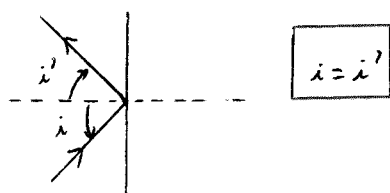


PARTIE A : Etude d'un prismeA-I) Etude de la déviation d'un rayon lumineux :A-I-1) Lois de Descartes pour la réflexion :

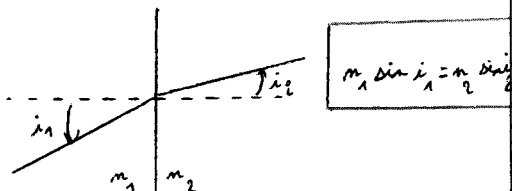
- * 1^{ère} loi : le rayon réfléchi est contenu dans le plan d'incidence, c'est-à-dire le plan défini par le rayon incident et la normale au dioptre.

- * 2^{ème} loi :

Lois de Descartes pour la réfraction :

- * 1^{ère} loi : le rayon réfracté est contenu dans le plan d'incidence.

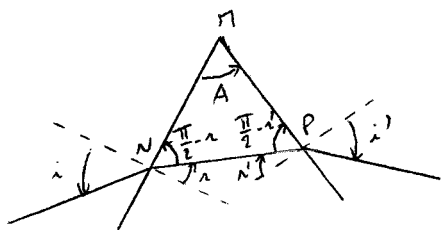
- * 2^{ème} loi :

A-I-2-1)

$$\sin i = n \sin r$$

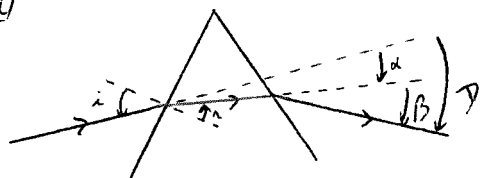
$$\sin i' = n \sin r'$$

car $n \approx 1$ dans l'air



Dans le triangle NPP : $A + \left(\frac{\pi}{2} - r\right) + \left(\frac{\pi}{2} - r'\right) = \pi$

$$\Rightarrow \boxed{A = r + r'}$$

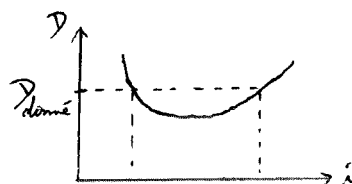
A-I-2-2)

$$D = \alpha + \beta \quad \text{or } \alpha = i - r \quad \text{et } \beta = i' - r'$$

$$\Rightarrow D = i - r + i' - r' = i + i' - (r + r')$$

$$\Rightarrow \boxed{D = i + i' - A} \quad \text{car } A = r + r'$$

A-I-3) Un angle d'incidence i donne un angle d'émergence i' , et donc, par le principe de retour inverse de la lumière, un angle d'incidence i' donnera un angle d'émergence i . Étant donné que $D = i + i' - A$, les couples (i, i') et (i', i) donneront la même déviation D .
 $\Rightarrow$ La déviation est la même pour 2 angles, d'où l'allure de la courbe :



$\Rightarrow$ 2 solutions pour i : i et i'

Au minimum de la courbe : $i = i'$

$\Rightarrow \boxed{i = i'}$ au minimum de déviation

A-I-4) Au minimum de déviation : $i = i'$

$$\Rightarrow \sin i = n \sin r = \sin i' = n \sin r' \Rightarrow r = r'$$

$$\text{or } A = r + r' \Rightarrow r = r' = \frac{A}{2}$$

$$D_m = i + i' - A = 2i - A \Rightarrow i = \frac{D_m + A}{2}$$

$$\text{or } \sin i = n \sin r \Rightarrow \boxed{\sin\left(\frac{D_m + A}{2}\right) = n \sin\left(\frac{A}{2}\right)}$$

$$n = \frac{\sin\left(\frac{D_m + A}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}}$$

On tourne le prisme toujours dans le même sens, on constate qu'à un moment donné, les raies font demi-tour. On est alors au minimum de déviation. On mesure alors la déviation D_m , et on déduit n grâce à la relation précédente.

A-II) Influence de la longueur d'onde :

A-II-1) Loi de variation de l'indice avec la longueur d'onde :

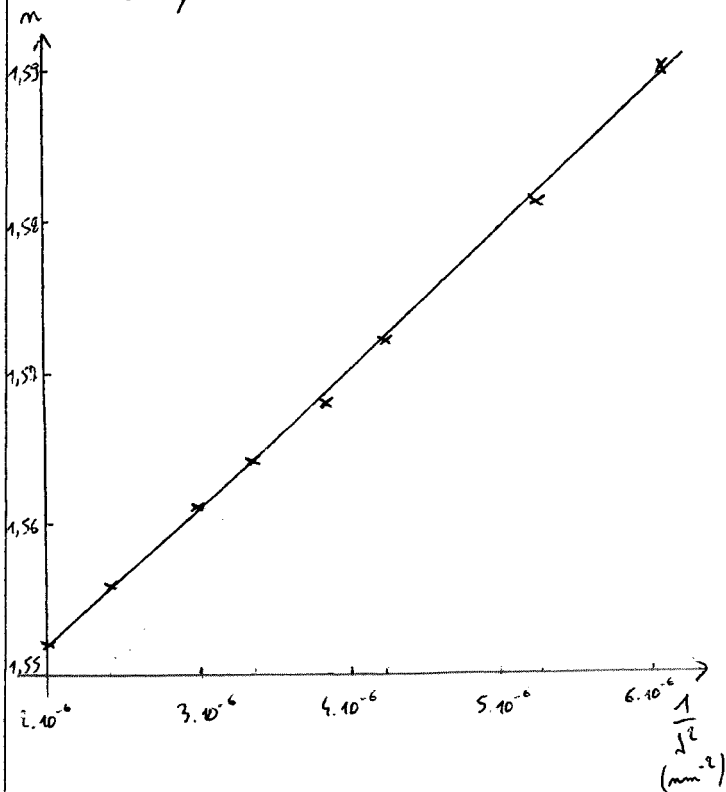
λ (nm)	404,6	435,8	486,1	508,6	546,1	578,0	643,8	706,5
$\frac{1}{\lambda^2}$ (nm ⁻²)	$6,103 \cdot 10^{-6}$	$5,265 \cdot 10^{-6}$	$4,232 \cdot 10^{-6}$	$3,866 \cdot 10^{-6}$	$3,353 \cdot 10^{-6}$	$2,993 \cdot 10^{-6}$	$2,413 \cdot 10^{-6}$	$2,003 \cdot 10^{-6}$
n	1,530	1,581	1,572	1,568	1,564	1,561	1,556	1,552

On trace n en fonction de $\frac{1}{\lambda^2}$. Si on obtient une droite,

alors on peut mettre n sous la forme $n = a + \frac{b}{\lambda^2}$

avec a = ordonnée à l'origine

b = pente



On obtient bien une droite :

d'ordonnée à l'origine $a = 1,534$

de pente $b = 9101 \text{ nm}^2$

(régression linéaire)

$$\text{A-II-2)} \sin\left(\frac{\mathcal{D}_m + A}{2}\right) = n \sin\left(\frac{A}{2}\right)$$

donc $\mathcal{D}_m$ dépend de n , or n dépend de λ

$\Rightarrow \mathcal{D}_m$ dépend de λ

$$\text{A-II-3)} \text{ cf A-I-4)} \quad i_0 = \frac{\mathcal{D}_m + A}{2}$$

$$\lambda_0 = 578,0 \text{ nm} \Rightarrow n = 1,561$$

$$\text{or } \sin i_0 = n \sin \frac{A}{2} \Rightarrow i_0 = \text{Arcsin}\left(n \sin \frac{A}{2}\right)$$

$$i_0 = 51,31^\circ$$

$$\text{A-II-4)} * \sin i = n \sin r \Rightarrow \cos i \, di = n \cos r \, dr$$

$$i = c^b = i_0 + dn \sin r$$

$$\Rightarrow n \cos r \, dr + dn \sin r = 0 \quad (1)$$

$$* \sin i' = n \sin r' \Rightarrow n \cos i' \, di' + dn \sin r' = \cos i' \, di' \quad (2)$$

$$* A = r + r' \Rightarrow dr = -dr' \quad (3) \quad (\text{car } A = c^b)$$

$$(3) \text{ dans } (2) \Rightarrow -n \cos r' \, dr + dn \sin r' = \cos i' \, di' \quad (2')$$

$$(1) \Rightarrow -n \, dr = dn \frac{\sin r}{\cos r}$$

$$\text{dans } (3): dn \frac{\sin r}{\cos r} \cos r' + dn \sin r' = \cos i' \, di'$$

$$\Rightarrow \frac{di'}{dn} = \frac{\sin r \cos r'}{\cos r \cos i'} + \frac{\sin r'}{\cos i'}$$

or on est au minimum de déviation pour λ_0
(nœuds de λ_0)

$\Rightarrow$ donc pour les autres λ , au premier ordre, on a :

$$r \approx r' \approx \frac{A}{2} \quad \text{et} \quad i' \approx i \approx \frac{\mathcal{D}_m + A}{2} = i_0$$

$$\Rightarrow \frac{di'}{dn} = \frac{\sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos i_0} + \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos i_0} = 2 \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos i_0}$$

$$\text{or } \frac{di'}{d\lambda} = \frac{di'}{dn} \frac{dn}{d\lambda} \Rightarrow \frac{di'}{d\lambda} = 2 \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos i_0} \frac{dn}{d\lambda}$$

A-II-5) Montage d'étude :

A-II-5-1) On éclaire la fente d'entrée du collimateur, or la fente est placée au foyer objet de la lentille O1. Ainsi, on aura une seule incidence i_0 (faisceau de lumière parallèle).

On observe dans le plan focal image de la lentille O2.

Ainsi, chaque angle d'émergence i' donnera sa propre raie.

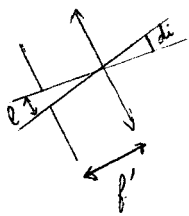
A-II-5.2) $\lambda = 578,0 \text{ nm}$ et $i = i_0 \Rightarrow$ on est au minimum de déviation. $\Rightarrow i' = i_0$

$\Rightarrow$ Si on place la lentille de telle sorte que l'axe de la lentille fasse avec la normale à la face de sortie du prisme l'angle i_0 , alors l'image de la fente F sera sur l'axe de la lentille (et passera par le foyer image de O2).

* $\frac{di'}{d\lambda} = -1$ au minimum de déviation $\Rightarrow |di'| = |d\lambda|$

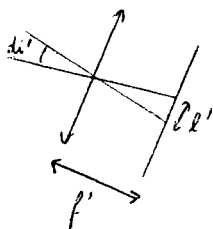
* De plus, O1 et O2 ont même distance focale

$\Rightarrow$ largeur de l'image de la fente = l



$$\frac{l}{2} = f' \tan \frac{di}{2}$$

$$\text{car } di = di' \Rightarrow l' = l$$



$$\frac{l'}{2} = f' \tan \frac{di'}{2}$$

$$\text{A-II-5.3)} \quad \frac{di'}{d\lambda} = \frac{2 \sin \frac{A}{2}}{\cos i_0} \frac{dn}{d\lambda}$$

$$\text{car } n = a + \frac{b}{\lambda^2} \Rightarrow \frac{dn}{d\lambda} = -\frac{2b}{\lambda^3}$$

$$\Rightarrow di' = \frac{-4b \sin \frac{A}{2}}{\lambda^3 \cos i_0} d\lambda$$

$$b = 3101 \text{ nm}^2$$

$$A = 60^\circ$$

$$\lambda = 578,0 \text{ nm}$$

$$i_0 = 51,31^\circ$$

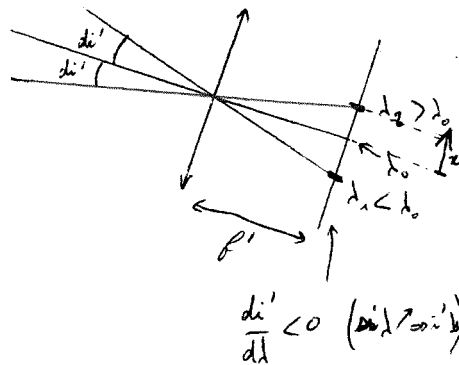
$$d\lambda = \pm 1 \text{ nm}$$

$$\Rightarrow di' = \pm 1,508 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

de part et d'autre de l'axe de la lentille (centrée sur λ_0).

$$x = f' \tan di'$$

$$x = f' di'$$



Pour séparer les 2 images :

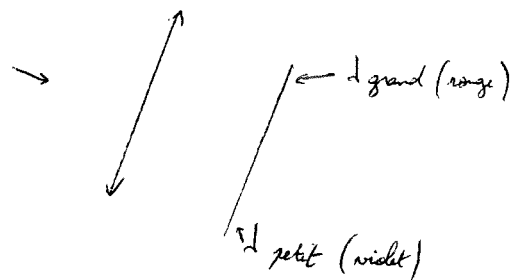
il faut $2x > l$

$$\Rightarrow 2 f' \frac{b \sin \frac{A}{2}}{\lambda^3 \cos i_0} d\lambda > l$$

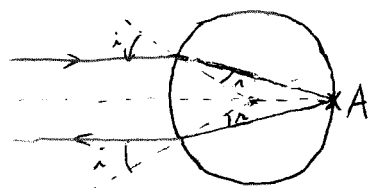
$$\Rightarrow f' > 3,316 \text{ mm}$$

A-II-5.4) lumière blanche $\Rightarrow$ on observe un spectre continu.

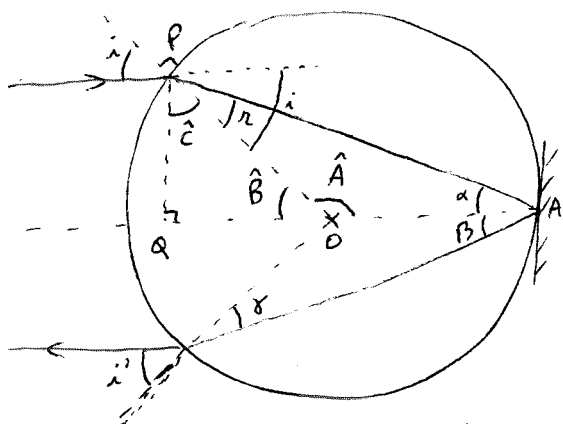
$$\frac{di'}{d\lambda} < 0 \Rightarrow \text{donc si } \lambda \uparrow, i' \downarrow$$



A-II-5.5) autre montage : spectroscopie à réseau

PARTIE B : Principe de l'arc-en-cielB.I) Introduction :

Pour que le rayon émergent ressorte parallèle au rayon incident, il faut que le rayon passe par le point A (intersection entre la bille et le rayon parallèle au rayon incident et passant par le centre de la bille). Ceci est évident pour des raisons de symétrie (si les rayons incidents et émergents sont horizontaux, en A la bille est assimilable à un miroir vertical).



triangle OPA isocèle ($OA = OP = R$) $\Rightarrow \alpha = \gamma$

$\Rightarrow \beta = \gamma$ (car $\alpha = \beta$ loi de Descartes)

or $\gamma = \beta$ (triangle isocèle) $\Rightarrow \gamma = \alpha \Rightarrow i' = i$ (loi de Descartes)

$\hat{A} = \pi - \alpha - \gamma = \pi - 2\alpha$ (dans triangle OPA)

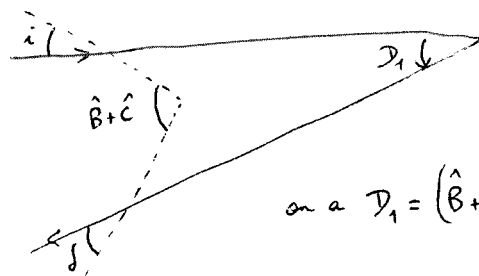
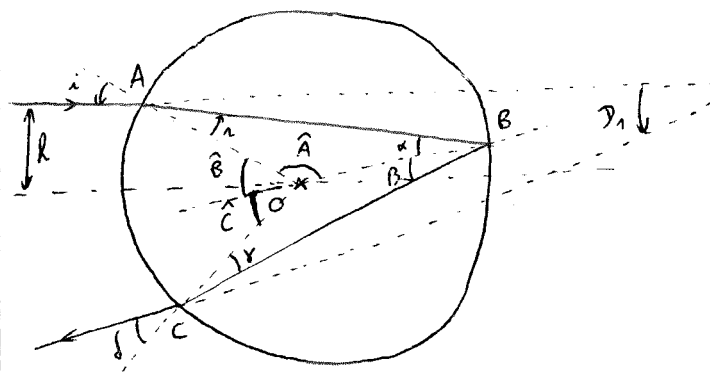
$\Rightarrow \hat{B} = 2\alpha$ car $\hat{A} + \hat{B} = \pi$

$\Rightarrow \hat{C} = \frac{\pi}{2} - \beta = \frac{\pi}{2} - \gamma$ (triangle OPQ)

$$\alpha \hat{C} = \frac{\pi}{2} - i \Rightarrow i = 2\alpha$$

or loi de Descartes : $\sin i = n \sin r \Rightarrow i = nr$ (petits angles)

$$\Rightarrow \boxed{n=2}$$

B.II) Théorie géométrique de l'arc-en-ciel :B.II.1) Trajet des rayons dans une goutte d'eau sphériqueB.II.1.1)

$$\text{on a } D_1 = (\hat{B} + \hat{C}) - i - d$$

triangle isocèle AOB ($OA = OB = R$) $\Rightarrow \alpha = \gamma$

triangle COB ($OC = OB = R$) $\Rightarrow \beta = \delta$

or loi de Descartes pour la réflexion en B : $\alpha = \beta$

$$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta$$

triangle OAB : $\hat{A} + \alpha + \gamma = \pi \Rightarrow \hat{A} = \pi - 2\alpha$

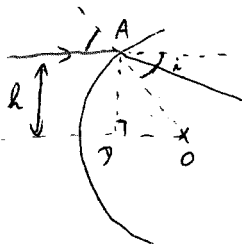
$$\Rightarrow \hat{B} = 2\alpha$$

De même $\hat{C} = 2\alpha \Rightarrow (\hat{B} + \hat{C}) = 4\alpha$

$$\left. \begin{array}{l} \sin i = n \sin r \\ \sin d = n \sin \gamma = n \sin \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow d = i$$

$$\Rightarrow D_1 = (\hat{B} + \hat{C}) - i - d = 4\alpha - 2i$$

$$\Rightarrow \boxed{D_1 = 4\alpha - 2i}$$



$$\hat{DAO} = \frac{\pi}{2} - i$$

triangle OAD:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - i\right) = \frac{h}{R} \quad (OA=R)$$

$$\Rightarrow \sin i = \frac{h}{R} = x$$

$$\Rightarrow i = \text{Arcsin } x$$

$$\text{or } \sin i = n \sin r \Rightarrow n \sin r = x$$

$$\Rightarrow r = \text{Arcsin } \frac{x}{n}$$

$$\Rightarrow \mathcal{D}_1 = 4r - 2i = 4 \text{Arcsin } \frac{x}{n} - 2 \text{Arcsin } x = \mathcal{D}_1$$

$$\mathcal{D}_1(x) \text{ passe par un extremum si } \frac{d\mathcal{D}_1}{dx} = 0$$

$$\frac{d\mathcal{D}_1}{dx} = 4 \times \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{n^2}}} - 2 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{n\sqrt{1 - \frac{x^2}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{n^2 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \Rightarrow 1 - x_m^2 = \frac{n^2 - x_m^2}{4}$$

$$\Rightarrow 4 - 4x_m^2 = n^2 - x_m^2 \Rightarrow x_m^2 = \frac{4 - n^2}{3}$$

$$\Rightarrow x_m = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}} = 0,8588$$

$$\mathcal{D}_{1m} = 4 \text{Arcsin } \frac{x_m}{n} - 2 \text{Arcsin } x_m = 41,50^\circ$$

$$\text{B-II-1.2)} \quad i = \text{Arcsin } x \quad \text{et} \quad r = \text{Arcsin } \frac{x}{n}$$

$$\Rightarrow \mathcal{D}_2 = \pi + 2i - 6r = \pi + 2 \text{Arcsin } x - 6 \text{Arcsin } \frac{x}{n}$$

$$\mathcal{D}_{2m} = \pi + 2 \text{Arcsin } \sqrt{\frac{9 - n^2}{8}} - 6 \text{Arcsin } \left(\frac{1}{n} \sqrt{\frac{9 - n^2}{8}} \right)$$

↑
180°

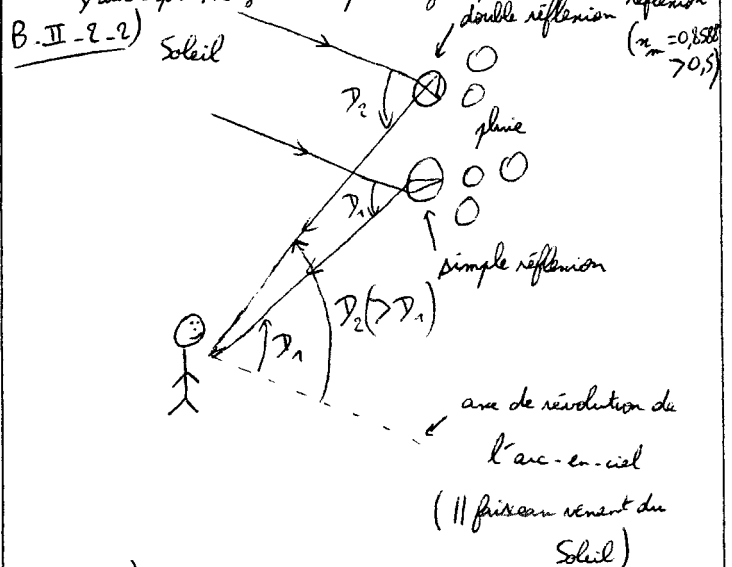
$$\Rightarrow \mathcal{D}_{2m} = 51,93^\circ$$

B-II-2) Caractéristiques de l'arc-en-ciel:

B-II-2.1) On voit 2 arcs:

* l'arc primaire correspondant aux rayons ayant subi une seule réflexion (et 2 réfractions).

* l'arc secondaire correspondant aux rayons ayant subi 2 réflexions (et 2 réfractions). Cet arc est d'intensité plus faible car les rayons ont subi une réflexion de plus (une partie de l'énergie est partie du rayon réfracté à cette occasion).
D'autre part, il y a beaucoup + de rayons qui ne subissent qu'une réflexion



B-II-2.3) * arc secondaire: moins lumineux $\Rightarrow$ 2 réflexions

$$\Rightarrow \text{rayon angulaire: } \mathcal{D}_{2m} = 51,93^\circ$$

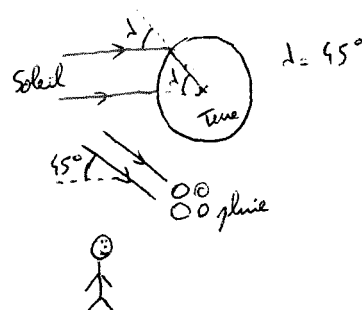
* arc primaire: + lumineux $\Rightarrow$ 1 réflexion

$$\Rightarrow \text{rayon angulaire: } \mathcal{D}_{1m} = 41,50^\circ$$

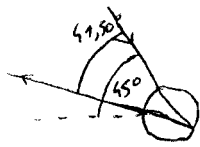
$\Rightarrow$ l'arc secondaire est externe.

B-II-2.4) équinocxe de printemps à midi solaire

$\Rightarrow$ le Soleil est au zénith à l'équateur



or $\mathcal{D}_{1m} = 41,50^\circ < 45^\circ \Rightarrow$ les rayons sont réfléchis vers le ciel!!



$\Rightarrow$ on ne peut pas voir d'arc-en-ciel primaire dans ces conditions.



B.II.2.5) On voit des couleurs car l'indice de l'eau n dépend de $\lambda \Rightarrow \kappa_{1m}, \kappa_{2m}, \mathcal{D}_{1m}$ et $\mathcal{D}_{2m}$ dépendent de λ

$\Rightarrow$ les rayons angulaires dépendent de λ

* violet : $\lambda = 400 \text{ nm}$, $n = 1,34356$

$$\Rightarrow \kappa_m = \sqrt{\frac{4-n^2}{3}} = 0,855345$$

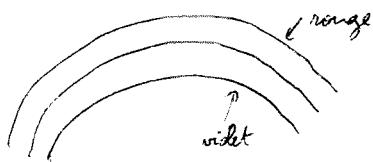
$$\mathcal{D}_{1m} = 40,5670^\circ$$

* rouge : $\lambda = 700 \text{ nm}$, $n = 1,33052$

$$\Rightarrow \kappa_m = \sqrt{\frac{4-n^2}{3}} = 0,862113$$

$$\mathcal{D}_{1m} = 42,4401^\circ$$

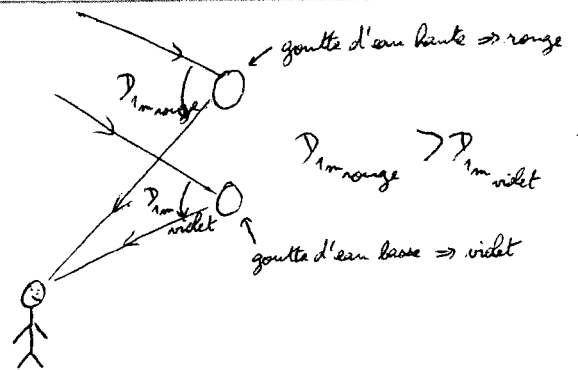
$$\Rightarrow \mathcal{D}_{1m \text{ rouge}} > \mathcal{D}_{1m \text{ violet}}$$



$\Rightarrow$ À l'intérieur de l'arc-en-ciel : violet
- extérieur : rouge

écart angulaire entre le violet et le rouge :

$$\mathcal{D}_{1m \text{ rouge}} - \mathcal{D}_{1m \text{ violet}} = 1,8731^\circ$$



B.II.2.6) Pour l'arc primaire, de la lumière est réfléchi pour des angles allant de 0 à $\mathcal{D}_{1m}$.

Pour des angles $> \mathcal{D}_{1m}$, on n'a plus de rayons qui ont subi une seule réflexion $\Rightarrow$ on a moins de lumière $\Rightarrow$ bande sombre.

PARTIE C : Propagation guidéeC-I-1) Propagation dans une structure métallique creuse :C-I-1) métal parfait = conductivité électrique γ infinie

$$\gamma \rightarrow \infty$$

métal conducteur $\Rightarrow$ loi d'Ohm locale : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ ou $\gamma \rightarrow \infty$ et $\vec{j}$ doit être fini $\Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$ C-I-2) équation de Maxwell-Faraday : $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ou $\vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \Rightarrow$ le champ magnétique $\vec{B}$ est indépendant du temps en tout point du métal parfait.ou on s'intéresse à des ondes $\Rightarrow \vec{B} = \vec{0}$

$$\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = j\omega \vec{B} = \vec{0} \Rightarrow \vec{B} = \vec{0} \right)$$

C-I-3) équation Maxwell-Gauss : $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$ ($\rho = 0$ vide)- flux : $\text{div} \vec{B} = 0$ - Faraday : $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ - Ampère : $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
 $\vec{j} = \vec{0}$ (vide)

$$* \vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{\text{grad}} \text{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$$

$$= \vec{\text{rot}} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\text{rot}} \vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\Rightarrow \square \vec{E} = \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$* \vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{B} = \vec{\text{grad}} \text{div} \vec{B} - \Delta \vec{B}$$

$$= \vec{\text{rot}} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\text{rot}} \vec{E}) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

$$\Rightarrow \square \vec{B} = \Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

 $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ est la célérité des ondes électromagnétiques dans le vide.

$$\text{C-I-4)} * \gamma \text{ réel} : \vec{U} = \vec{U}_0 e^{\pm |x|/z} e^{j\omega t} \quad (\gamma = \pm |x|)$$

phase = $\omega t \Rightarrow$ pas de propagation γ réel : pas de propagation de l'onde électromagnétique* γ imaginaire pur : $\gamma = \pm j|x|$

$$\Rightarrow \vec{U} = \vec{U}_0 e^{j(\omega t \pm |x|/z)}$$

phase = $\omega t \pm |x|/z \Rightarrow$ propagation

pas de pertes car pas d'exponentielle réelle

 γ imaginaire pur : propagation sans pertes* γ complexe : $\gamma = \alpha + j\beta$

$$\Rightarrow \vec{U} = \vec{U}_0 e^{-(\alpha + j\beta)x} e^{j\omega t}$$

$$= \vec{U}_0 e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - \beta x)}$$

phase = $\omega t - \beta x \Rightarrow$ propagation $e^{-\alpha x} \Rightarrow$ pertes γ complexe : propagation avec pertes

$$\text{C-I-5)} \gamma = jk \Rightarrow \vec{U} = \vec{U}_0 e^{-jkx} e^{j\omega t} = \vec{U}_0 e^{j(\omega t - kx)}$$

ou on a propagation dans sens des x croissants $\Rightarrow k > 0$ phase = $\omega t - kx$

$$e^{j(\omega t - kx)} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = j\omega \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x} = -jk$$

(car $\vec{E}_0$ et $\vec{B}_0$ ne dépendent ni de t , ni de x)

$$\text{C-I-6)} * \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial E_y}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial y} \\ \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial E_y}{\partial y} + jk E_y \\ -jk E_x - \frac{\partial E_y}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -j\omega \vec{B} = -j\omega \begin{vmatrix} B_x \\ B_y \\ 0 \end{vmatrix}$$

* $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ $\alpha \quad B_z = 0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} jk B_y \\ -jk B_x \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{c^2} j\omega \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

On réécrit les 2 premières lignes de ces 2 égalités vectorielles:

$$\begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} + jk E_y = -j\omega B_x \\ -jk E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega B_y \\ k B_y = \frac{\omega}{c^2} E_x \\ -k B_x = \frac{\omega}{c^2} E_y \end{cases}$$

ce qui mène à

$$\begin{aligned} \frac{k c^2}{\omega} B_y = E_x &= \frac{jk \frac{\partial E_z}{\partial x}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \\ -\frac{k c^2}{\omega} B_x = E_y &= \frac{jk \frac{\partial E_z}{\partial y}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \end{aligned}$$

C.I.1) $\square \vec{E} = \vec{0} \quad \begin{vmatrix} \square E_x \\ \square E_y \\ \square E_z \end{vmatrix} \Rightarrow \square E_z = 0$

$$\Rightarrow \Delta E_z - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + (-jk)^2 E_z - \frac{1}{c^2} (j\omega)^2 E_z = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) E_z = 0$$

$$K^2 \Rightarrow K = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k^2}$$

C.I.8) relations de passage: $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}$
 $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}$

$\Rightarrow$ on a toujours continuité de la composante:

* tangentielle pour $\vec{E}$

* normale pour $\vec{B}$

à la traversée d'une surface.

À l'intérieur du métal parfait: $\vec{E} = \vec{0}$, $\vec{B} = \vec{0}$

$\Rightarrow$ la composante tangentielle de $\vec{E}$ et la composante normale de $\vec{B}$ doivent s'annuler dans le vide au voisinage immédiat du métal parfait.

C.II) Cas d'une structure rectangulaire:

C.II-1) E_z est une composante tangentielle pour $\vec{E}$.

$\Rightarrow E_{0z}(x, y) = 0$ sur les 4 portions de plan limitant la cavité

$$E_{0z}(0, y) = E_{0z}(a, y) = E_{0z}(x, 0) = E_{0z}(x, b) = 0$$

C.II-2) Détermination des solutions:

C.II-2.1) $E_z = E_{0z} e^{j(\omega t - k_z z)}$

Dans l'éq. diff de C.II.1), on peut factoriser par $e^{j(\omega t - k_z z)}$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 E_{0z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{0z}}{\partial y^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) E_{0z} = 0$$

C.II-2.2) $E_{0z} = (A' \sin k_1 x + B' \cos k_1 x) (C' \sin k_2 y + D' \cos k_2 y)$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 E_{0z}}{\partial x^2} = -k_1^2 E_{0z} \quad (\text{après calculs})$$

$$\text{et } \frac{\partial^2 E_{0z}}{\partial y^2} = -k_2^2 E_{0z}$$

$$\Rightarrow -k_1^2 E_{0z} - k_2^2 E_{0z} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) E_{0z} = 0$$

$$\Rightarrow k_1^2 + k_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2$$

$$* E_{0y}(0, y) = B' (C' \sin k_2 y + D' \cos k_2 y) = 0 \quad \forall y$$

$$\Rightarrow B' = 0$$

$$* E_{0y}(x, 0) = D' (A' \sin k_1 x + B' \cos k_1 x) = 0 \quad \forall x$$

$$\Rightarrow D' = 0$$

$$\Rightarrow E_{0y}(x, y) = E_0 \sin k_1 x \sin k_2 y$$

C-II-2.3) $* E_{0y}(a, y) = 0 \quad \forall y$

$$= E_0 \sin k_1 a \sin k_2 y$$

$$\Rightarrow \sin k_1 a = 0$$

$$\Rightarrow k_1 a = n\pi$$

$$\Rightarrow k_1 = \frac{n\pi}{a}$$

$$* E_{0y}(x, b) = 0 \quad \forall x$$

$$= E_0 \sin k_1 x \sin k_2 b \Rightarrow \sin k_2 b = 0$$

$$\Rightarrow k_2 b = m\pi$$

$$\Rightarrow k_2 = \frac{m\pi}{b}$$

$$* k_1^2 + k_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_1^2 - k_2^2$$

$$\Rightarrow k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right)}$$

* expliquer le terme "mode TM_{mn}" :

→ TM: Transverse magnétique: $B_z = 0$: $\vec{B} \perp$ direction de propagation de l'onde.

$$\rightarrow TM_{mn}: E_{0y} = E_0 \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}$$

* m et n déterminent la valeur du module d'onde k .

* valeurs minimales de m et n :

$$m = n = 1$$

$$(si m ou n = 0, E_{0y} = 0 \Rightarrow B_{0y} = E_{0x} = B_{0z} = E_{0y} = 0$$

$$\text{cf CII6}) \Rightarrow \vec{E} = \vec{B} = \vec{0} \Rightarrow \text{pas intéressant})$$

$$* k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right)}$$

$$\Rightarrow \text{il faut } \frac{\omega^2}{c^2} - \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right) > 0$$

$$\Rightarrow \omega > \pi c \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}$$

$$\Rightarrow f > \frac{c}{2} \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}$$

$$\Rightarrow f_{\min} = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$$

C-II-2.4) $E_x = \frac{j k \frac{\partial E_y}{\partial x}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} = \frac{j k}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} E_0 \frac{n\pi}{a} \cos \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} e^{j(\omega t - k_z z)}$

$$E_x = \frac{j k E_0 \frac{n\pi}{a}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \cos \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} e^{j(\omega t - k_z z)}$$

$$B_y = \frac{\omega}{kc^2} E_x = \frac{j \omega E_0 \frac{n\pi}{a}}{c^2 k^2 - \omega^2} \cos \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} e^{j(\omega t - k_z z)}$$

$$E_y = \frac{j k \frac{\partial E_x}{\partial y}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} = \frac{j k E_0 \frac{m\pi}{b}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b} e^{j(\omega t - k_z z)}$$

$$B_x = -\frac{\omega}{kc^2} E_y = \frac{-j \omega E_0 \frac{m\pi}{b}}{c^2 k^2 - \omega^2} \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{b} e^{j(\omega t - k_z z)}$$

composante normale de $\vec{B}$:

$$B_x(0, y) = B_x(a, y) = B_y(x, 0) = B_y(x, b) = 0$$

⇒ OK

composante tangentielle de $\vec{E}$:

$$E_y(0, y) = E_y(a, y) = E_x(x, 0) = E_x(x, b) = 0$$

⇒ OK

C-II-2.5) $\varphi(z, t) = \omega t - k_z z$

2 points d'espace-temps voisins ont même phase si

$$\varphi(z, t) = \varphi(z + dz, t + dt)$$

$$\Rightarrow \omega t - k z = \omega(t+dt) - k(z+dz)$$

$$\Rightarrow \omega dt - k dz = 0 \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k}$$

$$\Rightarrow v_p = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k}$$

$$\Rightarrow v_p = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right)}}$$

$$\Rightarrow v_p = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\pi^2 c^2}{\omega^2} \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right)}} > c$$

Cette vitesse de phase est supérieure à c, célérité des ondes électromagnétiques dans le vide.

Ce dispositif est dispersif, car la vitesse de phase est fonction de la pulsation ω de l'onde.

C-II-2.6)

cf C-II-2.3)

$$f_c = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} = 3 \cdot 10^{10} \text{ Hz}$$

$$n=1$$

$$m=1$$

$$\omega = 2\pi f = 4\pi f_c$$

$$\Rightarrow v_p = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\pi^2 c^2}{16\pi^2 f_c^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)}}$$

$$\text{or } f_c^2 = \frac{c^2}{4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \Rightarrow \frac{c^2}{4f_c^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) = 1$$

$$\Rightarrow v_p = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}}$$

$$\Rightarrow v_p = \frac{2c}{\sqrt{3}} = 3,5 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$$