

Sujet Mines Ponts 2010

Physique I

Option MP

I Etude physique des étoiles

I A énergie potentielle d'une étoile sphérique, théorème du viriel

1)

- $\vec{f}_{1 \rightarrow 2} = -G m_1 m_2 \frac{\vec{Q}_1 \vec{Q}_2}{(Q_1 Q_2)^3} = -\frac{G m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_r$
- Par une simple intégration ($\vec{f} = -\vec{\text{grad}} E_p$), on obtient l'énergie potentielle de gravitation :

$$E_p = -\frac{G m_1 m_2}{r}$$

2)

- Principe de réduction de symétrie : par hypothèse, la distribution de masse est symétrique, le champ de gravitation créé par la boule est donc radial et dépend uniquement de la distance r . En appliquant le théorème de Gauss à l'extérieur de la distribution de masse de la boule, on montre aisément que ce dernier est identique à celui que créerait une particule ponctuelle placée au centre de la sphère et affectée de la masse totale de cette dernière.

C'est la classique propriété de réduction de symétrie exploitée pour calculer le champ de gravitation terrestre, par exemple.

- En exploitant la réduction précédente, nous exprimons l'énergie potentielle de la couche de masse dm soumise à la boule de masse $M(r)$:

$$dE_p = -G \frac{M(r) dm}{r}$$

avec dm masse de l'interstice compris entre les sphères r et $r + dr$, soit :

$$dm = \rho d\tau = \rho 4\pi r^2 dr$$

et

$$M(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

Nous obtenons

$$dE_p = -\frac{16}{3} G \pi^2 \rho^2 r^4 dr$$

$$E_p = \int_0^R dE_p = -\frac{16}{3} G \pi^2 \rho^2 \int_0^R r^4 dr = -\frac{16}{15} G \pi^2 \rho^2 R^5 = -\frac{3}{5} \left(\frac{4}{3} \pi \rho R^3 \right)^2 \frac{G}{R}$$

$$E_p = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

Le coefficient α est sans dimension et vaut :

$$\alpha = -\frac{3}{5}$$

3)

- Le gaz de l'étoile est assimilé à un gaz parfait dont la nature et la densité de particule est uniforme. Soit m_H la masse d'un atome d'hydrogène, nous avons :

$$Pv = \frac{P}{\rho} = rT = \frac{\mathcal{R}}{M_H} T = \frac{k_B}{m_H} T \text{ où } v \text{ et } r \text{ sont les grandeurs}$$

massiques

- L'énergie cinétique d'une particule s'exprimera alors sous la forme : $e_c = \frac{3}{2} k_B T = \frac{3}{2} \frac{m_H}{\rho} P = \frac{3}{2n} P$ où n est la densité de particule.

On intègre pour déterminer l'énergie cinétique totale :

$$E_c = \int e_c dN = \int_0^V e_c n d\tau = \int_0^R \frac{3}{2} \frac{P}{\rho} n 4\pi r^2 dr$$

$$E_c = \int_0^R \frac{3}{2} (4\pi) r^2 P(r) dr$$

- Exploitions l'équation de la statique des fluides $\vec{f}_v - \overrightarrow{\text{grad}} P = \vec{0}$, soit $\frac{dP}{dr} = \rho g(r)$,
or $g(r) = -\frac{GM(r)}{r^2} = -\frac{4\pi}{3} G \rho r$ (en utilisant de nouveau le principe de réduction de symétrie).
Nous en déduisons :

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{4\pi}{3} G \rho^2 r$$

$$P(r) = - \int_R^r \frac{4\pi}{3} G \rho^2 r dr = -\frac{1}{2} \frac{4\pi}{3} G \rho^2 [r^2 - R^2]$$

car $P(R) = 0$

- Remplaçons dans l'expression de E_c :

$$E_c = \int_0^R \frac{3}{2} (4\pi) r^2 P(r) dr = - \int_0^R \frac{(4\pi)^2}{4} G \rho^2 r^2 [r^2 - R^2] dr = - \int_0^R \frac{(4\pi)^2}{4} G \rho^2 R^5 \left(\frac{r}{R}\right)^2 \left[\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 1\right] \left(\frac{dr}{R}\right)$$

$$E_c = -\frac{(4\pi)^2}{4} G \rho^2 R^5 I$$

où

$$I = \int_0^1 x^2 (x^2 - 1) dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = -\frac{2}{15}$$

Soit

$$E_c = \frac{2}{15} \frac{(4\pi)^2}{4} G \rho^2 R^5 = \frac{1}{2} * \frac{3}{5} \left(\frac{4\pi}{3} \rho R^3\right)^2 \frac{G}{R} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}\right)$$

Le résultat de la question 2 nous permet de conclure :

$$\boxed{2E_c = -E_p}$$

- Remarque : la méthode précédente n'est probablement pas celle désirée par l'énoncé, il y est fait mention d'une intégration par parties. Je suppose que la démarche attendue était plutôt la suivante :

$$E_c = \int_0^R \frac{3}{2} (4\pi) r^2 P(r) dr = \underbrace{\left[\frac{3}{2} \frac{(4\pi)}{3} r^3 P(r) \right]_0^R - \int_0^R \frac{3}{2} \frac{(4\pi)}{3} r^3 \frac{dP}{dr} dr}_{\text{intégration par partie}} = \int_0^R \frac{3}{2} \frac{(4\pi)}{3} r^3 \rho g(r) dr$$

$$E_c = \int_0^R \frac{3}{2} \left(\frac{4\pi}{3} \rho\right)^2 G r^4 dr = \frac{3}{2} \left(\frac{4\pi}{3} \rho R^3\right)^2 \frac{G}{5R} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}\right) = -\frac{E_p}{2}$$

Nous retrouvons, bien sur le même résultat.

I B Pression et température dans une étoile, réactions de fusion

4)

- Cf. question précédente : $\boxed{P(r) = -\frac{1}{2} * \frac{4\pi}{3} G \rho^2 [r^2 - R^2]}$
- La pression est maximale au cœur de l'étoile.
- Expression de P_{MAX} :

$$P_{\text{Max}} = P(0) = \frac{1}{2} * \frac{4\pi}{3} G \rho^2 R^2 = \frac{3}{4\pi} \frac{GM^2}{2R^4}$$

- Nous avons $P = \rho \frac{k_B}{m_H} T = n k_B T$, or $n = \frac{M}{m_H} \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3}$
d'où

$$T_{\text{Max}} = \frac{m_H}{k_B} \frac{GM}{2R} = \frac{\mathcal{M}_H}{\mathcal{R}} \frac{GM}{2R}$$

- Applications numériques : $P_{\text{Max}} = 1.32 \cdot 10^{14} \text{ Pa}$
et $T_{\text{Max}} = 1.14 \cdot 10^7 \text{ K} = 11 \text{ Millions de Kelvins}$

5)

- Il suffit de rapporter la masse au volume $\rho = \frac{m_H}{\beta^3} = \frac{\mathcal{M}_H}{N \beta^3}$
- On utilise maintenant la masse totale de la sphère-étoile : $R = \left(\frac{3M}{4\pi\rho}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{3MN}{4\pi\mathcal{M}_H}\right)^{\frac{1}{3}} \beta$

- On utilise l'expression de T_{Max} dans laquelle on remplace R , on obtient alors :

$$M = \left(\frac{8\mathcal{R}^3}{\mathcal{M}_H^4 G^3} \frac{3N}{4\pi} \right)^{\frac{1}{2}} (\beta T_{\text{Max}})^{\frac{3}{2}}$$

On identifie K :

$$K = \left(\frac{8\mathcal{R}^3}{\mathcal{M}_H^4 G^3} \frac{3N}{4\pi} \right)^{\frac{1}{2}}$$

- Application numérique :

$$K = 4.71 \cdot 10^{34} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-\frac{3}{2}} \cdot \text{K}^{-\frac{3}{2}}$$

6)

- On exploite la formulation classique de l'électrostatique : $u_{pp} = qV = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0\beta} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\beta}$
- Nous avons $e_c = \frac{3}{2} k_B T_{\text{Max}} = \frac{3}{2} \frac{k_B}{\beta} \left(\frac{M}{K} \right)^{\frac{3}{2}}$
- La masse limite s'obtient pour $e_c = u_{pp}$

soit

$$M_\ell = \left(\frac{2e^2}{3(4\pi)\epsilon_0 k_B} \right)^{\frac{2}{3}} K$$

- Application numérique : $M_\ell = 1.75 \cdot 10^{27} \text{ kg}$

On considère qu'un nuage de matière ne peut s'allumer si sa masse est inférieure à 0.08 Masse solaire. L'astre est alors une naine brune.

La valeur trouvée ici est navrante, si elle est confirmée, il nous faut conclure à l'allumage prochain de Jupiter. Processus qui fut certes évoqué dans des ouvrages de fiction de qualité (Clarke/Kubrick : 2001 l'odyssée de l'espace) mais peu probable par ailleurs.

I C Phénomènes convectifs

7)

- Nous avons pour un gaz parfait :

$$\Delta s = s - s_0 = c_p \ln \frac{T}{T_0} - r_m \ln \frac{P}{P_0} = c_v \left[\gamma \ln \frac{T}{T_0} - (\gamma - 1) \ln \frac{P}{P_0} \right]$$

L'évolution étant supposée isentropique, on retrouve la loi de Laplace.

Soit en différenciant l'expression précédente :

$$\gamma \frac{dT}{T} - (\gamma - 1) \frac{dP}{P} = 0$$

donc

$$\frac{dT}{dr} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{T}{P} \frac{dP}{dr}$$

- Remarque : on pourra s'étonner du caractère factuel de cette question, son apparition est pour le moins singulière et nuit à la cohérence de l'ensemble. Etait ce le début d'une partie censurée par la suite ou un « plus » rajouté en dernière minute ?*

I D Puissance émise et durée de vie du soleil

8)

- Le bilan énergétique est simple : la différence des flux énergétique est du à la création d'énergie au sein de la couche d'épaisseur dr .

$$\Phi(r + dr) - \Phi(r) = 4\pi r^2 dr \rho \varepsilon(r)$$

Soit

$$\frac{d\Phi}{dr} = 4\pi r^2 \rho \varepsilon(r)$$

On intègre

$$\Phi(R_s) = \int_0^{R_s} \frac{d\Phi}{dr} dr = \int_0^{R_s} 4\pi r^2 \rho \varepsilon(r) dr = 4\pi \sigma \rho R_s^3 \int_0^{R_s} \left(\frac{r}{R_s}\right)^2 \left(1 - \frac{r}{R_s}\right) \frac{dr}{R_s} = 4\pi \sigma \rho R_s^3 I$$

où

$$I = \int_0^1 x^2(1-x)dx = \frac{1}{12}$$

Et

$$\Phi(R_s) = \left(\frac{4\pi}{3} \rho R_s^3\right) \frac{\sigma}{4} = \frac{\sigma M_s}{4}$$

- Application numérique : on effectue le ratio

$$\sigma = \frac{4\Phi(R_s)}{M_s} = 0.76 \cdot 10^{-3} \text{ W} \cdot \text{kg}^{-1}$$

Ce résultat démontre que la fusion solaire ne peut être une source d'énergie adéquate pour nos usages. Il faudrait pratiquement 1000 tonnes de matière pour atteindre la puissance d'une plaque chauffante domestique.

9)

- La question est probablement mal formulée vu le « vernis culturel » de nos étudiants. Je l'interprète de la façon suivante : sachant qu'une réaction nucléaire de fusion convertit une partie de la masse des réactifs en pure énergie, la conservation de la masse n'est pas assurée, et la masse des produits s'avère plus faible que celle des réactifs. Calculer ce « défaut de masse » en admettant que l'énergie créée et la masse manquante sont reliées par la relation d'Einstein $E=mc^2$.

- La réaction de fusion consomme la masse : $\Delta m = \frac{E_f}{c^2} = 4.7 \cdot 10^{-29} \text{ kg}$
- Le nombre de réactions de fusion par unité de temps est donné par

$$N_{\text{fusion}} = \frac{\Phi(R_s)}{E_f} = 8.98 \cdot 10^{37} \text{ s}^{-1}$$

- La masse d'hydrogène transformée à chaque seconde est égale à

$$\Delta M_{\text{hydrogène}} = 4 m_H N_{\text{fusion}} = 5.75 \cdot 10^{11} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$$
- D'après l'énoncé le cœur (14% de la masse du soleil) peut transformer 70% de sa masse. La masse disponible est donc égale à : $M_{\text{dispo}} = 0.7 \cdot 0.14 \cdot M_s = 1.96 \cdot 10^{29} \text{ kg}$

On estime la durée de vie par un simple ratio

$$T_{\text{vie}} = \frac{M_{\text{dispo}}}{\Delta M_{\text{hydrogène}}} = 3.4 \cdot 10^{17} \text{ s} = 10.8 \text{ milliards d'années.}$$

Le modèle est simpliste mais donne le résultat attendu grâce à l'utilisation judicieuse des « pourcentages » de transformation.

Pour les angoissés, notons qu'il ne nous reste plus que 5 milliards d'années, notre soleil ayant déjà vécu la moitié de son espérance de vie.

Autre détail, il est communément admis que la matière se trouvant dans notre système solaire résulte au moins de la fin de deux cycles stellaires...

Rien n'est éternel.

II Quelques problèmes d'astrophysique

II A Orientation de la queue d'une comète

10)

- La puissance émise par le soleil se répartit sur une sphère de rayon r , la particule intercepte cette sphère sur une section efficace de valeur $\pi \mu^2$.

$$\delta W = P \frac{\pi \mu^2}{4\pi r^2} dt = \frac{P}{4} \left(\frac{\mu}{r}\right)^2 dt$$

Nous en déduisons :

$$F = \frac{P}{4c} \left(\frac{\mu}{r}\right)^2$$

- La force de gravitation exercée par le soleil vaut en norme :

$$F_{\text{Grav}} = \frac{GM_s}{r^2} \frac{4\pi}{3} \mu^3 \rho_c$$

Elle sera inférieure à F si et seulement si $\mu < \mu_\ell$

$$\text{où } \mu_\ell = \frac{3P}{4GM_sc(4\pi\rho_c)}$$

- Applications numériques $\mu_\ell = 1.9 \cdot 10^{-7} \text{ m} \approx 0.2 \mu\text{m}$

11)

- La queue de fines poussières est due à la pression de radiation provenant du flux lumineux solaire.

C'est la réponse d'évidence, et qui plus est suggérée par l'énoncé qui cède ici à une variation du classique « quelle est la couleur du cheval blanc ... ».

La réalité est bien sur plus complexe, on distingue plusieurs queues qui dépendent de la nature du matériau cométaire et de son interaction avec l'astre solaire (ions, gaz, solides etc..)

II B Mesure de la distance d'un pulsar par la méthode de dispersion

12)

- Le jet émis par le pulsar est directionnel, si par chance il est reçu par la terre, elle n'est dans son faisceau que quelques instants. De façon analogue aux phares guidant les navires, le pulsar n'éclairera notre planète qu'une fois par rotation. Nous ne recevons donc qu'une impulsion. La fréquence de ces impulsions est la fréquence de rotation du pulsar.

13)

- Nombre d'hypothèses sont ici manquantes, on alléguera probablement du caractère de question de cours de cette partie, pour justifier certains oublis de l'énoncé.
- Le principe fondamental de la dynamique s'écrit, si on suppose que la particule n'est le siège que d'une interaction électromagnétique:

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = q (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

- Dans le vide, le champ d'induction magnétique B a pour ordre de grandeur E/c , la composante magnétique de Lorentz a un poids par rapport à E égal à v/c . Si la vitesse des électrons est non relativiste, on négligera cette contribution magnétique.

Hypothèse valide pour la plupart des nuages interstellaires, plus douteuse pour les cônes d'émission du pulsar. On écrira donc

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E}$$

- On recherche maintenant l'équation de dispersion du plasma. Afin de résoudre simplement le problème il nous faut faire l'hypothèse d'une onde électromagnétique de grande longueur d'onde par rapport à l'excursion de l'électron, de façon à écrire localement $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t}$.

Dans ce cas l'équation différentielle est linéaire et peut être résolu aisément dans le champ complexe

$$\vec{v} = \frac{q}{m_e p} \vec{E} \quad \text{où } p = i\omega$$

On néglige dans le courant de charges, le courant ionique en raison du différentiel de masse ion/électrons. Le vecteur densité de courant s'écrit :

$$\vec{j} = \rho \vec{v} = Nq \frac{q}{m_e p} \vec{E} = \frac{Nq^2}{m_e p} \vec{E} = \frac{Nq^2}{m_e p^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{Ne^2}{m_e \omega^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

On exploite l'équation de Maxwell-Ampère et on suppose qu'à l'exception de ce courant, le plasma a les mêmes propriétés que le vide :

$$\vec{\text{Rot}} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

On passe en complexe et on exploite la linéarité des champs, on retrouve :

$$\vec{\text{Rot}} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \left(1 - \frac{Ne^2}{m_e \epsilon_0 \omega^2}\right) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\text{Rot}} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

L'équation est analogue à celle du vide si on exploite comme permittivité relative le terme entre parenthèses. On en déduit l'équation de dispersion du plasma.

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$$

14)

- On différencie l'expression précédente $k dk = \frac{\omega d\omega}{c^2}$, nous obtenons alors :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{kc^2}{\omega} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

Soit pour $\omega_p \ll \omega$

$$v_g \simeq c \left(1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2}\right)$$

On retrouve bien sur $v_g < c$, alors que la vitesse de phase aurait été supérieure à c dans ce milieu (ici $v_g v_\phi = c^2$)

15)

- L'écart de fréquence nous interdit une approche différentielle.

Nous avons pour un signal de fréquence f :

$$t = d/v_g \simeq d/c \left(1 + \frac{\omega_p^2}{8\pi^2 f^2}\right)$$

Soit l'écart

$$\delta t \simeq \frac{d\omega_p^2}{8\pi^2 c} \frac{f_2^2 - f_1^2}{f_2^2 f_1^2}$$

Et

$$d \simeq \frac{8\pi^2 c}{\omega_p^2} \frac{f_2^2 f_1^2}{f_2^2 - f_1^2} \delta t$$

16)

- Applications numériques :

$$f_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Ne^2}{m_e \epsilon_0}} = 902 \text{ Hz}$$

$$d \simeq \frac{8\pi^2 c}{\omega_p^2} \frac{f_2^2 f_1^2}{f_2^2 - f_1^2} \delta t = 316 \text{ al}$$

Les ordres de grandeurs sont un peu faibles pour les Pulsars, typiquement le Pulsar du crabe se trouve à 2.5 kiloparsec soit environ 8000 al.

II C La planète Osiris

17)

- C'est la méthode d'occultation ou méthode des transits. Pour qu'elle fonctionne, le plan équatorial de l'étoile doit comprendre la terre, la ou les planètes extra-solaires interceptent régulièrement le flux lumineux que l'étoile émet en direction de la terre. Cette occultation justifie la baisse du flux lumineux, elle n'est « efficace » que pour des planètes proches et massives situés près de l'astre principal.

- On suppose que le disque de lumière de l'astre émet uniformément, la planète intercepte le flux sur son disque propre, la diminution d'intensité est donc un simple rapport de surface.

$$\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 = \alpha = 1.7\% \quad \text{donc } R_2 = R_1 \sqrt{\alpha} = 10^8 m = 1.43 R_J$$

Osiris appartient donc à la classe des planètes géantes, comme nous n'avons pas à ce stade d'estimation de sa masse, il ne nous est pas possible de conclure sur ses similitudes avec Jupiter. La méthode des vitesses radiales (cf ci-après) va nous permettre de lever cette indétermination.

18)

- Annulation de l'excentricité : problème à deux corps, les solutions sont des coniques, avec une excentricité nulle, la trajectoire est circulaire. L'étoile et la planète tourne de façon circulaire autour du barycentre du système, et leur mouvement relatif est, bien sur, aussi circulaire.

La planète Osiris décrit un cercle autour de HD 209458, et il en va de même pour HD 209458 qui décrit un cercle autour d'Osiris (cf. Giordano Bruno).

- Erreur d'énoncé : la vitesse mesurée par Doppler-Fizeau est la vitesse de l'étoile (source de la lumière) et non celle du barycentre.
- Définition manquante : La définition de la vitesse orbitale n'est pas fournie. C'est la vitesse du mobile dans le référentiel barycentrique.
- Par rapport à la terre, l'étoile a un mouvement composé d'une translation (translation du barycentre du système) et d'une rotation (rotation de l'étoile par rapport au barycentre).

La vitesse moyenne nous donne la vitesse de translation $v_t = \frac{v_{r-} - v_{r+}}{2} = 14.77 \text{ km.s}^{-1}$

Les extrema de vitesse correspondent aux situations d'ajout et de retrait de la vitesse orbitale à la vitesse de translation. On en déduit $\Delta v_t = v_{r+} - v_{r-} = 2 v_{orb}$

$$v_1 = v_{orb} = 0.085 \text{ km.s}^{-1} \approx 9 \cdot 10^1 \text{ m.s}^{-1}$$

Attention à la précision des calculs, ici normalement seul le premier chiffre est significatif.

19)

- Le référentiel est galiléen, vu les définitions des vitesses orbitales nous avons : $m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \vec{0}$ soit en norme $v_2 = \frac{m_1}{m_2} v_1$
- Vu le différentiel de masse, il serait normalement possible de travailler en considérant l'astre stellaire comme confondu avec son barycentre et la planète (mobile 2) comme tournant autour de ce dernier. On évitera de procéder ainsi car la démarche repose sur la connaissance de la vitesse orbitale de l'étoile.

On introduit donc les éléments du système réduit d'Osiris et de HD 209458.

$$\text{masse réduite } \mu = \frac{m_2 m_1}{m_1 + m_2} \approx m_2$$

La relation fondamentale de la dynamique s'écrit projetée sur la radiale $\mu \frac{v^2}{r} = \mu \frac{4\pi^2}{T^2} r = \frac{G m_2 m_1}{r^2}$

$$\text{On retrouve la loi de Kepler } \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} \approx \frac{4\pi^2}{G m_1}$$

Nous avons par ailleurs $r_1 = \frac{\mu}{m_1} r \approx \frac{m_2}{m_1} r$ et $r_1 = \frac{v_1 T}{2\pi}$ (mouvement circulaire).

En remplaçant dans Kepler, nous obtenons la loi recherchée :

$$m_2 \approx v_1^3 \sqrt{\frac{m_1^2 T}{2\pi G}}$$

- Application numérique : $m_2 \approx v_1^3 \sqrt{\frac{m_1^2 T}{2\pi G}} \approx 1.3 \cdot 10^{27} \text{ kg} \approx 0.7 M_J$
(vu la précision sur v_1 nous ne disposons que d'un chiffre significatif)
La planète est du type géante gazeuse.
C'est une configuration proche des géantes de notre système..

FSN