = v_{0x} \cos \omega_c t \\ v_y = v_{0x} \sin \omega_c t \end{cases}}$

I.B.2. On intègre /t $x(t) = \frac{v_{0x}}{\omega_c} \sin(\omega_c t) + C \quad y = -\frac{v_{0x}}{\omega_c} \cos(\omega_c t) + D$

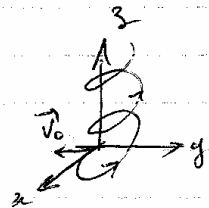
à $t=0$ $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x(t) = \frac{v_{0x}}{\omega_c} \sin \omega_c t & y(t) = (1 - \cos \omega_c t) \frac{v_{0x}}{\omega_c} \end{matrix}}$

I.B.3 On voit que $x^2 + (y - \frac{v_{0x}}{\omega_c})^2 = (\frac{v_{0x}}{\omega_c})^2 \Rightarrow$ Cercle de rayon $R_H = \frac{mv_{0x}}{qB}$
Cercle en $x_H = 0, y_H = R_H$

Fréquence $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{qB}{2\pi m}$



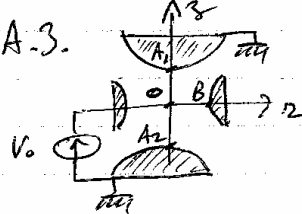
I.C. A.N. $f_c = \frac{1.6 \cdot 10^{-19} \times 1.0}{2\pi \cdot 9.1 \cdot 10^{-31}} = 2.80 \cdot 10^{10} \text{ Hz}$



I.D. Trajectoire = hélice d'axe Oz - l'électron est pas confiné au voisinage de O .

II.A.1. le potentiel U vérifie $\Delta U = -\frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$ donc vide, soit $\boxed{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0}$

II.A.2. On en déduit $2\alpha_1 + 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0$ ou $2\alpha_1 + \alpha_2 = 0$

II.A.3.  On pose $4d^2 = r_0^2 + 2z_0^2$ et $U = \alpha_0 + \alpha_1 r^2 + \alpha_2 z^2$

en A_1 ou A_2 : $\begin{cases} U=0 \\ r=0 \\ z=\pm z_0 \end{cases} \Rightarrow 0 = \alpha_0 - 2\alpha_1 z_0^2$

en B : $\begin{cases} U=0 \\ r=r_0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow V_0 = \alpha_0 + \alpha_1 r_0^2$

Donc $V_0 = \alpha_1 (r_0^2 + 2z_0^2) = \alpha_1 4d^2$ et $\alpha_0 = \frac{2z_0^2 V_0}{r_0^2 + 2z_0^2} = \frac{z_0^2 V_0}{2d^2}$.../-

II A3 (suite) on obtient

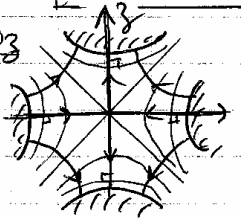
$$U(r, z) = \frac{qV_0}{2d^2} + \frac{V_0}{4d^2}(r^2 - z^2)$$

II A4 Dans le plan rz

équipotentiels:

$$r^2 - z^2 = \text{cte}$$

$\Rightarrow$ hyperboles



lignes de champ $\perp$ équipotentiels

dirigées vers U décroissant

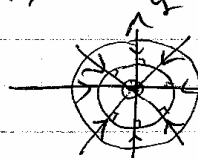
$\vec{E} \in$ plan de symétrie $\Rightarrow E_{Oz}$

tout angulaire en 0 E_{Oz}

II A5 Dans le plan Oxy :

lignes de champ = rayons

équipotentiels = cercles



à remarquer

II A6

$$\vec{E} = -\text{grad } U \Rightarrow$$

$$E_x = -\frac{V_0 x}{2d^2}$$

$$E_y = -\frac{V_0 y}{2d^2}$$

$$E_z = \frac{V_0 z}{d^2}$$

C'est bien en accord avec les figures précédentes

II B1 Equations différentielles

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -q\left(-\frac{V_0 x}{2d^2}\right) \\ m\ddot{y} = -q\left(-\frac{V_0 y}{2d^2}\right) \\ m\ddot{z} = -q\frac{V_0 z}{d^2} \end{cases}$$

soit avec $\omega_0^2 = \frac{qV_0}{md^2}$

$$\begin{cases} \ddot{x} - \frac{\omega_0^2}{2}x = 0 \\ \ddot{y} - \frac{\omega_0^2}{2}y = 0 \\ \ddot{z} + \omega_0^2 z = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{solutions exponentielles}$$

$$\Rightarrow \text{solutions sinusoidales}$$

II B2 Suivant Oz mot périodique de fréquence $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 1,02 \cdot 10^8 \text{ Hz}$

II B3 $f_0 = 1,02 \cdot 10^8 \text{ Hz}$ et $\omega_0 = 2\pi f_0 = 6,4 \cdot 10^8 \text{ rad.s}^{-1}$

II B4 pour $x(t)$ et $y(t)$ = solutions exponentielles - le mouvement n'est pas borné.

III A Nouvelles équations:

ou posé $\omega_0^2 = \frac{qV_0}{md^2}$

$$\omega_c = \frac{qB}{m}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -q\dot{y}B + \frac{qV_0}{2d^2}x \\ m\ddot{y} = +q\dot{x}B + \frac{qV_0}{2d^2}y \\ m\ddot{z} = -\frac{qV_0}{d^2}z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} + \omega_c \dot{y} - \frac{\omega_0^2}{2}x = 0 & (1) \\ \ddot{y} - \omega_c \dot{x} - \frac{\omega_0^2}{2}y = 0 & (2) \\ \ddot{z} + \omega_0^2 z = 0 & (3) \end{cases}$$

III B Donc le mouvement suivant Oz n'est pas modifié.

III C1 on pose $u = x + iy$ $-iu = -ix + y$
 en faisant (1) + i(2) : $\boxed{u'' - i\omega_c u' - \frac{\omega_0^2}{2} u = 0}$

III C2 Equation caractéristique : $r^2 - i\omega_c r - \frac{\omega_0^2}{2} = 0$

$$\Delta = -\omega_c^2 + 2\omega_0^2$$

Pour avoir un mouvement confiné, il faut des solutions imaginaires

donc $\Delta < 0 \Rightarrow \omega_c^2 > 2\omega_0^2$ ou $\boxed{\omega_c > \omega_0\sqrt{2}}$

soit $\frac{qB}{m} > \sqrt{\frac{2qV_0}{md^2}}$ on $\boxed{B > \sqrt{\frac{2V_0 m}{q d^2}}} = B_{min} = \sqrt{\frac{2 \times 10 \times 9,1 \times 10^{-31}}{1,6 \times 10^{-19} \times \frac{17}{4} \times 10^{-6}}} = 5,17 \times 10^{-3} T$

III C3 Si $\omega_c \gg \omega_0$ $\Delta < 0$ donc $\Delta = i^2(\omega_c^2 - 2\omega_0^2)$ et $\sqrt{\Delta} = \pm i\sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_0^2}$

On a alors : $r_2 = \frac{i\omega_c + i\sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_0^2}}{2}$ $r_1 = \frac{i\omega_c - i\sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_0^2}}{2}$

or $\omega_c \gg \omega_0 \Rightarrow \sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_0^2} \approx \omega_c \left(1 - \frac{2\omega_0^2}{\omega_c^2}\right)$

Donc : $r_2 = \frac{i\omega_c(1 + 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_c^2})}{2} = i\omega_c \left(1 - \frac{\omega_0^2}{2\omega_c^2}\right) \approx i\omega_c = i\omega_2$

$r_1 = \frac{i\omega_c(1 - 1 + \frac{\omega_0^2}{\omega_c^2})}{2} = i \frac{\omega_0^2}{2\omega_c} = i\omega_1$

alors $u = A_1 e^{i\omega_1 t} + A_2 e^{i\omega_2 t}$ avec $\boxed{\omega_1 = \frac{\omega_0^2}{2\omega_c} \ll \omega_2 = \omega_c}$

III C4 $f_1 = \frac{f_0^2}{2f_c} = \frac{(1,02 \times 10^8)^2}{2 \times 2,8 \times 10^{10}} = 1,86 \times 10^5 Hz$

$f_2 = f_c = 2,8 \times 10^{10} Hz$ (appel : $f_0 = 1,02 \times 10^8 Hz$)

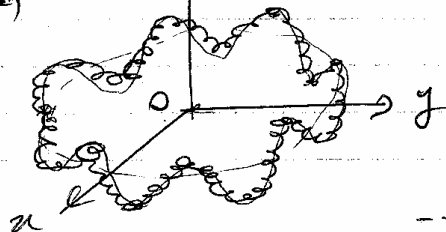
IV C5 $u = x + iy$ donc $x = \text{Re}(u) = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t$
 et $y = \text{Im}(u) = A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \sin \omega_2 t$
 $\Rightarrow$ somme de 2 mouvements circulaires.

III D Ordres de grandeur $\Rightarrow f_1 \ll f_0 \ll f_2$ et $A_2 \ll A_1$

$\Rightarrow$ grand cercle de rayon A_1 autour de $O_z(f_1)$ $\&A$

+ petit cercle de rayon A_2 (f_2)

+ un sinusoïdal pivotant $O_z(f_0) \Rightarrow$



--/--

IV A1 Mouvement oscillant pivotant $O_3 \Rightarrow m\ddot{z} + m\omega_0^2 z = 0$

on x par $\dot{z}$ et on intègre :

$$\frac{m}{2} \dot{z}^2 + \frac{m\omega_0^2}{2} z^2 = \text{cte} = E_m = E$$

IV A2 On calcule l'énergie mécanique moyenne sur une période :

$$\langle E \rangle = \frac{m}{2} \langle \dot{z}^2 \rangle + \frac{m\omega_0^2}{2} \langle z^2 \rangle \quad \text{avec } z(t) = z_0(t) \cos \omega t$$

donc $\langle z^2 \rangle = z_m^2 = \frac{z_0^2}{2}$ si $z_0(t)$ varie peu sur une période et $\langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$

$$\text{et } \langle \dot{z}^2 \rangle = \langle +z_0^2 \omega_0^2 \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2} z_0^2 \omega_0^2 = \omega_0^2 z_m^2$$

$$\text{soit } \langle E \rangle = \frac{m}{2} \omega_0^2 z_m^2 + \frac{m\omega_0^2}{2} z_m^2 = m\omega_0^2 z_m^2$$

De même $a(t) = -\omega_0^2 z_0 \cos \omega t$ si $z_0 \approx \text{cte}$ sur une période

$$\text{donc } \langle a^2(t) \rangle = a_m^2 = \omega_0^4 z_0^2 = \omega_0^4 z_m^2$$

$$\Rightarrow \langle E \rangle = \frac{m a_m^2}{\omega_0^2} \quad (\text{l'énergie n'était pas très explicite...})$$

IV A3 Puissance rayonnée : $P_m(t) = \frac{\mu_0}{6\pi c} q^2 \ddot{a}_m^2(t)$ donc $\frac{\partial \langle E \rangle}{\partial t} = -P_m$

$$\text{soit } \frac{m}{\omega_0^2} 2 a_m \frac{\partial a_m}{\partial t} = -\frac{\mu_0}{6\pi c} q^2 \ddot{a}_m^2 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial a_m}{\partial t} + \frac{\mu_0 q^2 \omega_0^2}{12\pi c m} a_m = 0$$

IV A4 l'équation s'écrit $\dot{a}_m + \frac{\mu_0 q^2 \omega_0^2}{12\pi c m} a_m = 0$ avec $\tau = \frac{12\pi c m}{\mu_0 q^2 \omega_0^2}$

IV A5 et $a_m = a_{m0} e^{-t/\tau}$ A.N. $\tau = \frac{12 \times \pi \times 30 \times 10^{-9} \times 9,1 \times 10^{-31}}{4\pi \times 10^{-2} (1,6 \times 10^{-19})^2 (6,4 \times 10^8)^2} = 7,8 \times 10^5 \text{ s}$

$$\text{on avait } T_0 = \frac{1}{f_0} = 9,8 \times 10^{-9} \text{ s}$$

donc $\tau \gg T_0$, hypothèse vérifiée

IV B1 On transpose les résultats aux deux mouvements circulaires :

$$\text{on peut alors écrire } Z_1 = \tau \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2} = \tau \left(\frac{f_0}{f_1} \right)^2 = 7,8 \times 10^5 \left(\frac{1,02 \times 10^8}{1,86 \times 10^5} \right)^2 = 2,35 \times 10^9 \text{ s}$$

$$\text{et } Z_2 = \tau \left(\frac{f_0}{f_2} \right)^2 = 7,8 \times 10^5 \left(\frac{1,02 \times 10^8}{2,8 \times 10^{10}} \right)^2 = 10,4 \text{ s}$$

IV B2 Pour le mouvement circulaire de pulsation ω_2 , l'énergie décroît très rapidement, donc on peut penser que le rayon correspondant sera beaucoup plus petit, car l'énergie mécanique est fonction du rayon. (les rayons sont notés ici A et B) --/--

* on demandait en fait l'équation en $E(t)$:

$$\left[\dot{E} + \frac{\mu_0 q^2 \omega_0^2}{6\pi c m} E = 0 \right] \quad \text{donc } \tau = \frac{7,8 \times 10^5}{2} = 3,9 \times 10^5 \text{ s! --/--}$$

Z_1 et Z_2 sont également à diviser par 2

IA On pose $\vec{F} = \alpha \frac{q}{2d} (V_1 - R I) \vec{e}_z$ et $I = \alpha \frac{q}{2d} \frac{dz}{dt}$
 α est sans dimension ($[\frac{qV}{d}] = [F]$ et $[\frac{qV}{d} \frac{dz}{dt}] = [I]$)

IB Equa-diff. pour le mouvement longitudinal de l'électron:

$$m \ddot{z} = -m \omega_0^2 z + \frac{\alpha q}{2d} (V_1 - R I) = -m \omega_0^2 z + \frac{\alpha q V_1}{2d} - R \left(\frac{\alpha q}{2d} \right)^2 \dot{z}$$

$$\text{Soit } \ddot{z} + \left(\frac{\alpha q}{2d} \right)^2 \frac{R}{m} \dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{\alpha q V_1}{2d} \cos \omega t \quad \text{ou } \ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{\alpha q}{2d} \frac{V_1}{m} \cos \omega t$$

VC or $V_2 = R I = R \frac{\alpha q}{2d} \dot{z}$ on x par $\frac{R \alpha q}{2d}$: $\frac{R \alpha q}{2d} \ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{R \alpha q}{2d} \dot{z} + \omega_0^2 \frac{R \alpha q}{2d} z = \frac{R}{m} \left(\frac{\alpha q}{2d} \right) V_1$

$$\Rightarrow \ddot{V}_2 + \frac{\omega_0}{Q} \dot{V}_2 + \omega_0^2 V_2 = \frac{\omega_0}{Q} V_1 \cos \omega t$$

on dérive/t $\Rightarrow \ddot{V}_2 + \frac{\omega_0}{Q} \dot{V}_2 + \omega_0^2 V_2 = -\frac{\omega_0 \omega}{Q} V_1 \sin \omega t$

VD Résolution en complexe: on pose $V_2 = V_{20} \cos(\omega t + \alpha)$ et $V_2 = V_{20} e^{j\omega t} e^{i\alpha} = \underline{V}_{20} e^{j\omega t}$
 par ailleurs $-V_1 \sin \omega t = \text{Re}(j V_1 e^{j\omega t})$ on obtient donc:

$$\underline{V}_{20} [-\omega^2 + j \frac{\omega_0 \omega}{Q} + \omega_0^2] e^{j\omega t} = \frac{\omega_0 \omega}{Q} V_1 j e^{j\omega t} \quad \text{d'où } \underline{V}_2(t)$$

Ind'où $V_{20} \cos \alpha = V_{2c} = \text{Re} \left[\frac{j \frac{\omega_0 \omega}{Q} V_1}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega_0 \omega}{Q}} \right] = \frac{(\frac{\omega_0 \omega}{Q})^2 V_1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\omega_0 \omega}{Q})^2}$

et $V_{20} \sin \alpha = -V_{2s} = \text{Im} \left[\frac{j \frac{\omega_0 \omega}{Q} V_1}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega_0 \omega}{Q}} \right] = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) \frac{\omega_0 \omega}{Q} V_1}{\omega_0^2 - \omega^2 + (\frac{\omega_0 \omega}{Q})^2}$

$$V_{2c} = \frac{V_1 \left(\frac{\omega_0 \omega}{Q} \right)^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega_0 \omega}{Q} \right)^2}$$

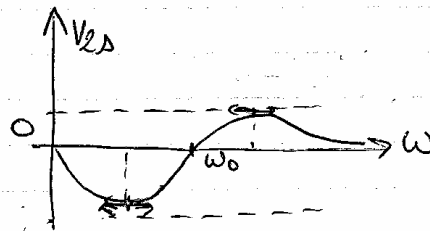
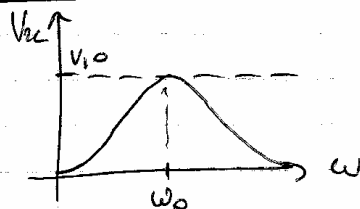
$$V_{2s} = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) \left(\frac{\omega_0 \omega}{Q} \right) V_1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega_0 \omega}{Q} \right)^2}$$

$$\text{et } V_{20} = \frac{\frac{\omega_0 \omega}{Q} V_1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega_0 \omega}{Q} \right)^2}}$$

VD3 tracé des amplitudes: en posant $x = \frac{\omega}{\omega_0}$

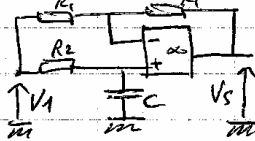
$$V_{2c} = V_1 \frac{1}{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2} \quad \text{et} \quad V_{2s} = \frac{V_1}{Q} \frac{(x^2 - 1) \frac{x}{Q}}{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}$$

allure des courbes:



--/--

VE1 a. Circuit déphaseur



$$V^- - V_1 = (V_3 - V_1) \frac{R_1}{2R_1} = (V_3 - V_1) \frac{1}{2}$$

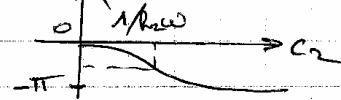
$$V^+ = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}} V_1 = \frac{1}{1 + jR_2\omega C} V_1$$

fonctionnelle $\Rightarrow V^+ = V^-$ d'où $\frac{V_3}{V_1} = \frac{1 - jR_2\omega C}{1 + jR_2\omega C} = e^{j\varphi}$

VE1 b. $\left| \frac{V_3}{V_1} \right| = 1$ donc seule la phase change

$$\text{Si } C_2 \rightarrow 0 \quad \varphi \rightarrow 0$$

$$\text{Si } C_2 \rightarrow \infty \quad \varphi \rightarrow -\pi$$



VE2 Tension de sortie du multiplieur:

$$V_4 = K V_2 V_3 = K (V_{2c} \cos \omega t + V_{2s} \sin \omega t) V_{10} \cos(\omega t + \varphi) = K V_{20} \cos(\alpha + \varphi) V_{10} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$= \frac{K V_{20} V_{10}}{2} [\cos(2\omega t + \alpha + \varphi) + \cos(\alpha - \varphi)]$$

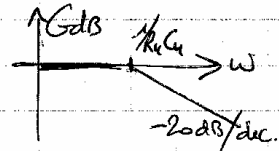
$$= \frac{K V_{20} V_{10}}{2} [\cos \alpha \cos \varphi + \sin \alpha \sin \varphi] + \frac{K V_{20} V_{10}}{2} [\cos(2\omega t + \varphi) \cos \alpha - \sin(2\omega t + \varphi) \sin \alpha]$$

$$= \frac{K V_{10}}{2} [V_{2c} \cos \varphi - V_{2s} \sin \varphi] + \frac{K V_{10}}{2} [V_{2c} \cos(2\omega t + \varphi) + V_{2s} \sin(2\omega t + \varphi)]$$

(Car $V_{2c} = V_{20} \cos \alpha$ et $V_{2s} = -V_{20} \sin \alpha$)

VE3 a. filtre passe-bas:

$$\frac{V_5}{V_4} = \frac{1}{1 + jR_4\omega C_4}$$



VE3 b. diagramme =

VE3 c. pour être passe-bas, il faut $\omega \ll \frac{1}{R_4 C_4}$ ou $R_4 C_4 \omega \ll 1$

VE3 d. Cette condition est réalisée: seule la composante continue

$$\text{passe} \Rightarrow V_5 = V_{40} = \frac{K V_{10}}{2} (V_{2c} \cos \varphi - V_{2s} \sin \varphi)$$

VE4. Il faut avoir $\varphi \rightarrow 0$ soit $C_2 = 0$ VE5. Il faut avoir $\varphi = -\pi/2$ soit $C_2 = \frac{1}{R_2 \omega}$ VE6 $\omega = 10^8 \text{ rad.s}^{-1} \Rightarrow \text{AOP non utilisable}$
(il faut $f < 10^5 \text{ Hz}$)