

Corrigé proposé par :

Nicole ADLOFF (nicole.adloff@wanadoo.fr) et Marc STRUBEL (marc.strubel@wanadoo.fr)

Merci de nous faire part de vos remarques et commentaires !

I. Etude physique des étoiles :

I. A. Energie potentielle d'une étoile sphérique, théorème du viriel :

$$1. \vec{f}_{1 \rightarrow 2} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u} ; dEp = -\vec{f}_{1 \rightarrow 2} \cdot d\vec{r} ; Ep(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r}$$

2. Si on applique le théorème de Gauss gravitationnel sur une surface sphérique de centre O et passant par $\mathcal{K}$ situé au point K on trouve que le champ gravitationnel créé par $\mathcal{B}_r$ a pour expression $\mathcal{G} = -G \frac{m_r}{OK^2} \vec{u}$, identique à celui créé par une masse ponctuelle m_r située en O.

$$dEp(r) = -G \frac{m_r dm}{r}$$

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho ; m_r = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho = M \frac{r^3}{R^3} ; dm = 4\pi r^2 \rho dr = 3M \frac{r^2}{R^3} dr ; m_r dm = 3M^2 \frac{r^5}{R^6} dr ;$$

$$dEp(r) = -G \frac{m_r dm}{r} = -3GM^2 \frac{r^4}{R^6} dr ; Ep = \int_0^R dEp(r) = -\frac{3GM^2}{R^6} \int_0^R r^4 dr = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

$$\alpha = -3/5.$$

$$3. Ec = \int_0^R n \cdot 4\pi r^2 \cdot e_c \cdot dr \text{ avec } e_c(r) = \frac{3}{2} k_B T(r) \text{ et } P(r) = nk_B T(r) \text{ loi des gaz parfaits donc}$$

$$Ec = \int_0^R \frac{3}{2} P(r) \cdot 4\pi r^2 \cdot dr$$

Equilibre hydrostatique : $-\overrightarrow{\text{grad}P(r)} - \rho \mathcal{G}(r) \vec{u}_r = \vec{0}$ où $\mathcal{G}(r)$ est le champ gravitationnel créé à l'intérieur de l'étoile.

En appliquant le théorème de Gauss gravitationnel à l'intérieur de l'étoile, on trouve

$$\mathcal{G}(r) = \frac{4\pi G \rho}{3} r = \frac{GM}{R^3} r \text{ d'où } \frac{dP(r)}{dr} = -\rho \frac{GM}{R^3} r = -\frac{3GM^2}{4\pi R^6} r \text{ d'où en intégrant } Ec \text{ par parties}$$

$$Ec = 6\pi \left(\left[\frac{r^3}{3} P(r) \right]_0^R - \int_0^R \frac{r^3}{3} \frac{dP}{dr} \cdot dr \right) = 6\pi \left(0 + \int_0^R \frac{r^3}{3} \frac{3GM^2}{4\pi R^6} r \cdot dr \right) = \frac{3}{2} \frac{GM^2}{\pi R^6} \frac{R^5}{5} = \frac{3}{10} \frac{GM^2}{\pi R}$$

$$\text{et donc } 2Ec = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} = -Ep \text{ soit } \kappa = -1$$

I. B. Pression et température dans une étoile, réactions de fusion :

$$4. P(r) = \int_{P(R)=0}^{P(r)} dP = -\frac{3GM^2}{4\pi R^6} \int_R^r r dr = -\frac{3GM^2}{4\pi R^6} \frac{r^2 - R^2}{2} = \frac{3GM^2}{8\pi R^6} (R^2 - r^2)$$

$$\text{en } r = 0 \text{ } P_{\max} = \frac{3GM^2}{8\pi R^4} = \frac{3 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 4 \cdot 10^{60}}{8 \cdot \pi \cdot (7 \cdot 10^8)^4} = 1,3 \cdot 10^{14} \text{ Pa ;}$$

$$T_{\max} = P_{\max} / nk_B$$

$$\text{avec } n = \frac{n_{\text{mol}}}{V} \cdot \mathcal{N} = \frac{M}{V} \cdot \frac{1}{M_H} \cdot \mathcal{N} = \frac{3M}{4\pi R^3} \cdot \frac{1}{M_H} \cdot \mathcal{N} \text{ et } nk_B = \frac{3M}{4\pi R^3} \cdot \frac{1}{M_H} \mathcal{R}$$

$$\text{d'où } T_{\text{max}} = \frac{3GM^2}{8\pi R^4} \frac{4\pi R^3}{3M} \frac{M_H}{\mathcal{R}} = \frac{1}{2} \frac{GM}{R} \frac{M_H}{\mathcal{R}} = \frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30}}{2 \cdot 7 \cdot 10^8} \frac{0,001}{8,31} = 11,5 \cdot 10^6 \text{ K}$$

$$5. \quad \rho = \frac{M}{V} = \frac{n_{\text{mol}} M_H}{N_{\text{part}} \beta^3} = \frac{N_{\text{part}} M_H}{N_A N_{\text{part}} \beta^3} = \frac{M_H}{N_A \beta^3} = \frac{3M}{4\pi R^3} \text{ d'où } R^3 = \frac{3M}{4\pi} \frac{N_A \beta^3}{M_H} \text{ et}$$

$$T_{\text{max}} = \frac{1}{2} GM \left(\frac{4\pi M_H}{3M N_A} \right)^{1/3} \frac{1}{\beta} \frac{M_H}{\mathcal{R}} = \frac{1}{2} G \left(\frac{4\pi M_H}{3N_A} \right)^{1/3} \frac{1}{\beta} \frac{M_H}{\mathcal{R}} M^{2/3} \text{ soit } M = (\beta T_{\text{max}})^{3/2} \left(\frac{2\mathcal{R}}{GM_H} \right)^{3/2} \sqrt{\frac{3N_A}{4\pi M_H}}$$

$$\text{et } K = \left(\frac{2\mathcal{R}}{GM_H} \right)^{3/2} \sqrt{\frac{3N_A}{4\pi M_H}} = \left(\frac{2 \cdot 8,31}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 10^{-3}} \right)^{3/2} \sqrt{\frac{3 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{4\pi \cdot 10^{-3}}} = 4,7 \cdot 10^{34} \text{ SI (!)}$$

$$6. \text{ Même type de raisonnement qu'à la question 1 : } u_{\text{pp}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\beta}$$

pour que la réaction de fusion se fasse il faut $2e_C > u_{\text{pp}}$
 ...(2 car le système est composé de 2 protons en interaction ?)

$$2 \cdot \frac{3}{2} k_B T_{\text{max}} > \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{K}{M} \right)^{2/3} T_{\text{max}} \text{ d'où } M > K \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{3k_B} \right)^{3/2} = M_\ell$$

$$M_\ell = 4,7 \cdot 10^{34} \left((1,6 \cdot 10^{-19})^2 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{6,02 \cdot 10^{23}}{3 \cdot 8,31} \right)^{3/2} = 6,2 \cdot 10^{26} \text{ kg}$$

On trouve $M_\ell > M_S$...c'est plutôt rassurant

Fusion nucléaire artificielle : bombe H, projet soleil, projet ITER.

II. Quelques problèmes d'astrophysique

II. A. Orientation de la queue d'une comète :

$$7. \text{ La puissance surfacique émise par le soleil a une distance } r \text{ de celui-ci est } \Pi = \frac{P_s}{4\pi r^2}.$$

$$\text{La comète reçoit la puissance sur la surface } \frac{\delta W}{dt} = \Pi \pi \mu^2 = P_s \frac{\mu^2}{4r^2} \text{ d'où } F = \frac{\mu^2}{4cr^2} P_s$$

$$\text{et on veut } F > GM_S \rho_C \frac{4}{3} \pi \mu^3 \frac{1}{r^2} ; \frac{\mu^2}{4cr^2} P_s > GM_S \rho_C \frac{4}{3} \pi \mu^3 \frac{1}{r^2} ; \frac{3}{16\pi c GM_S \rho_C} P_s > \mu ;$$

$$\mu_1 = \frac{3P_s}{16\pi c GM_S \rho_C} = \frac{3 \cdot 3,8 \cdot 10^{26}}{16\pi \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30} \cdot 3 \cdot 10^3} = 1,9 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

8. Seules les poussières fines vérifient la condition précédente et forment la queue opposée au soleil.

II. B. Mesure de la distance d'un pulsar par la méthode de dispersion :

9. $f \approx 1 \text{ Hz}$ due à la rotation de l'axe magnétique.

$$10. \text{ On applique le pdf à un électron : } m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

On peut négliger la force magnétique si $\frac{\|\vec{v} \wedge \vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} \ll 1$, or le champ magnétique est celui produit par l'onde

EM donc $\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$ soit $v/c \ll 1$.

$$\text{D'où } m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}$$

Pour établir la relation de dispersion, il faut établir, à partir des équations de Maxwell, l'équation dont $\vec{E}$ est solution.

A partir de la formule d'analyse vectorielle (classique ?): $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{E}) - \Delta\vec{E}$

avec MF $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ et MG $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$ puisque le plasma est électriquement neutre on trouve

$$-\frac{\partial\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B}}{\partial t} = -\Delta\vec{E}$$

et en utilisant MA $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \right)$ on obtient $\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial\vec{j}}{\partial t}$ en posant $\mu_0\epsilon_0 = 1/c^2$

En posant $\vec{j} = -eN\vec{v}$ et en passant en notation complexe dans l'expression du pfd : $m_e(i\omega)\underline{\vec{v}} = -e\underline{\vec{E}}$ on en déduit $\underline{\vec{j}} = \frac{e^2 N}{im_e \omega} \underline{\vec{E}}$.

En passant en notation complexe : $\Delta\underline{\vec{E}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = \mu_0 i\omega \underline{\vec{j}} = \mu_0 \frac{e^2 N}{m_e} \underline{\vec{E}} = \frac{1}{c^2} \frac{e^2 N}{\epsilon_0 m_e} \underline{\vec{E}}$ soit

$\Delta\underline{\vec{E}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = \frac{\omega_p^2}{c^2} \underline{\vec{E}}$ d'où en utilisant la dérivation formelle on obtient la relation de dispersion demandée : $(-ik)^2 - (i\omega)^2 / c^2 = \omega_p^2 / c^2$

$$\text{soit } k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

11. Si $\omega > \omega_p$ alors k est réel. On différencie l'expression précédente $2kdk = 2\omega d\omega / c^2$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = c^2 \frac{k}{\omega} = c^2 \frac{1}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2} \approx c \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 \right) \text{ à l'ordre 2.}$$

12. Le milieu étant dispersif des ondes de fréquences différentes se propagent à des vitesses de groupe

$$\text{différentes : } \delta\alpha = d\left(\frac{1}{v_{g1}} - \frac{1}{v_{g2}}\right) = \frac{d}{c} \left(\left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{f_p}{f_1}\right)^2\right)^{-1} - \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{f_p}{f_2}\right)^2\right)^{-1} \right) \approx \frac{df_p^2}{2c} \left(\frac{1}{f_1^2} - \frac{1}{f_2^2} \right)$$

$$\text{d'où } d = 2.c.\delta t. \frac{f_1^2 f_2^2}{f_p^2 (f_2^2 - f_1^2)}$$

$$13. \text{ On calcule } f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = \frac{e}{2\pi} \sqrt{\frac{N}{m_e \epsilon_0}} = \frac{1,6.10^{19}}{2\pi} \sqrt{\frac{10^4}{9,1.10^{31} \cdot 36\pi.10^9}} = 897 \text{ Hz} \ll f_1$$

$$d = 2.c.\delta t. \frac{f_1^2 f_2^2}{f_p^2 (f_2^2 - f_1^2)} = 2 * 3.10^8 * 0,05 \frac{234^2 * 405^2}{897.10^{-6}} \left(\frac{1}{405^2 - 234^2} \right) = 3,1.10^{18} \text{ m}$$

$$d_{AL} = d \text{ (en m)} / (c * 1 \text{ an}) = 324 \text{ al}$$

(Distance réelle glanée sur Internet : 850 al)

II. C. La planète Osiris :

14. La planète éclipse périodiquement et partiellement l'étoile.

Si l'on néglige la distance entre Osiris et son étoile devant la distance terre-étoile,
On a $S' = \pi R_2^2 = 1,7.10^{-2} S = 1,7.10^{-2} \pi R_1^2$.

On en déduit : $R_2 = R_1 \sqrt{1,7.10^{-2}} = 1,17.10^8 \sqrt{1,7.10^{-2}} = 1,004.10^8 \text{ m} = 1,43.R_J$.

(Rayon réel $1,32 R_J$)

15. Une excentricité nulle caractérise une orbite circulaire.

Le centre de masse C du système étoile-planète se déplace à la vitesse $\vec{v}_t$.

Dans le référentiel R_B , la trajectoire de l'étoile est un cercle parcouru à vitesse v_1 .

On a donc : $v_{r-} = \vec{v}_t \cdot \vec{u}_r - v_1$ et $v_{r+} = \vec{v}_t \cdot \vec{u}_r + v_1$.

On en déduit $v_1 = (v_{r+} - v_{r-}) / 2 = 8,5.10^{-2} \text{ km.s}^{-1} = 85 \text{ m.s}^{-1}$.

16. Par définition de C : $m_1 \overrightarrow{CM}_1 + m_2 \overrightarrow{CM}_2 = \vec{0}$

On en déduit par dérivation dans R_B : $m_1 v_1 = m_2 v_2$. (1)

La troisième loi de Képler permet de calculer la distance a d'Osiris à l'étoile $T^2 / a^3 = 4\pi^2 / G.m_1$. (2)

De plus $v_2 = \frac{2\pi}{T} . CM_2 = \frac{2\pi}{T} . a \frac{m_1}{m_1 + m_2} \approx \frac{2\pi}{T} a$ (3).

On déduit de ces trois équations : $m_2 = \frac{m_1 v_1}{2\pi} \sqrt[3]{\frac{4\pi^2 T}{G m_1}}$.

17. $m_2 = 1,29.10^{30} \text{ kg} = 0,68 M_J$.

II.D. Le réseau échelette :

18. Principe d'HF : cf cours.

19. Les rayons incidents arrivent en phase en O_2 et M (onde normale) ; soit M_∞ un point à l'infini ou les deux ondes interfèrent.

La différence de marche vaut : $\delta(M/O_2) = SMM_\infty - SO_1 M_\infty = x.\sin\theta$.

De même, $\delta(O_2/O_1) = SO_2 M_\infty - SO_1 M_\infty = - a.\sin(\gamma+\theta) - a.\sin\gamma$ et $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} . \delta(O_2 / O_1)$.

20. L'amplitude élémentaire émise par une surface élémentaire $L.dx$ de la facette 1 dans la direction θ est d'après le principe d'HF :

$$ds_1(\theta) = K.L.d\alpha \exp(j\omega t - (\frac{2\pi}{\lambda} . x . \sin\theta))$$

en appelant L la hauteur du motif et K une constante, et pour x variant entre $-a.\cos\gamma / 2$ et $a.\cos\gamma / 2$.

On en déduit $s_1(\theta) = K.L.a.\cos\gamma . \exp(j\omega t) . \text{sinc}(\pi a.\sin\theta.\cos\gamma / \lambda)$.

L'amplitude émise par les n facettes est :

$$s(\theta) = s_1(\theta) + s_2(\theta) + \dots s_n(\theta) = s_1(\theta) (1 + \exp(-j\varphi) + \dots \exp(-j(n-1)\varphi)) = s_1(\theta) . \frac{1 - \exp(-jn\varphi)}{1 - \exp(-j\varphi)} .$$

On en déduit :

$$I = s(\theta) . s^*(\theta) = (K.L.a.\cos\gamma)^2 . \text{sinc}^2(\pi a.\sin\theta.\cos\gamma / \lambda) . \frac{2 - 2\cos(n\varphi)}{2 - 2\cos(\varphi)} =$$

$$= (K.L.a.\cos\gamma)^2 . \text{sinc}^2(\pi a.\sin\theta.\cos\gamma / \lambda) . \frac{\sin^2(\frac{n\varphi}{2})}{\sin^2(\frac{\varphi}{2})} .$$

qui est bien le résultat proposé en posant $I_0 = K.L.a.\cos\gamma$.

On a alors $\kappa = 2$.

$F_n(\theta)$ représente l'amplitude due aux interférences des n fentes, tandis que le sinc^2 représente l'intensité diffractée par une facette.

21. La période de la fonction $F_n(\varphi)$ est 2π .
Ci-contre le tracé pour $n = 100$ et φ variant entre 0 et 4π .

22. On sait que la fonction $\text{sinc}(u)$ atteint son maximum « global » (?) pour $u = 0$, soit ici $\theta_m = 0$.

Les maxima de $F_n(\varphi)$ s'obtiennent pour $\varphi/2 = p.\pi$, avec p entier relatif, soit

$$(\pi/\lambda)(-a.\sin(\gamma+\theta) - a.\sin\gamma) = p.\pi$$

$$\Leftrightarrow -a.\sin(\gamma+\theta) - a.\sin\gamma = p.\lambda$$

On doit donc avoir : $2a.\sin\gamma = 140.\lambda$

$$\gamma = \text{Arcsin}(140.431.10^{-9} . 32 / 2.10^{-3}) = 74,89^\circ .$$

Cet angle me semble grand ?

$$23. \Delta\lambda = \lambda_0 . \Delta v / c$$

$$\text{On a à l'ordre 2 : } a [\sin(\gamma) + \sin(\theta+\gamma)] = 2.\lambda$$

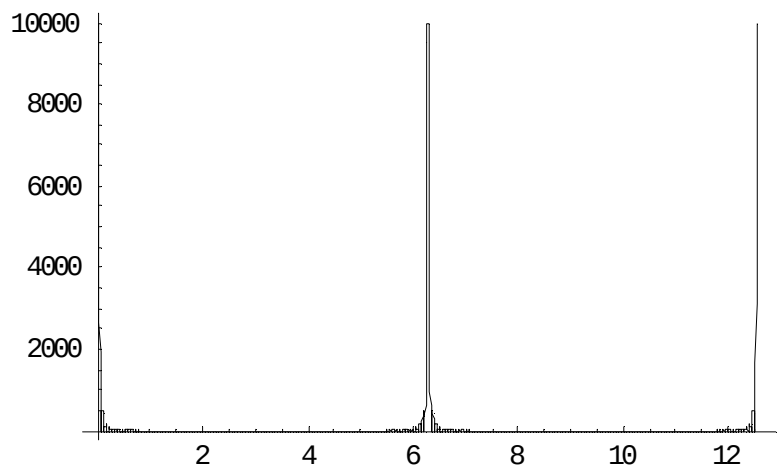
$$\text{En différenciant : } a.\cos(\gamma+\theta).d\theta = 2.d\lambda$$

$$\text{D'où } \Delta\theta = \frac{2.\Delta\lambda}{a.\cos(\theta + \gamma)}$$

$$\sin(\theta+\gamma) = 2.\lambda/a - \sin(\gamma)$$

$$\text{et } \sin(\gamma) = 70.\lambda/a \text{ (Q 22) donnent } \sin(\theta+\gamma) = -68\lambda/a.$$

$$\text{On en déduit : } \Delta\theta = \frac{2.\Delta\lambda}{\sqrt{a^2 + (68.\lambda)^2}} = \frac{2.\lambda_0}{\sqrt{a^2 + (68.\lambda)^2}} \frac{\Delta v}{c} = 1,1.10^{-8} \text{ rad.}$$



24. Par construction, la déviation θ pour $\lambda = 431 \text{ nm}$ à l'ordre 140 est nulle.

On a : $2.a.\sin\gamma = p_0.\lambda = (p_0 - 1).\lambda' = (p_0 + 1).\lambda''$.

On calcule $\lambda' = 434,1 \text{ nm}$ et $\lambda'' = 427,9 \text{ nm}$.