

Correction – Physique II – MP – Mines-Ponts 2010

574,8 kilomètres par heure

L'énoncé demande d'écrire les résultats numériques avec 3 chiffres significatifs. Demande surprenant alors que certaines données n'en comportent que 2.

I – Trajet en ligne droite

I.1 – En notant i le numéro de la mesure, on choisit de calculer l'accélération comme suit afin de disposer

de « l'accélération moyenne initiale » :
$$a_i = \frac{V_{i+1} - V_i}{t_{i+1} - t_i}$$

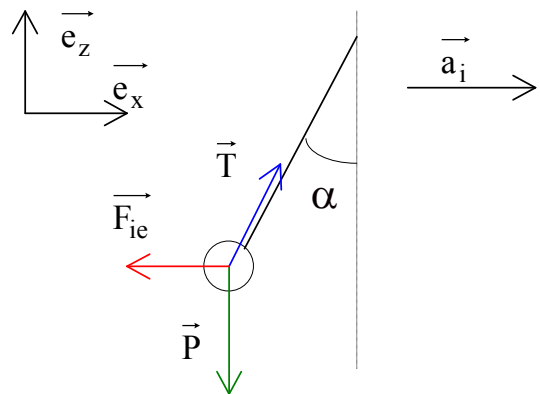
En supposant l'accélération a_i uniforme sur chaque intervalle de temps $[t_i, t_{i+1}]$, et la rame ayant pour l'instant une trajectoire rectiligne ($x'Ox$), on intègre la relation de définition $\ddot{x} = a_i$ sur chaque intervalle

de temps, soit
$$d_{i+1} = \frac{1}{2} \cdot a_i \cdot (t_{i+1}^2 - t_i^2)$$

mesure n°	1	2	3	4	5	6	7	8	d totale
t (s)	0	70	95	124	155	231	263	332	
V (km/h)	0	150	200	250	300	350	400	450	
V (m/s)	0	41.7	55.6	69.4	83.3	97.2	111.1	125	
a (m/s²)	0.595	0.556	0.479	0.448	0.183	0.434	0.201	0.201 *	
d (m)	0	1458	1146	1521	1938	2681	3431	4132	16306

(*) : $a_8 = a_7$ par choix arbitraire pour disposer d'une valeur à la question I.5.

Distance totale parcourue :
$$d = \sum_{i=1}^7 d_{i+1} = 16,3 \text{ km}$$



I.2 – A l'équilibre relatif dans le référentiel non galiléen lié au train, les forces appliquées au pendule de masse m sont :

* Poids : $\vec{P} = m \cdot \vec{g} = -m \cdot g \cdot \vec{e}_z$

* Tension du fil : $\vec{T} = T \cdot (\cos \alpha \cdot \vec{e}_z + \sin \alpha \cdot \vec{e}_x)$

* Force d'inertie d'entraînement : $\vec{F}_{ie} = -m \cdot \vec{a}_i$

La 2^{ème} loi de Newton y donne : $\vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_{ie} = \vec{0}$

soit en projection dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$:
$$\begin{cases} -m \cdot a_i + T \cdot \sin \alpha = 0 \\ 0 \\ -m \cdot g + T \cdot \cos \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{a_i}{g}$$

Application numérique : L'accélération maximale de la rame donnera donc l'angle maximal d'inclinaison

du pendule. Elle a lieu au démarrage : $\tan \alpha_{\max} = \frac{a_1}{g} = 5,95 \cdot 10^{-2} \Rightarrow \alpha_{\max} = 5,94 \cdot 10^{-2} \text{ rad} = 3,4^\circ$.

Remarque : On pourrait corriger la phrase du journaliste en disant que la pendule met en évidence l'accélération du train. Cette expérience est une expérience mettant en évidence la contre-apposée du principe de Galilée que l'on pourrait formuler ainsi : « Il est possible par une expérience de mécanique de mettre en évidence le caractère non-galiléen d'un référentiel ».

I.3 – En vue d'appliquer le théorème du centre d'inertie (ou **théorème de la résultante cinétique T.R.C.**) à une jante dans le **référentiel terrestre supposé galiléen**, on répertorie les **forces extérieures** appliquées à la jante :

* Poids du train sur une des 32 jantes : $\vec{P} = \frac{M_T}{32} \cdot \vec{g}$

* Réaction tangentielle du rail sur la jante : $\vec{T} = T \cdot \vec{e}_x$

C'est la **force de traction** demandée

* Réaction normale du rail sur la jante : $\vec{N} = N \cdot \vec{e}_z$

Le T.R.C. appliqué à une jante donne : $\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = \frac{M_T}{32} \cdot \vec{a}_i$

soit en projection selon dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$:

$$\begin{cases} T = \frac{M_T}{32} \cdot a_i \\ 0 \\ -\frac{M_T}{32} \cdot g + N = 0 \end{cases}$$

Application numérique : au démarrage $T = \frac{M_T}{32} \cdot a_1 = 5,02 \text{ kN}$

Tant qu'il n'y a **pas glissement**, la **loi de Coulomb** affirme que : $\frac{|T|}{|N|} < \mu \rightarrow \frac{a_1}{g} < \mu$

$\frac{a_1}{g} = 5,95 \cdot 10^{-2}$ et $\mu(V=0) = 0,331$.

L'inégalité est bien vérifiée donc il n'y a **pas de glissement au démarrage**.

I.4 – Considérons la vitesse record atteinte et constante. Le théorème de la puissance cinétique appliqué

au train donne : $P_{\text{motrice}} + P_{\text{résistance}} = \frac{dE_c}{dt} = 0 \rightarrow |P_{\text{motrice}}| = |P_{\text{résistance}}|$

$P_{\text{résistance}} = -R \cdot V$ où V est en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ alors que dans l'expression de R elle s'exprime en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ compte tenu des unités de B et C.

Application numérique : à $V = 540 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 150 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $|P_{\text{résistance}}| = 26,4 \text{ MW} > |P_{\text{motrice}}|$ donc la motorisation standard de la rame ne permet pas d'atteindre la vitesse du record.

La puissance délivrée par les moteurs rotatifs est directement proportionnelle à leur vitesse de rotation. Si l'on augmente le rayon des roues, pour une même vitesse du train, les roues tourneront moins vite et les moteurs aussi. Cela aura pour but d'approcher la vitesse record sans changer la motorisation.

I.5 – On ajoute au bilan de forces de la question **I.3** adapté à l'ensemble du train la résistance $\vec{R}$. La projection du T.R.C. sur l'axe horizontal amène :

$32 \cdot T - R = M_T \cdot a_i \rightarrow T = \frac{M_T \cdot a_i + R}{32}$

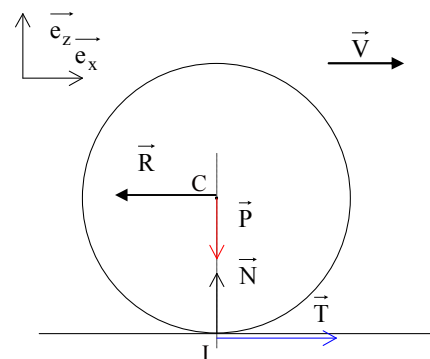
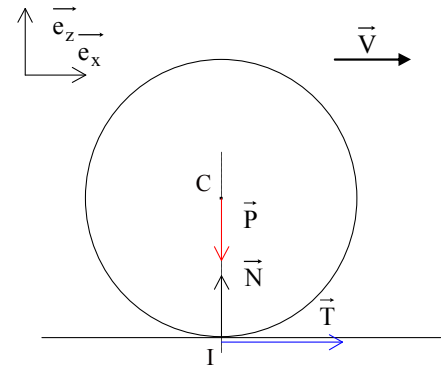
Application numérique : à $450 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, $a_i = a_8$

où on a supposé que $a_8 = a_7$ ne disposant pas de 9^{ème} mesure.

$R(450) = 85,7 \text{ kN} \rightarrow T = 4,37 \text{ kN}$

Procédons comme au **I.3** pour évaluer le risque de patinage à $450 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. $\mu(450) = 0,176$

$\frac{|T|}{|N|} = \frac{|T|}{M_T \cdot g / 32} = \frac{4,37}{84,4} = 5,18 \cdot 10^{-2} < \mu(450)$. Là encore, **le train ne patine pas**.

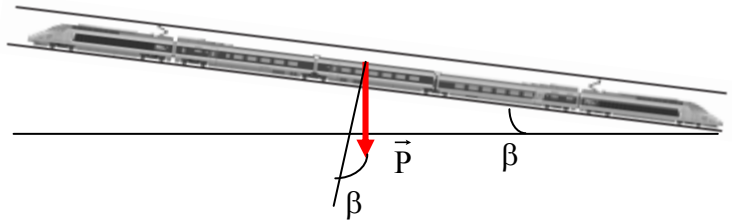


I.6 – La puissance motrice est inférieure à la puissance résistante à 540 km.h^{-1} . Elle le sera a fortiori à $574,8 \text{ km.h}^{-1} = 160 \text{ m.s}^{-1}$: $R(574,8) = 135 \text{ kN} \rightarrow P_{\text{résistance}} = -21,6 \text{ MW}$.

Il faut une autre source de puissance motrice, comme celle du poids.

$$P_{\text{poids}} = M_T \cdot g \cdot V \cdot \sin \beta$$

Considérons le record atteint à la limite, c'est-à-dire comme au **I.4** que la bilan de puissance permet juste de maintenir la vitesse constante.



Le **théorème de la puissance cinétique** amène : $P_{\text{motrice}} + P_{\text{résistance}} + P_{\text{poids}} = \frac{dE_c}{dt} = 0$

$$\rightarrow \sin \beta = -\frac{P_{\text{résistance}} + P_{\text{motrice}}}{M_T \cdot g \cdot V}$$

Application numérique : $\sin \beta = 4,63 \cdot 10^{-3} \rightarrow \beta = 4,63 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = 0,265^\circ$

I.7 – On peut regretter ici l'absence de données sur les jantes, pour prendre en compte l'énergie cinétique de leur rotation.

On calcule l'énergie cinétique de translation de la rame réduite à son centre d'inertie : $E_c = \frac{1}{2} \cdot M_T \cdot V_0^2$

Application numérique : $E_c = 2,67 \text{ GJ}$

Notons γ la décélération moyenne : $\ddot{x} = -\gamma$

$\rightarrow V(t) = -\gamma \cdot t + V_0$ en considérant que le freinage débute à $t = 0$.

$\rightarrow x(t) = -\frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot t^2 + V_0 \cdot t$ en plaçant l'origine des abscisses en début de freinage.

$$t_{\text{arrêt}} = \frac{V_0}{\gamma} \rightarrow d_{\text{arrêt}} = \frac{V_0^2}{2 \cdot \gamma} \quad \text{d'où} \quad \gamma = \frac{V_0^2}{2 \cdot d_{\text{arrêt}}}$$

Application numérique : $\gamma = 0,658 \text{ m.s}^{-2}$; $t_{\text{arrêt}} = 213 \text{ s} = 3 \text{ min } 33 \text{ s}$

I.8 – Le théorème de la puissance cinétique appliqué à la rame lors du début de la marche sur l'erre

donne : $P_{\text{résistance}} = \frac{dE_c}{dt} \rightarrow -R(V_0) \cdot V_0 = M_T \cdot V_0 \cdot \frac{dV}{dt}$

Notons δ_0 la décélération initiale sur l'erre : $\delta_0 = -\frac{dV}{dt} = \frac{R(V_0)}{M_T}$

$$P_{\text{résistance}} = \frac{dE_c}{dt} \rightarrow -C \cdot V^2 \cdot V = \frac{1}{2} \cdot M_T \cdot \frac{dV^2}{dt} \rightarrow \frac{dV}{V^2} = -\frac{C}{M_T} \cdot dt \rightarrow \frac{1}{V(t)} - \frac{1}{V_0} = \frac{C}{M_T} \cdot t$$

$$\rightarrow \frac{dx}{dt} = V(t) = \frac{V_0}{1 + t/\tau} \rightarrow x(t) = V_0 \cdot \tau \cdot \ln\left(1 + \frac{t}{\tau}\right)$$

Soit $V_1 = 400 \text{ km.h}^{-1}$ vitesse de fin de marche sur l'erre atteinte à l'instant t_1 : $t_1 = \tau \cdot \left(\frac{V_0}{V_1} - 1\right)$

Application numérique : $R(V_0) = 104 \text{ kN}$; $\delta_0 = 0,386 \text{ m.s}^{-2}$; $\tau = 5,25 \cdot 10^3 \text{ s}$; $t_1 = \tau/4$; $x(t_1) = 163 \text{ km}$

I.9 – On ajoute au bilan de puissance précédent la puissance mécanique perdue par effet Joule du courant induit dans les moteurs.

$$P_{\text{Joule}} + P_{\text{résistance}} = \frac{dE_c}{dt} \rightarrow P_{\text{Joule}} + P_{\text{résistance}} = M_T \cdot V \cdot \frac{dV}{dt}$$

Notons δ_1 la décélération correspondante : $\delta_1 = -\frac{dV}{dt} = -\frac{P_{\text{Joule}} + P_{\text{résistance}}}{M_T \cdot V_1}$

Application numérique : à V_1 , $P_{\text{résistance}} = -6,58 \text{ MW}$, $P_{\text{Joule}} = -4 \times 900 = -3,60 \text{ MW}$ d'où $\delta_j = 0,339 \text{ m.s}^{-2}$.

Remarque : La décélération lors de la deuxième phase est moins efficace que lors de la marche sur l'erre. Il faut la comparer à la décélération sur l'erre à 400 km.h^{-1} : $\delta(400) = 0,255 \text{ m.s}^{-2}$.

II – Comportement en virage

II.10 – Notons $\ell_p = 130 \text{ m}$ la longueur du raccordement parabolique. La durée du parcours de ce raccordement par le train vaut alors : $t_2 = \frac{\ell_p}{V}$

Application numérique : $t_2 = 0,867 \text{ s}$

Lors de début de virage à gauche, la courbure de la voie occasionne une accélération centripète (à gauche) et donc une force d'inertie centrifuge ressentie par les passagers (à droite).

Le tronçon parabolique permet de modifier continuellement le rayon de courbure de la voie de 0 (environ) à χ . La force d'inertie d'entraînement (force centrifuge) subie par un passager lors du virage circulaire parcouru à vitesse constante V s'écrit : $|f_{ie}| = m_p \cdot |a_e| = m_p \cdot \frac{V^2}{\chi}$. Sur le tronçon rectiligne (de rayon de

courbure nulle) parcouru à vitesse constante, la force d'inertie d'entraînement est nulle.

Application numérique : $|f_{ie}|_{\min} = 0$; $|f_{ie}|_{\max} = 101 \text{ N}$

Ce qui représente environ le poids d'une masse de 10 kg .

II.11 – Compte tenu de la durée de parcours du tronçon parabolique par rapport à ce qu'un passager peut ressentir, on assimile ici la dérivée instantanée de l'accélération à sa valeur moyenne.

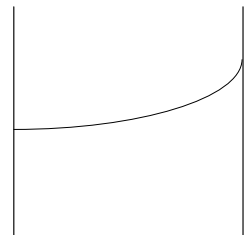
Ainsi
$$\text{jerk} = \frac{|a_e|_{\max} - |a_e|_{\min}}{t_2} = \frac{V^2}{\chi \cdot t_2}$$

Application numérique : $\text{jerk} = 1,56 \text{ m.s}^{-3}$ valeur inférieure à la norme de confort.

On comprend mieux ici le rôle de ce tronçon parabolique sur le confort des passagers qui supportent mal les secousses latérales. Les efforts sur les structures de la rame en seront aussi atténués.

II.12 – Lors du virage à gauche, la surface libre de l'eau dans le verre prendrait une courbure décelable par une dénivellation. La surface d'eau du côté extérieur au virage est plus élevée sous l'effet de la force centrifuge.

Si l'accélération d'entraînement est suffisamment importante, elle peut entraîner le glissement du verre sur la tablette et sa chute.



II.13 – La force centrifuge appliquée au train est horizontale radiale. Elle exerce donc un moment notamment par rapport au point de contact de chaque roue avec le rail extérieur. La roue intérieure au virage décolle lorsque l'action de contact normale devient nulle.

Bilan des forces extérieures appliquées au train réduit à un essieu porteur :

* Poids : $\vec{P} = M_T \cdot \vec{g} = -M_T \cdot g \cdot \vec{u}_z$ appliqué en G.

* Actions de contact des rails sur les roues : $\vec{N}_1 = N_1 \cdot \vec{u}_z$; $\vec{T}_1 = T_1 \cdot \vec{u}_\theta$ appliquées en I_1
 $\vec{N}_2 = N_2 \cdot \vec{u}_z$; $\vec{T}_2 = T_2 \cdot \vec{u}_\theta$ appliquées en I_2

* Force d'inertie d'entraînement : $\vec{f}_{ie} = -M_T \cdot \vec{a}_e = M_T \cdot \frac{V^2}{\chi} \cdot \vec{u}_r$ appliquée en G.

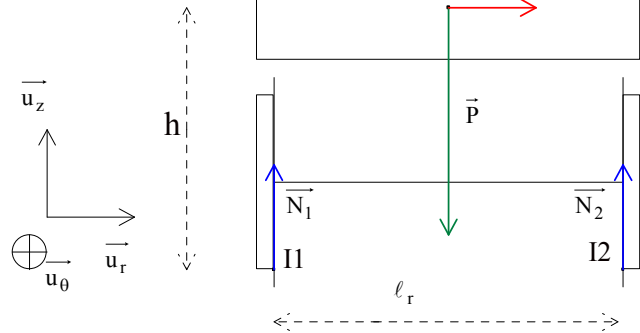
Appliquons dans le référentiel du train le **théorème du moment cinétique** en ce point de contact I₂ :

$$\frac{d\vec{L}_{I_2}}{dt} = \vec{I}_2 \cdot \vec{I}_1 \wedge (\vec{T}_1 + \vec{N}_1) + \vec{I}_2 \cdot \vec{G} \wedge (\vec{P} + \vec{f}_{ie})$$

En régime permanent, ce bilan de moments est nul.

En projection selon $\vec{u}_\theta$ on obtient la relation :

$$\ell_r \cdot N_1 - h \cdot M_T \cdot a_e + (\ell_r/2) \cdot M_T \cdot g = 0$$



Lorsque le contact en I₁ est rompu (i.e. $N_1 = 0$) on obtient : $a_e = \frac{\ell_r}{2h} \cdot g \rightarrow V = \sqrt{\frac{\ell_r \cdot \chi}{2h} \cdot g}$

Application numérique : $V = 219 \text{ m.s}^{-1} = 787 \text{ km.h}^{-1}$, vitesse encore hors de portée sur rails.

II.14 – Le dévers permet d'aligner le **poids apparent** du passager (poids+force centrifuge) avec sa colonne vertébrale de direction perpendiculaire au sol du wagon et diminuer le jerk.

$$\vec{a}_e = -\frac{V^2}{\chi} \cdot \vec{u}_r$$

Application numérique : $a_e = 1,35 \text{ m.s}^{-2}$ à 540 km.h^{-1}

Le pendule a la direction du poids apparent et fait alors un angle

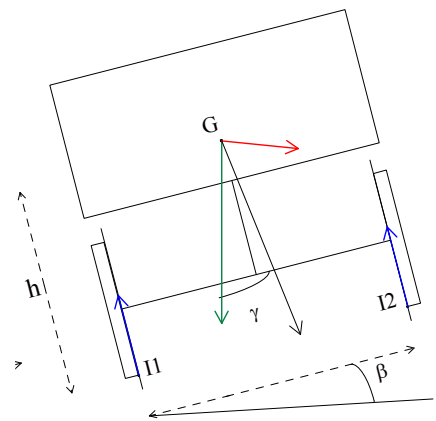
$$|\gamma - \beta|$$

$$\tan \beta = \frac{\delta}{\ell_r} ; \tan \gamma = \frac{a_e}{g}$$

Application numérique : $\tan \beta = 0,0906 \rightarrow \beta = 5,18^\circ$;

$\tan \gamma = 0,135 \rightarrow \gamma = 7,69^\circ$

d'où $|\gamma - \beta| = 2,51^\circ$



III. - Alimentation électrique

□ **15** - La résistance totale de la caténaire entre deux sous-stations est donnée par :

$$R = \frac{\rho d}{s} = 7.0 \, \Omega$$

La résistance linéique s'en déduit directement :

$$\lambda = \frac{R}{d} = \frac{\rho}{s} = 1.17 \times 10^{-1} \, \Omega.km^{-1}$$

La résistance de la ligne est très faible, et on s'attend donc à ce que la puissance dissipée par effet Joule dans la ligne soit relativement faible.

La différence de phase entre deux sous-stations de l'onde se propageant dans la caténaire s'écrit, sachant qu'une onde électrique dans un conducteur se propage à une vitesse c proche de la vitesse de la lumière dans le vide :

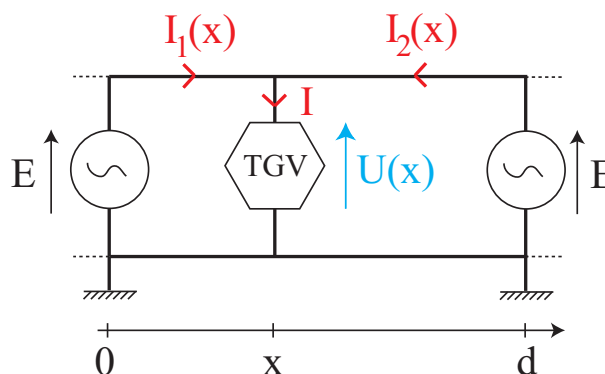
$$\Delta\varphi = \frac{2\pi d}{\lambda} = \frac{2\pi\nu d}{c} = 6.2 \times 10^{-2} rad \ll 2\pi$$

On pourra donc négliger les différences de phase et les retards dus à la propagation des ondes dans les câbles. Cette approximation correspond à l'ARQS (Approximation des Régimes Quasi Stationnaires). Par la suite, on pourra donc en particulier considérer que l'intensité parcourant la caténaire est identique en tout point de celle-ci (loi des branches). On pourra également appliquer la loi des nœuds comme en régime permanent.

□ **16** - La loi des nœuds exprimée au niveau du pantographe s'écrit :

$$I = I_1(x) + I_2(x) \quad (1)$$

où $I = 600A$ est le courant circulant dans les moteurs, et où $I_1(x)$ et $I_2(x)$ sont les courants orientés comme dans la figure ci-dessous.



De plus, en appliquant la loi des mailles sur la grande maille comprenant les deux sous-stations, on obtient, en notant respectivement $R_1(x)$ et $R_2(x)$ les résistances des caténaires séparant le TGV des stations SS_1 et SS_2 :

$$E - R_1(x)I_1(x) + R_2(x)I_2(x) - E = 0 \quad \text{d'où} \quad R_1(x)I_1(x) = R_2(x)I_2(x)$$

$$\text{et donc} \quad xI_1(x) = (d-x)I_2(x) \quad (2)$$

En résolvant le système constitué des équations (1) et (2), on obtient deux relations linéaires en x :

$$\begin{cases} I_1(x) = I \left[1 - \frac{x}{d} \right] \\ I_2(x) = I \frac{x}{d} \end{cases}$$

On vérifie bien que lorsque le TGV est placé au niveau de la sous-station SS_1 , l'intégralité du courant provient de la source SS_1 , puisque $I_1(0) = I$ et $I_2(0) = 0$.

L'application de la loi des mailles entre la sous-stations SS_1 et le TGV s'écrit :

$$E = R_1(x)I_1(x) + U(x)$$

avec les notations utilisées dans la figure précédente. On en déduit donc :

$$U(x) = E - \frac{\rho x}{s} \left(1 - \frac{x}{d} \right) I$$

Là encore, on vérifie bien que lorsque le TGV se trouve au niveau d'une sous-station, la tension aux bornes des moteurs vaut $U(0) = U(d) = E$.

La puissance dissipée par effet Joule dans la caténaire, lorsque le TGV est situé à l'abscisse x , vaut donc :

$$\mathcal{P}(x) = R_1(x)I_1^2(x) + R_2(x)I_2^2(x) = \frac{\rho x}{sd}(d-x)I^2$$

On peut remarquer que lorsque le TGV est au niveau de la sous-station SS_1 , $\mathcal{P}(0) = 0$ car la seule partie de caténaire parcourue par un courant non nul ($I_1(0) = I$) est de résistance nulle ($R_1(0) = 0$). Il est donc raisonnable de trouver une puissance qui dépende de la position x du TGV.

□ **17** - D'après la question précédente, la position x_m de la motrice qui correspond à un minimum de la tension d'alimentation $U(x)$ des moteurs est donnée telle que :

$$\left. \frac{dU}{dx} \right|_{x=x_m} = 0 \quad \text{soit} \quad x_m = \frac{d}{2}$$

$$U(x_m) = E - \frac{\rho d}{4s} I = E - \frac{RI}{4} < E$$

La tension aux bornes de la motrice est donc bien minimale en $x = x_m$.

La puissance maximale dissipée dans la caténaire est obtenue pour x_p défini par :

$$\left. \frac{d\mathcal{P}}{dx} \right|_{x=x_p} = 0 \quad \text{soit} \quad x_p = x_m = \frac{d}{2}$$

La position du TGV qui minimise la tension aux bornes des motrices correspond donc exactement à la puissance maximale dissipée dans la caténaire.

Lorsque le TGV est situé au milieu des deux sous-stations :

$$U_{min} = E - \frac{RI}{4} = 23950V \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_{max} = \frac{RI^2}{4} = 630kW$$

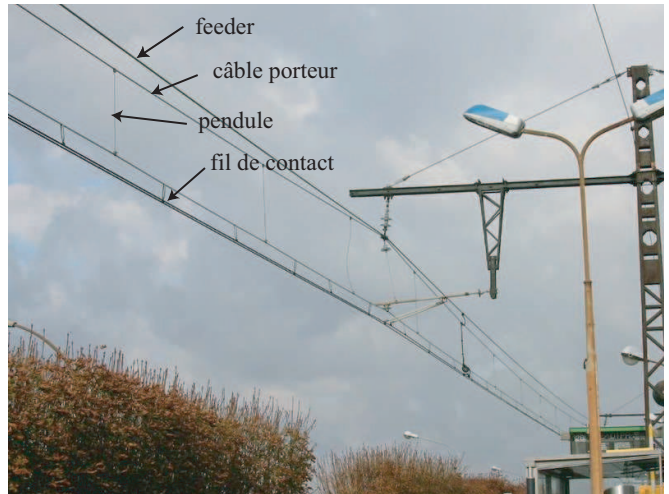
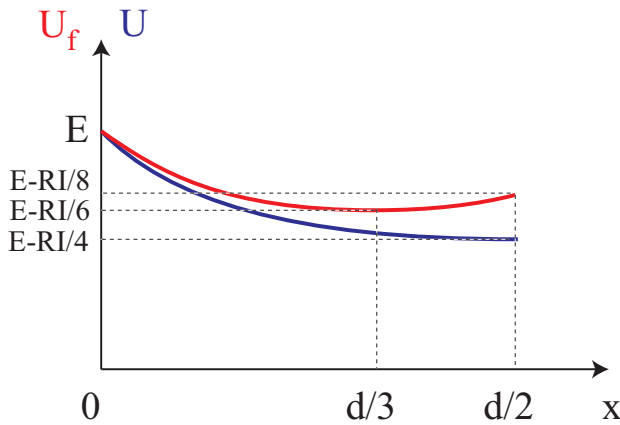
On comprend ici l'importance d'utiliser des sous-stations espacées le moins possible, afin de limiter la chute de tension au niveau des motrices, mais aussi de limiter les pertes par effet Joule dans la caténaire (ces deux effets interviennent par l'intermédiaire de la distance d à travers l'expression de la résistance totale de la ligne R).

□ **18** - En présence d'un *feeder*, on obtient :

$$U_f(d/2) = E - \frac{RI}{8}$$

Sa valeur minimale se détermine simplement, et on obtient : $U_{f,min} \left(x_f = \frac{d}{3} \right) = E - \frac{RI}{6}$.

On a représenté les fonctions U et U_f dans la figure ci-dessous. L'intérêt d'utiliser un *feeder*



est donc de diminuer la chute de tension au niveau des motrices lors du déplacement du TGV entre deux sous-stations. C'est bien ce qui est utilisé en pratique comme en atteste la photo de la figure précédente, notamment pour alimenter les TGV.

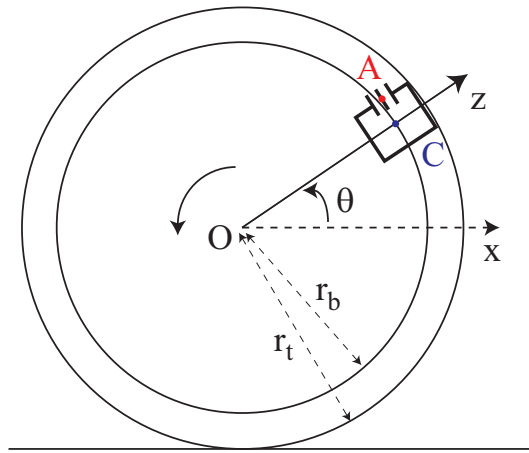
IV. - Instrumentation lors des essais

□ **19** - Afin d'établir l'équation différentielle vérifiée par z , appliquons le principe fondamental de la dynamique à la masse sismique A dans le référentiel du capteur.

Puisque le capteur est fixé à une roue du TGV, loin de son axe, il décrit un mouvement de rotation autour de l'axe de la roue. Lorsque le TGV roule à vitesse constante, le référentiel lié au TGV est galiléen, et le mouvement du capteur est un mouvement de rotation uniforme par rapport à ce dernier référentiel.

Le référentiel du capteur C est donc **non galiléen**, et il faut tenir compte de l'existence de forces d'inertie. Le bilan des forces s'écrit donc, en projection sur l'axe z (qui correspond en fait à l'axe (OC) de la figure ci-dessous) :

- ▷ le poids : $P_z = -mg \sin \theta$, où θ est l'angle que fait l'axe z porté par le capteur avec l'horizontale (voir figure ci-dessous)
- ▷ la réaction du support liant la masse au condensateur : $R_z = 0$. Cette force a une composante nulle sur l'axe z .
- ▷ la force de rappel du ressort : $F_z = -kz$, où z est l'allongement du ressort par rapport à sa position d'équilibre
- ▷ la force de frottement visqueux : $F'_z = -f\dot{z}$.
- ▷ la force d'inertie d'entraînement : $F_{ie,z} = -ma_B$, où a_B est la composante de l'accélération du boîtier selon (Oz) .
- ▷ la force d'inertie de Coriolis : $F_{ic,z} = 0$. La force d'inertie de Coriolis n'est pas nulle puisque la masse se déplace dans le référentiel non galiléen du capteur ; cependant celle-ci est orthogonale à l'axe z à tout instant puisque la masse est contrainte à se déplacer suivant l'axe z .



L'application du principe fondamental de la dynamique appliqué à la masse sismique A dans le référentiel du capteur C conduit, en projection sur l'axe z à :

$$m\ddot{z} = -f\dot{z} - kz - mg \sin \theta - ma_B$$

En divisant cette équation par m , on fait apparaître l'équation différentielle précédente sous sa forme canonique, où ω_0 correspond à la pulsation caractéristique et ξ au coefficient d'amortissement :

$$\boxed{\ddot{z} + 2\omega_0\xi\dot{z} + \omega_0^2z = -g \sin \theta - a_B} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 240 \text{ rad.s}^{-1} \quad \text{et} \quad \xi = \frac{f}{2m\omega_0} = 4.8 \times 10^{-3}$$

On obtient ainsi l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique amorti en régime forcé puisque le second membre dépend du temps.

□ **20** - Lors d'un déplacement à vitesse constante du train, le capteur a un mouvement circulaire uniforme de rayon r_b par rapport au référentiel terrestre, et son accélération par rapport au sol vaut donc :

$$\vec{a}_{B_0} = -r_b \dot{\theta}^2 \vec{u}_z$$

Sachant que le roulement s'effectue sans glissement, le déplacement horizontal du train, repéré par la variable x sur le schéma précédent, est relié à l'angle θ par la relation :

$$x = -r_t \theta$$

Par dérivation, on peut également en déduire la relation liant la vitesse horizontale du train à la vitesse angulaire de rotation des roues :

$$V = -r_t \dot{\theta}$$

On en déduit donc :
$$a_{B_0} = -r_b \frac{V^2}{r_t^2} = -41 \times 10^3 \text{ m.s}^{-2}$$

Il n'est pas surprenant de trouver ici une valeur d'accélération centripète très importante par rapport à l'accélération de la pesanteur ($g \simeq 10 \text{ m.s}^{-2}$), étant donnée la vitesse de rotation des roues du train à pleine vitesse.

□ **21** - En présence d'un défaut de surface sur la roue, l'accélération du boîtier est légèrement modifiée à chaque tour, c'est à dire à la pulsation $\omega = \dot{\theta} = \frac{V}{r_t} \simeq 275 \text{ rad.s}^{-1}$. Cette perturbation, dont l'amplitude dépend de la déformation de la jante, modifie l'équation du mouvement de la masse A par l'intermédiaire d'une force d'inertie d'entraînement supplémentaire notée :

$$\vec{f}_1 = -m \vec{a}_{B_1} = -mA_1 \cos(\omega t) \vec{u}_z$$

On notera que ce terme aura la même influence que la gravité sur le mouvement puisque ces deux termes varient sinusoidalement à la même pulsation ω .

□ **22** - L'équation différentielle du mouvement de la masse A s'écrit maintenant :

$$\ddot{z} + 2\omega_0 \xi \dot{z} + \omega_0^2 z = -g \sin(\omega t) - a_{B_0} - A_1 \cos(\omega t)$$

Cette équation différentielle est toujours celle d'un oscillateur harmonique amorti en régime forcé. Le régime transitoire est décrit par l'équation homogène associée, dont le temps caractéristique d'amortissement est donné par :

$$\tau = \frac{1}{\omega_0 \xi} = \frac{2m}{f} = 0.88 \text{ s}$$

Le temps d'amortissement des oscillations du régime transitoire étant de l'ordre de la fraction de seconde, on pourra dans la suite négliger ce régime et considérer uniquement le régime permanent.

□ **23** - On se place maintenant en régime permanent d'oscillations forcées. L'équation différentielle précédente étant linéaire, on peut utiliser la notation complexe suivante :

$$\underline{z} = \underline{Z} e^{-j\omega t} \quad \text{et} \quad z = \text{Re} [\underline{z}]$$

de sorte que l'équation précédente peut s'écrire :

$$-\omega^2 \underline{Z} - 2j\omega_0 \xi \omega \underline{Z} + \omega_0^2 \underline{Z} = -g e^{j\frac{\pi}{2}} - A_1$$

On notera que l'on a volontairement omis le terme en a_{B_0} , qui est constant et ne correspond qu'à un décalage de la solution finale, comme nous le verrons ensuite.

On en déduit que :

$$\underline{Z} = \frac{jg + A_1}{\omega^2 - \omega_0^2 + 2j\omega_0 \xi \omega}$$

Une étude complète de cette fonction de transfert n'est pas nécessaire ici. En effet, nous connaissons la valeur de ω lorsque le train roule à la vitesse de 540 km.h^{-1} , ce qui permet de comparer les ordres de grandeur des termes situés au dénominateur :

$$\frac{2\omega_0\xi\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \simeq 0.035$$

On peut donc négliger le terme dû aux frottements fluides en première approximation, de sorte que :

$$\underline{Z} \simeq \frac{jg + A_1}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

Donc finalement :

$$z(t) = \frac{a_{B_0}}{\omega_0^2} + \frac{\sqrt{g^2 + A_1^2}}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos(\omega t + \psi)$$

avec $\psi = \arctan\left(\frac{g}{A_1}\right)$. On notera que le terme constant n'a manifestement pas été considéré dans l'étude qui suit. Nous le conservons cependant.

L'amplitude des oscillations de la masse A est relativement faible, comme attendu, puisque le terme $\omega^2 - \omega_0^2$ vaut numériquement environ $18000 \text{ rad}^2 \cdot \text{s}^{-2}$. En ne prenant en compte que la gravité, on trouve une amplitude d'oscillations de $550 \mu\text{m}$ environ, ce qui reste cependant plus important que la taille du capteur (erreur dans les ordres de grandeurs de l'énoncé?).

□ **24** - D'après la formule classique redonnée dans l'énoncé, on a directement :

$$C_1 = \frac{\varepsilon S}{e + z} \quad \text{et} \quad C_2 = \frac{\varepsilon S}{e - z}$$

□ **25** - D'après l'égalité des courants dans les deux branches, on déduit que :

$$C_1 \frac{d(V_a - e_1)}{dt} = C_2 \frac{d(e_2 - V_a)}{dt}$$

En réarrangeant cette expression et en remplaçant les expressions de $e_1(t)$ et $e_2(t)$, on en déduit :

$$\frac{dV_a}{dt} = E\omega_1 \frac{(C_1 - C_2)}{C_1 + C_2} \cos(\omega_1 t)$$

En remplaçant maintenant les expressions de C_1 et C_2 :

$$\frac{dV_a}{dt} = \frac{-E\omega_1}{e} z(t) \cos(\omega_1 t)$$

Enfin, en remplaçant l'expression de $z(t)$ obtenue précédemment par une expression simplifiée $z(t) = Z_0 + Z \cos(\omega t + \psi)$:

$$\begin{aligned} \frac{dV_a}{dt} &= \frac{-EZ_0\omega_1}{e} \cos(\omega_1 t) + \frac{-EZ\omega_1}{e} \cos(\omega_1 t) \cos(\omega t + \psi) \\ &= \frac{-EZ_0\omega_1}{e} \cos(\omega_1 t) + \frac{-EZ\omega_1}{2e} [\cos((\omega_1 + \omega)t + \psi) + \cos((\omega_1 - \omega)t - \psi)] \end{aligned}$$

Finalement, on en déduit l'expression de $V_a(t)$:

$$V_a(t) = \frac{-EZ_0}{e} \sin(\omega_1 t) - \frac{EZ\omega_1}{2e} \left[\frac{\sin((\omega_1 + \omega)t + \psi)}{\omega_1 + \omega} + \frac{\sin((\omega_1 - \omega)t - \psi)}{\omega_1 - \omega} \right]$$

Sachant que $\omega_1 \gg \omega$, la réponse attendue à la question posée s'écrit :

$$V_a(t) = \frac{-E}{e} z(t) \sin(\omega_1 t)$$

On obtient ainsi un signal modulé à porteuse conservée (le signal électrique à $\omega_1 \gg \omega$ joue le rôle de la porteuse alors que le signal $z(t)$ oscillant à la pulsation ω joue le rôle de signal modulant).

Remarque : on notera qu'un tel dispositif de mesure par modulation à haute fréquence, puis démodulation synchrone (voir question suivante), est quelquefois préféré à une mesure directe afin de s'affranchir des bruits à basses fréquences.

□ **26** - L'expression de la tension V_2 est donnée par :

$$\begin{aligned} V_2(t) &= \frac{V_a \times e_3}{E} = \frac{E}{2e} z(t) [\cos(2\omega_1 t + \varphi) - \cos(\varphi)] \\ &= \frac{EZ_0}{2e} [\cos(2\omega_1 t + \varphi) - \cos(\varphi)] + \frac{EZ}{4e} [\cos((2\omega_1 + \omega)t + \varphi + \psi) + \cos((2\omega_1 - \omega)t + \varphi - \psi)] \\ &\quad - \frac{EZ}{2e} \cos(\varphi) \cos(\omega t + \psi) \end{aligned}$$

L'utilisation d'un filtre passe bas de pulsation de coupure égale à ω_1 permet de ne conserver que les termes oscillants à des pulsations inférieures, de sorte que :

$$V_3(t) = -\frac{G(0)EZ_0 \cos(\varphi)}{2e} - \frac{G(\omega)EZ \cos(\varphi)}{2e} \cos(\omega t + \psi)$$

où $G(0)$ et $G(\omega)$ sont les gains respectifs du filtre aux pulsations 0 et ω .

La tension $v_3(t)$ est donc une image des déplacements de la masse test A .

La sensibilité est maximale pour $\varphi = 0$ [π].

□ **26** - Afin de mesurer les effets de la pesanteur avec une tension image de $10mV$, on doit avoir, en faisant l'hypothèse que le filtre passe-bas a un gain de 1 au dessous de ω_1 , et pour $\varphi = 0$ [π] :

$$V_{m_{max}} = \frac{A_v E g}{2e(\omega^2 - \omega_0^2)} \quad \text{soit} \quad A_v = \frac{2e(\omega^2 - \omega_0^2)}{E g} V_{m_{max}} \simeq 1.8 \times 10^{-3}$$

Là encore, la valeur numérique est hautement improbable, liée à celle calculée précédemment.

La réponse finale attendue est par exemple un montage classique d'amplificateur inverseur avec les valeurs des 2 résistances R_1 et R_2 choisies de telle façon que $A_v = \frac{R_2}{R_1}$.