

Corrigé du sujet Mines-Ponts Physique I PC

1 Etude physique des étoiles

1.1 Energie potentielle d'une étoile sphérique

1) La force est $\vec{f}_{1-2} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{u}$

Cette force dérive de l'énergie potentielle E_p telle que $\vec{f}_{1-2} = -\vec{\text{grad}}(E_p)$

On en déduit $E_p = -G \frac{m_1 m_2}{r}$ (à une constante additive près; cette dernière est choisie pour que $E_p \rightarrow 0$ si $r \rightarrow \infty$).

2) Le champ gravitationnel $\vec{g}$ tel que $\vec{f}_{1-2} = m_2 \vec{g}$ possède les mêmes propriétés que le champ électrique, et notamment vérifie le théorème de Gauss gravitationnel: $\iint_{(S)} \vec{g} \cdot \vec{N} d^2S = -4\pi G M_{\text{int}}$. (M_{int} étant la masse intérieure à la surface d'intégration)

En considérant une sphère de masse volumique uniforme à symétrie sphérique, on montre que $\vec{g}$ est radial et ne dépend que de r . On a alors $\vec{g} = -G \frac{M_{\text{int}}}{r^2} \hat{u}$

Le champ gravitationnel est donc le même que celui d'une masse ponctuelle situé en O.

On peut donc appliquer le résultat précédent et $dE_p = -G \frac{m_r \cdot dm}{r} = -G \frac{16\pi^2 \rho^2 r^4}{3} dr$

Soit: $E_p = -G \frac{16\pi^2 \rho^2 R^5}{15}$ ou $E_p = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$ et donc $\alpha = -\frac{3}{5}$

3) Si n est le nombre de particules par unité de volume: $E_c = \int \frac{3}{2} k_B T(r) n dV = \frac{3}{2} n k_B \int_0^R 4\pi r^2 T(r) \cdot dr$ ou, comme $P = n k_B T$, $E_c = 6\pi \int_0^R P(r) \cdot r^2 dr$

L'équation de l'hydrostatique, $\vec{\text{grad}} P = \rho \vec{g}$, ramenée à une dimension, s'écrit: $\frac{\partial P}{\partial r} = \rho g$.

En écrivant $E_c = 6\pi \int_0^R P(r) r^2 dr = 6\pi ([P(r) \frac{r^3}{3}]_0^R - \int_0^R \frac{\partial P}{\partial r} \frac{r^3}{3} dr) = -2\pi \int_0^R \rho g(r) r^3 dr$, on ne peut aller plus loin sans connaître $g(r)$

La question suivante permet d'établir $g(r) = -4\pi G \rho \frac{r}{3}$

On obtient alors $E_c = \frac{8}{3} \pi^2 \rho^2 G \int_0^R r^4 dr = \frac{8}{15} \pi^2 \rho^2 G R^5$ avec $\rho^2 = \frac{9M^2}{16\pi^2 R^6}$

soit $E_c = \frac{3}{10} \frac{GM^2}{R} = -\frac{1}{2} E_p$

On a donc $k = -\frac{1}{2}$

1.2 Pression et température dans une étoile; réactions de fusion

4) On a $\frac{\partial P}{\partial r} = \rho g$, et d'après le théorème de Gauss gravitationnel appliqué à $\vec{g}$ radial et ne dépendant que de r :

$\iint \vec{g} \cdot \vec{N} d^2S = -4\pi G \cdot M_{\text{int}}$ ou: $4\pi r^2 g(r) = -4\pi G \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$. Soit $g(r) = -\frac{4}{3} \pi G \rho r$

Or $\frac{\partial P}{\partial r} = \rho g = -\frac{4}{3} \pi G \rho^2 r$ et donc $P(r) = -\frac{2}{3} \pi G \rho^2 (r^2 - R^2)$ (puisque $P(R) = 0$ à la surface de l'étoile)

La pression est maximale au centre de l'étoile et vaut $P_{max} = \frac{2}{3}\pi G \rho^2 R^2$

$$P_{max} = \frac{3GM^2}{8\pi R^4}$$

Application numérique: $P_{max} = 1,32 \times 10^{14} \text{Pa}$.

La température maximale s'en déduit par $\rho = \frac{\mathcal{M}_H P}{\mathcal{R} T} = \frac{3M}{4\pi R^3}$ ce qui donne

$$T_{max} = \frac{\mathcal{M}_H G M}{2\mathcal{R} R}$$

Application numérique: $T_{max} = 1,15 \times 10^8 \text{K}$

$$5) \rho = \frac{\mathcal{M}_H}{N\beta^3} = \frac{3M}{4\pi R^3} \text{ donc } \beta^3 = \frac{4\pi R^3 \mathcal{M}_H}{3N} T_{max}^3 = \frac{\mathcal{M}_H^3 G^3 M^3}{8\mathcal{R}^3 R^3} \text{ et } \beta^3 T_{max}^3 = \frac{\pi}{6} \frac{\mathcal{M}_H^4 G^3}{6N\mathcal{R}^3} M^2$$

Ce qui s'écrit: $M = K(\beta T_{max})^{3/2}$ avec $K = \left(\frac{6N}{\pi \mathcal{M}_H^4}\right)^{1/3} \frac{\mathcal{R}}{G}$

Application numérique $K = 1,30 \times 10^{23} \text{U.S.I.}$

$$6) u_{pp} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\beta} \text{ Pour que la fusion ait lieu, il faut que } \frac{3}{2}k_B T_{max} > u_{pp} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\beta} \text{ Soit } \beta T_{max} > \frac{e^2}{6\pi k_B \epsilon_0}$$

$$\text{et } M > M_\ell = K \left(\frac{e^2}{6\pi k_B \epsilon_0} \right)^{3/2}$$

Application numérique: $M_\ell = 1,44 \times 10^{18} \text{kg}$. La masse du Soleil est largement supérieure à cette valeur.

Critique du calcul précédent: pour que la fusion ait lieu, il ne suffit pas que l'agitation thermique permette de franchir la barrière de potentiel de largeur β . Il faut, de plus, que β soit de l'ordre du rayon du noyau.

Des réactions de fusion ont été réalisées par l'homme sous forme militaire (bombes thermonucléaires) et civile (Tokamak)

1.3 Phénomènes convectifs

7) La transformation étant adiabatique et supposée réversible, on a: $P^{1-\gamma} T^\gamma = C^{te}$ ou $\frac{dP}{P}(\gamma - 1) = \frac{dT}{T}\gamma$ soit $\frac{dT}{dr} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{dP}{dr} \frac{T(r)}{P(r)}$

Puissance émise et durée de vie du Soleil

8) Le bilan thermique s'écrit: $\phi(r + dr) = \phi(r) + \epsilon(r)\rho 4\pi r^2 dr$ soit: $\frac{d\phi}{dr} = \rho\sigma(1 - \frac{r}{R_s})4\pi r^2$

Donc $\phi(r) = 4\pi\rho\sigma(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4R_s}) + C^{te}$ la constante est nulle, puisque $\phi(0) = 0$

Par conséquent $\mathcal{P} = 4\pi\rho\sigma R_s^3 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{3}\pi\rho\sigma R_s^3$ $\mathcal{P} = \frac{1}{4}\sigma M_s$

Application numérique: $\sigma = 7,6 \times 10^{-4} \text{W.kg}^{-1}$

9) $\frac{dM_s}{dt} = \frac{\mathcal{P}}{c^2} = 4,2 \times 10^9 \text{kg.s}^{-1}$

Le nombre d'atomes d'hydrogène transformés est donc $\frac{4\mathcal{P}}{E_f}$ et leur masse:

$$\frac{dm'}{dt} = \frac{4\mathcal{P}\mathcal{M}_H}{E_f N}$$

Application numérique: $\frac{dm'}{dt} = 5,97 \times 10^{11} \text{kg.s}^{-1}$

La durée de combustion est donc $T = \frac{0,14 \times 0,7 M_s}{\frac{dm'}{dt}} = 2,5 \times 10^{11} \text{années}$ (250 milliards d'années) ce qui est surestimé (d'autres réactions se produisent qui élèvent la température de l'étoile et produisent son explosion)

2 Quelques problèmes d'astrophysique

2.1 Orientation de la queue d'une comète

10) $\delta W = \mathcal{P} \frac{\pi \mu^2}{4\pi r^2} dt$ donc $F = \frac{\mathcal{P} \mu^2}{4cr^2}$ Cette force est à comparer avec la force de gravitation: $F_g = G \frac{M_s}{r^2} \frac{4}{3} \pi \mu^3 \rho_c$

Il y a répulsion si $\frac{3P}{16c\pi G M_s \rho_c} > \mu$ ce qui donne $\mu < 0,19$ micromètre.

11) Les comètes présentent souvent deux queues, la première, de poussières relativement grossières, qui suivent approximativement la trajectoire de la comète, et une deuxième, de très fines particules, du côté opposé au Soleil.

2.2 La planète Osiris

12) La baisse de flux lumineux périodique peut s'expliquer par la lumière interceptée par la planète.

Soit Φ_0 le flux de l'étoile. Le flux intercepté par la planète est $\Phi_1 = \Phi_0 \frac{\pi R_2^2}{4\pi R_1^2}$ et

la variation relative est donc $\frac{\Phi_1}{\Phi_0} = \frac{R_2^2}{4R_1^2} = 1,7 \times 10^{-2}$ Soit $R_2 = 2\sqrt{1,7 \cdot 10^{-2}} 1,1 R_s$

Application numérique: $R_2 = 2 \times 10^8 m$ Cette planète est donc 3 fois plus grosse que Jupiter.

13) La trajectoire de la planète est donc circulaire uniforme. La vitesse barycentrique est donc $v_1 = \frac{1}{2}(v_{r+} - v_{r-}) = 0,085 km.s^{-1}$

14) La relation valable dans le repère barycentrique est $m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \vec{0}$ ce qui donne, en valeur absolue: $m_1 v_1 = m_2 v_2$.

La relation fondamentale de la Dynamique dans le repère barycentrique s'écrit alors:

$G \frac{m_1 m_2}{r^2} = \frac{m_r v_2^2}{r}$ m_r étant la masse réduite: $m_r = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \approx m_2$ si $m_2 \ll m_1$ soit $\frac{G m_1}{r} \approx v_2^2$

r est la distance des deux corps $r \approx r_2 = \frac{v_2 T}{2\pi}$ dans les mêmes conditions.

Donc $v_2 = \frac{v_1 m_1}{m_2} \approx \left(\frac{2\pi G m_1}{T}\right)^{1/3}$ soit $m_2 \approx m_1 v_1 \left(\frac{T}{2\pi m_1 G}\right)^{1/3}$

Application numérique: $m_2 = 6,45 \times 10^{26} kg$ soit 3 fois la masse de Jupiter. Cette planète est donc 6 fois moins dense que Jupiter (enveloppe gazeuse plus grande)

2.3 Le réseau échelette

16) L'onde diffractée par une source monochromatique est la même que si l'on remplaçait la source principale S par une infinité de sources secondaires situées sur une surface fermée entourant S et émettant des ondes sphériques proportionnellement à l'élément de surface qu'elles occupent et à l'amplitude de l'onde reçue de S , et en phase avec cette onde:

$$g(t, P) = K \iint g_0 e^{j(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0}(L_{SM} + L_{MP}))} d^2 S$$

L_{SM} désignant le chemin optique pour aller de S au point mobile M sur la surface d'intégration, et L_{MP} celui pour aller de M au point P où l'on observe l'onde.

17) Selon un calcul classique: $\delta(M/O_2) = -\overrightarrow{O_2 M} \cdot \vec{u}$ où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire porté par le "rayon" émergent. On n'a pas à tenir compte du déphasage en amont, l'onde étant en incidence normale sur la facette. Le repère a son axe Ox parallèle à la facette de O_2 vers M sur la figure, et Oz normal à Ox vers l'extérieur.

$$\vec{u} = -\sin\theta \hat{e}_x + \cos\theta \hat{e}_z \quad \overrightarrow{O_2 M} = x \hat{e}_x$$

$$\text{Donc } \boxed{\delta(M/O_2) = -x \sin\theta}$$

De la même façon $\delta(O_2/O_1) = -\overrightarrow{O_1 O_2} \cdot \vec{u}$

$$\vec{u} = -\sin\theta \hat{e}_x + \cos\theta \hat{e}_z \quad \overrightarrow{O_1 O_2} = -a \cos\gamma \hat{e}_x - a \sin\gamma \hat{e}_z$$

$$\text{Donc } \boxed{\delta(O_2/O_1) = a \sin\theta \cos\gamma - a \cos\theta \sin\gamma = -a \sin(\theta - \gamma)}$$

18) L'onde diffractée s'écrit donc:

$$g(t, P) = K \sum_{p=0}^{p=n-1} \iint e^{j(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0}(L_{SO_1} + L_{O_1 P}))} e^{j \frac{2\pi}{\lambda_0} (x \sin\theta + pa \sin(\theta - \gamma))} dx dy$$

$$g(t, P) = K e^{j(\omega t - \varphi_0)} b \int_{-l/2}^{+l/2} e^{j \frac{2\pi}{\lambda_0} x \sin\theta} dx (1 + e^{j\varphi} + e^{2j\varphi} + \dots + e^{j(n-1)\varphi})$$

$$\text{avec } \varphi_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} (L_{SO_1} + L_{O_1 P})$$

$$g(t, P) = K e^{j(\omega t - \varphi_0)} b l \frac{\sin(\frac{\pi l \sin\theta}{\lambda_0})}{\frac{\pi l \sin\theta}{\lambda_0}} \frac{1 - e^{jn\varphi}}{1 - e^{j\varphi}} \quad \text{ou}$$

$$g(t, P) = K e^{j(\omega t - \varphi_0)} b l \frac{\sin(\frac{\pi l \sin\theta}{\lambda_0})}{\frac{\pi l \sin\theta}{\lambda_0}} \frac{e^{-jn\varphi/2} - e^{jn\varphi/2}}{e^{-j\varphi/2} - e^{j\varphi/2}} e^{j(n-1)\varphi/2}$$

$$\text{Soit: } g(t, P) = K e^{j(\omega t - \varphi_0)} b l \times \text{sinc}\left(\frac{\pi l \sin\theta}{\lambda_0}\right) \frac{\sin(\frac{n\varphi}{2})}{\sin(\frac{\varphi}{2})} e^{j(n-1)\varphi/2}$$

$$\text{L'intensité est alors: } I = C^{te} g \cdot g^* = C^{te} K^2 b^2 l^2 \text{sinc}^2\left(\frac{\pi a \cos\gamma \sin\theta}{\lambda_0}\right) \left[\frac{\sin(\frac{n\varphi}{2})}{\sin(\frac{\varphi}{2})}\right]^2$$

qui est bien de la forme demandée.

On a donc $k = 2$

Le terme $\text{sinc}^2\left(\frac{\pi a \cos\gamma \sin\theta}{\lambda_0}\right)$ décrit la diffraction par une facette.

Le terme $\left[\frac{\sin(\frac{n\varphi}{2})}{\sin(\frac{\varphi}{2})}\right]^2$ décrit les interférences des ondes issues d'un réseau de n points.

19) La fonction $F_n(\varphi)$ a pour période celle de son dénominateur, c'est-à-dire $\varphi/2 = \pi$ ou $\varphi = 2\pi$.

Elle présente des pics principaux pour $\varphi = 2p\pi$ de largeur $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{n}$

20) La fonction $\text{sinc}^2\left(\frac{\pi a \cos\gamma \sin\theta}{\lambda_0}\right)$ admet un maximum principal pour $\theta = 0$.

Pour cela, on veut que $\varphi = 2p\pi = 280\pi = \frac{2\pi a}{\lambda_0} \sin(\theta - \gamma)$ ou $-\frac{p\lambda_0}{a} = \sin\gamma$ soit, comme le signe n'a pas d'importance:

$$\boxed{\gamma = \arcsin\left(\frac{p\lambda_0}{a}\right)}$$

Application numérique: $\sin\gamma = 1,93$ (il semble qu'il y ait une erreur!)

21) On a $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\Delta v}{c}$ et $\sin(\gamma - \Delta\theta) = p(\lambda_0 + \Delta\lambda) = p\lambda_0(1 + \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0})$

$$\text{Soit } -\Delta\theta \cos\gamma \approx \frac{p\lambda_0}{c} \Delta v \quad \text{ou} \quad \boxed{\Delta\theta \approx \frac{\Delta v}{c} \tan\gamma}$$

22) On a maintenant $(p+1)\lambda' = a \sin\gamma = p\lambda_0$ Donc $\lambda' = \frac{p}{p+1} \lambda_0 = 428nm$ et $\lambda'' = \frac{p}{p-1} \lambda_0 = 434nm$