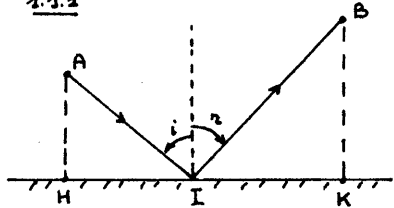


Partie A : OPTIQUE1. Miroirs plans. - Réflexion1.1. Le miroir plan.1.1.1

$$IH = AH \tan i \quad IK = BK \tan r$$

$$IH + IK = \text{cte (qd I varie)}$$

$$\rightarrow \frac{AH}{\cos^2 i} di + \frac{BK}{\cos^2 r} dr = 0 \rightarrow di = -\frac{BK}{AH} \frac{\cos^2 i}{\cos^2 r} dr$$

$$AI = \frac{AH}{\cos i} \quad IB = \frac{BK}{\cos r} \quad AI + IB = \frac{AH}{\cos i} + \frac{BK}{\cos r}$$

$AI + IB$ représente le chemin optique entre A et B

Exprimons que ce chemin optique est extréum

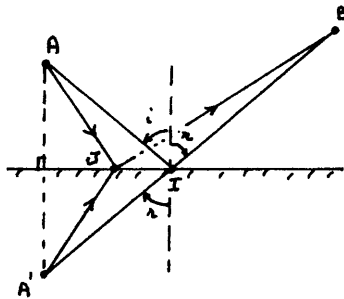
$$\text{en différenciant son expression: } \frac{AH \sin i di}{\cos^3 i} + \frac{BK \sin r dr}{\cos^3 r} = 0$$

$$\text{soit encore: } \frac{AH \sin i}{\cos^3 i} \left(-\frac{BK \cos^2 i}{AH \cos^2 r} dr \right) + \frac{BK \sin r}{\cos^3 r} dr = 0$$

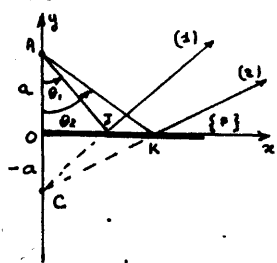
$$\rightarrow \frac{BK}{\cos^2 r} dr (\sin r - \sin i) = 0 \quad \forall r \quad \text{si } \sin i = \sin r \quad (\text{Loi de Descartes})$$

Si I est entre H et K il ne peut s'agir que d'un minimum.

Autre méthode (+ simple et géométrique, que devait attendre le correcteur!)



Soit A' le symétrique de A par rapport au plan du miroir, tout chemin optique de type $A'I + IB$ tel que i soit différent de r est plus grand que $A'I + IB$ correspondant à la droite. (C.F.F.)

1.1.2.

$$OJ = a \tan \theta_1 \rightarrow \text{équation du rayon (1) de pente } \frac{1}{\tan \theta_1}$$

$$\rightarrow y_1 = \frac{1}{\tan \theta_1} (x - a \tan \theta_1)$$

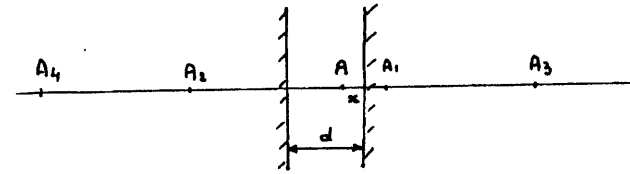
$$\text{de même } y_2 = \frac{1}{\tan \theta_2} (x - a \tan \theta_2)$$

$$\text{Intersection pour } y_1 = y_2 \rightarrow \frac{x}{\tan \theta_1} - a' = \frac{x}{\tan \theta_2} - a'$$

$$\text{avec } \theta_1 \neq \theta_2 \Rightarrow x = 0 \rightarrow y_1 = y_2 = -a$$

L'image de A est son symétrique par rapport au plan du miroir.

Le miroir plan assure le stigmatisme absolu entre les objets et leurs images, symétriques par rapport à son plan.

1.2 Association de deux miroirs1.2.1.

$$\begin{aligned} \overline{AA_1} &= 2x \\ \overline{AA_2} &= \overline{AA_1} + \overline{A_1A_2} \\ &= 2x - 2(d+x) = -2d \\ \overline{AA_3} &= \overline{AA_2} + \overline{A_2A_3} \\ &= -2d + 2(2d+x) \\ &= 2d + 2x \\ \overline{AA_4} &= \overline{AA_3} + \overline{A_3A_4} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \overline{AA_4} = 2d + 2x - 2(3d+x) = -4d$$

On procédant par analogie: si N pair

$$\overline{AA_N} = -Nd$$

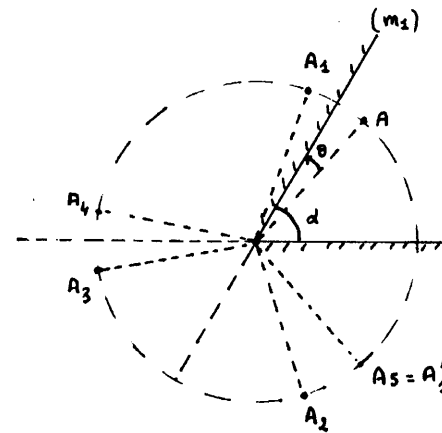
si N impair

$$\overline{AA_N} = (N-1)d + 2x$$

On obtient ainsi une infinité d'images.

1.2.2.

Remarque: La figure est volontairement faite avec $\alpha = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$



On utilisant le 1.2.1. on aura

$$\text{pour } N \text{ pair } (OA, OA_N) = -N\alpha$$

$$\text{pour } N \text{ impair } (OA, OA_N) = (N-1)\alpha + 2\theta$$

pour trouver les A'_N on change

θ en $(\alpha - \theta)$ et on inverse les signes!

$$(OA, OA'_N) = +N\alpha \quad \text{pour } N \text{ pair}$$

$$(OA, OA'_N) = -(N-1)\alpha - 2(\alpha - \theta)$$

$$= -(N+1)\alpha + 2\theta \quad \text{pour } N \text{ impair}$$

$$\text{Si } \alpha = \frac{\pi}{p} \quad \text{pour } N \text{ pair } (OA, OA_N) = -N \times \frac{\pi}{p} = -2\pi \quad \text{pour } N = 2p$$

et de même pour (OA, OA'_N)

$$\text{pour } N = 2p - 1 \quad (OA, OA_N) = (2p-2)\alpha + 2\theta = 2\pi - 2\alpha + 2\theta$$

$$\text{et } (OA, OA'_1) = -2\alpha + 2\theta$$

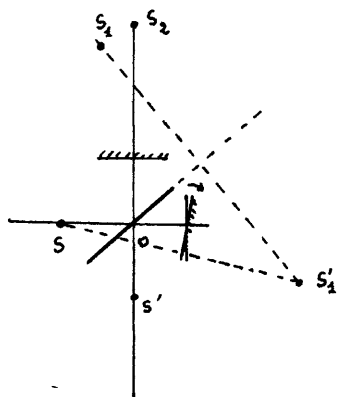
donc A'_1 et A_N sont confondues.

On voit donc que pour $\alpha = \frac{\pi}{p}$ on aura $2p$ images distinctes.

- 1.2.3.1 S' image de S à travers (L) est sur Oy . $OS' = -15 \text{ cm}$
 S'_1 " " " " (m_2) est sur Ox $OS'_1 = +25 \text{ cm}$
 S_2 " " S'_2 " " (L) " " Oy $OS_2 = +25 \text{ cm}$
 S_2 " " S' " " (m_2) " " Oy $OS_2 = +25 \text{ cm}$

- 1.2.3.2 S' et S_2 sont échangées.
 Si m_2 avance de $+1 \text{ cm}$. OS'_1 de 2 cm . $\rightarrow OS'_1 = +27 \text{ cm}$.
 On aura de même $OS_2 = +27 \text{ cm}$.

1.2.3.3



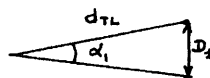
1.3 Association de 3 miroirs

- 1.3.1. coin de cube: dans la réflexion d'un rayon sur un plan la composante perpendiculaire au plan change de signe; les autres sont inchangées.
 $\rightarrow \vec{u}_1(\alpha, -\beta, \gamma) \quad \vec{u}_2(-\alpha, -\beta, \gamma) \quad \vec{u}_3(-\alpha, -\beta, -\gamma) = -\vec{u}$
 le rayon revient sur lui-même.

1.3.2 Application: réflecteur lunaire.

1.3.2.1. $d_{TL} = \frac{c \tau}{2} = 384450 \text{ km}$

- 1.3.2.2. Précision: On prendra α_1 et α_2 ouverture totale:



$$\frac{E_{\text{reçue}}}{E_{\text{émise}}} = \rho_A \times \rho_R \quad \rho_A = \frac{4a_2}{\pi D_1^2} = \frac{4a_1}{\pi (\alpha_1 d_{TL})^2}$$

avec $\alpha_1 = \frac{4}{3600} \times \frac{\pi}{180} = 1,94 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$. et $d_{TL} = 3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$

$\rightarrow \rho_A \approx 10^{-8}$ et $\rho_R = \frac{D_T^2}{(\alpha_2 d_{TL})^2}$ avec $\alpha_2 \approx 4,85 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$.

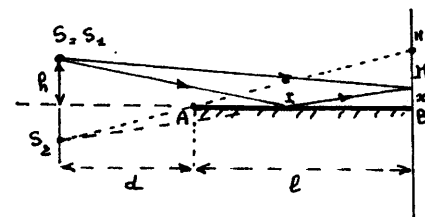
$\rightarrow \rho_R \approx 6,5 \cdot 10^{-9} \rightarrow \frac{E_{\text{reçue}}}{E_{\text{émise}}} = 6,5 \cdot 10^{-17}$

On doit utiliser un laser pulsé très puissant!

2. Miroirs plans. Interférences.

2.1. Miroir de Lloyd.

- 2.1.1. dispositif à division de front d'onde.
 Les intensités I_1 et I_2 provenant de S_2 c'est à dire S et S_2 symétrique de S /miroir sont égales.



- 2.1.2. Le champ d'interférences correspond à BN' (voir figure)

Les sources secondaires sont cohérentes synchrones mais en opposition de phase.

2.1.3. $\delta = (S_2H - SH) + \frac{\lambda}{2} = \frac{2hx}{d+l} + \frac{\lambda}{2}$ (voir cours) $p = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{2hx}{(d+l)\lambda} + \frac{1}{2}$

- 2.1.4. $I(x) = 2I_1(1 + \cos 2\pi p)$ les franges sont des droites // perpendiculaires au plan de figure.

La frange "centrale" est en B , elle correspond à $p = \frac{1}{2}$, elle est noire.

(Si on appelle frange "centrale" celle qui est dans le plan médiateur de SS_2)

2.1.5. interférence: $\frac{2hi}{(d+l)\lambda} = 1 \rightarrow i = \frac{\lambda(d+l)}{2h} = 2,53 \cdot 10^{-4} \text{ m}$.

largeur de la zone d'interférences: $BN' = \frac{h\lambda}{d} = 0,6 \cdot 10^{-3}$.

$\frac{BN'}{i} = 2,37$ $\rightarrow$ 2 franges brillantes: $N_B = 2$.

2.1.6 Application.

2.1.6.1

voir figure: $\Delta' \approx 2z \sin \theta$

$\rightarrow \delta' = 2z \sin \theta + \frac{\lambda}{2}$ avec $\lambda' = \frac{c}{N'} = 3 \text{ m}$.

$p' = \frac{2z \sin \theta}{\lambda'} + \frac{1}{2}$

$\rightarrow i = \frac{\lambda'}{2 \sin \theta}$ avec $\sin \theta \approx \frac{h}{10000}$

pour $h = 10 \text{ m}$ $i = \frac{3 \cdot 10^4}{20} = 1500 \text{ m}$

$h = 700 \text{ m}$ $i = \frac{3 \cdot 10^4}{1400} = 21 \text{ m}$.

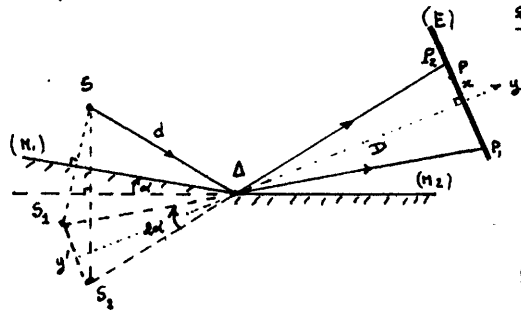
Au niveau de $\frac{i}{2}$ pour z on a un maximum d'amplitude, donc pour $h = 700 \text{ m}$ le maximum de réception sera obtenu pour $z \approx 10 \text{ m}$.

- 2.1.6.2 Question: Le facteur de réflexion R_L est-il en amplitude ou en intensité? Je le suppose en intensité $R_L = \frac{I_2}{I_1}$

dans ce cas $I'(z) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos 2\pi p'$

$\rightarrow G = \frac{4\sqrt{I_1 I_2}}{2(I_1 + I_2)} = \frac{2\sqrt{0,8}}{1,8} = 0,99$. le contraste reste excellent

2.2 Miroirs de Fresnel.



2.2.1 $\lambda_0 = 632,8 \text{ nm}$.

2.2.1.1. $S_1, S_2 \sim 2 \text{ cm}$.

$\delta(x) = \frac{2\alpha d x}{d + D}$

$I = 2I_0 \left(1 + \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda_0}\right)$

2.2.1.2 $i = \frac{\lambda_0(d + D)}{2\alpha d} = \frac{1,2 \cdot 10^{-3}}{2\alpha d}$

$\alpha = \frac{3}{60} \times \frac{\pi}{180} = 8,73 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$

$l = P_1 P_2 \neq 2\alpha D = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}$.

2.2.2. $\lambda_1 = 577 \text{ nm}$ $\lambda_2 = 579,1 \text{ nm}$.

2.2.2.1 $I' = I_1 + I_2 = 2I_0' \left(1 + \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda_1}\right) + 2I_0' \left(1 + \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda_2}\right)$
Sources non synchrones.

$I' = 4I_0' \left(1 + \cos \frac{2\pi \delta}{2} \left[\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right] \cos \frac{2\pi \delta}{2} \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)\right)$

2.2.2.2. L'interfrange permet de déterminer $\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}$

La première annulation de contraste correspond à $\pi \delta \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) = \frac{\pi}{2}$

$\rightarrow \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) \times \frac{2\alpha d x}{d + D} = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{d + D}{4\alpha d \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)} = 0,151 \text{ m}$.

ce qui est $\gg$ à la largeur du champ d'interférences.

La mesure est donc impossible.

Partie B: ELECTROMAGNETISME

1. Onde quasi monochromatique.

$\Psi(z, t) = \Psi_0 e^{j(\omega t - k z)}$

1.1. $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = -k^2 \Psi$ $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -\omega^2 \Psi = \frac{\omega^2}{k^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = v^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}$

L'équation de propagation est vérifiée.

$|\Psi(z, t)|^2 = \Psi \Psi^* = \Psi_0^2 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_0^2 dz \rightarrow \infty$ La condition énergétique n'est pas vérifiée.

1.2 $\Psi'(z, t) = \Psi_1(z, t) + \Psi_2(z, t)$ avec $\Psi_1(z, t) = A e^{j(\omega_1 t - k_1 z)}$
et $\Psi_2(z, t) = A e^{j(\omega_2 t - k_2 z)}$

et $\omega_1 = \omega_0 - \Delta\omega$ $k_1 = k_0 - \Delta k$
 $\omega_2 = \omega_0 + \Delta\omega$ $k_2 = k_0 + \Delta k$

$\Psi'(z, t) = A \left[e^{j(\omega_0 - \Delta\omega)t - (k_0 - \Delta k)z} + e^{j(\omega_0 + \Delta\omega)t - (k_0 + \Delta k)z} \right]$

$\Psi'(z, t) = A \left[e^{j(\omega_0 t - k_0 z)} e^{j(\Delta k z - \Delta\omega t)} + e^{j(\omega_0 t - k_0 z)} e^{j(\Delta\omega t - \Delta k z)} \right]$

$= 2A e^{j(\omega_0 t - k_0 z)} \cos(\Delta k z - \Delta\omega t)$

$\rightarrow \Psi_0'(z, t) = 2A \cos(\Delta k z - \Delta\omega t)$

le maximum de l'amplitude de l'onde est obtenu pour $\cos(\Delta k z - \Delta\omega t) = 1$

donc pour les couples (z, t) qui vérifient (à l'origine) $\frac{z}{t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = V$

1.2.2. L'onde $\Psi'(z, t)$ vérifie l'équation de propagation des ondes car Ψ_1 et Ψ_2 la vérifient.

Condition énergétique: $|\Psi'(z, t)|^2 = 4A^2 \cos^2(\Delta k z - \Delta\omega t)$

$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi'(z, t)|^2 dz = \int_0^{\frac{2\pi}{\Delta k}} 4A^2 \cos^2(\Delta k z - \Delta\omega t) dz$ car fonction périodique.

$= \frac{4A^2 \pi}{\Delta k}$ vérifie la condition énergétique

Mais ce n'est plus une onde monochromatique.

1.3 paquet d'ondes $\Psi''(z, t) = A \int_{k_0 - \frac{\Delta k}{2}}^{k_0 + \frac{\Delta k}{2}} e^{j(\omega t - k z)} dk$

1.3.1 On k_0 $v_g = \frac{\omega_0}{k_0}$ et $v_g = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k_0}$ $\omega(k) = \omega(k_0) + (k - k_0) \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k_0}$

$\rightarrow \omega = \omega_0 + v_g (k - k_0) = k_0 v_g + v_g (k - k_0)$

1.3.2 $\Psi''(z, t) = A \int_{k_0 - \frac{\Delta k}{2}}^{k_0 + \frac{\Delta k}{2}} e^{j((\omega_0 + v_g(k - k_0))t - (k - k_0)z - k_0 z)} dk$

$= A e^{j(\omega_0 t - k_0 z)} \int_{-\frac{\Delta k}{2}}^{+\frac{\Delta k}{2}} e^{j(k - k_0)(v_g t - z)} d(k - k_0)$

$= \frac{A e^{j(\omega_0 t - k_0 z)}}{j(v_g t - z)} \left(e^{j \frac{\Delta k}{2} (v_g t - z)} - e^{-j \frac{\Delta k}{2} (v_g t - z)} \right)$

$\Psi''(z, t) = \frac{2A e^{j(\omega_0 t - k_0 z)}}{v_g t - z} \sin \frac{\Delta k}{2} (v_g t - z)$

$\Psi_0''(z, t) = \frac{2A \sin \frac{\Delta k}{2} (v_g t - z)}{(v_g t - z)} = A \Delta k \frac{\sin \frac{\Delta k}{2} (v_g t - z)}{\frac{\Delta k}{2} (v_g t - z)}$

1.3.3. le caractère monochromatique de l'onde est suscité par le terme de propagation $e^{j(\omega_0 t - k_0 z)}$

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 \Delta R^2 \left(\frac{\sin \frac{\Delta R}{2} (v_g t - z)}{\frac{\Delta R}{2} (v_g t - z)} \right)^2 dz \quad \text{en posant } u = -\frac{\Delta R}{2} (v_g t - z) \\ du = +\frac{\Delta R}{2} dz$$

$$W = 2A^2 \Delta R \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 du = 2\pi A^2 \Delta R. \quad \text{Il faut que } A^2 \Delta R \text{ reste fini.}$$

Le maximum du paquet d'onde est obtenu pour $\sin u$ maximum.
c'est à dire pour $u=0$. Ce qui correspond aux couples (z, t) tels
que $\frac{z}{v_g} = v_g t$. La densité d'énergie est aussi maximum en ces
points. v_g représente donc la vitesse v_e de propagation de l'énergie.

$$1.3.4. \quad v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad \omega = kv_g \rightarrow \frac{d\omega}{dk} = v_g + k \frac{dv_g}{dk} = v_g + \frac{\omega}{v_g} \frac{dv_g}{d\omega} \frac{d\omega}{dk} \\ \rightarrow v_g \left(1 - \frac{\omega}{v_g} \frac{dv_g}{d\omega} \right) = v_g \rightarrow v_g = \frac{v_g}{1 - \frac{\omega}{v_g} \frac{dv_g}{d\omega}}$$

$$\text{Application: } \frac{dv_g}{d\omega} = c \left[\frac{\sqrt{\omega^2 - c^2 a^2} - \frac{\omega^2}{\sqrt{\omega^2 - c^2 a^2}}}{\omega^2 - c^2 a^2} \right] = \frac{-c^3 a^2}{(\omega^2 - c^2 a^2)^{3/2}} \\ -\frac{\omega}{v_g} \frac{dv_g}{d\omega} = \frac{\sqrt{\omega^2 - c^2 a^2}}{c} \frac{c^3 a^2}{(\omega^2 - c^2 a^2)^{3/2}} = \frac{c^2 a^2}{\omega^2 - c^2 a^2}$$

$$\rightarrow 1 - \frac{\omega}{v_g} \frac{dv_g}{d\omega} = \frac{\omega^2}{\omega^2 - c^2 a^2} \rightarrow v_g = \frac{c\omega}{\sqrt{\omega^2 - c^2 a^2}} \times \frac{\omega^2 - c^2 a^2}{\omega^2}$$

$$\rightarrow v_g = \frac{c}{\omega} \sqrt{\omega^2 - c^2 a^2} = \frac{c^2}{v_g} \quad ; \quad v_g v_g = c^2.$$

2. Onde entre deux plans parfaitement conducteurs

2.1. (voir cours) pour un conducteur imparfait de conductivité σ l'épaisseur
de peau, caractéristique de la pénétration de l'onde dans le milieu
est donnée par $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$. Quand $\sigma \rightarrow \infty$ (conducteur parfait) $\delta \rightarrow 0$

donc dans le conducteur $\vec{E} = \vec{0}$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{B} = \vec{0} \quad (\text{si non stationnaire.})$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \Rightarrow \vec{j} = \vec{0} \quad \text{et } \text{div } \epsilon_0 \vec{E} = \rho \Rightarrow \rho = 0$$

$$2.2. \quad E_{T2} - E_{T1} = 0$$

$$B_{N2} - B_{N1} = 0$$

$$E_{N2} - E_{N1} = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

$$B_{T2} - B_{T1} = -\mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n} \quad (\vec{n} \text{ normale au conducteur} \\ \text{de } v \text{ de vers le conducteur})$$

2.3 Montage en résonateur électromagnétique.

$$2.3.1 \quad \vec{E}_i = E_0 e^{j(\omega t + kx)} \vec{e}_y$$

$$\text{rot } \vec{E}_i = -\frac{\partial \vec{B}_i}{\partial t} \quad ; \quad +j k_A \vec{E}_i = +j \omega \vec{B}_i \Rightarrow -k E_0 e^{j(\omega t + kx)} (\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y) = \omega \vec{B}_i$$

$$\rightarrow \vec{B}_i = -\frac{k}{\omega} E_0 e^{j(\omega t + kx)} \vec{e}_z = -\frac{E_0}{c} e^{j(\omega t + kx)} \vec{e}_z$$

$$2.3.2 \quad \text{On a } \vec{E}_i(0, t) + \vec{E}_r(0, t) = \vec{0} \rightarrow \vec{E}_r(0, t) = -E_0 e^{j\omega t} \vec{e}_y \rightarrow \vec{E}_r(x, t) = -E_0 e^{j(\omega t - kx)} \vec{e}_y \\ j k_A \vec{E}_r = j \omega \vec{B}_r \quad + k (-E_0 e^{j(\omega t - kx)} \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y) = \omega \vec{B}_r \rightarrow \vec{B}_r(x, t) = -\frac{E_0}{c} e^{j(\omega t - kx)} \vec{e}_z$$

$$2.3.3. \quad \vec{E}(x, t) = E_0 e^{j\omega t} [e^{jkx} - e^{-jkx}] \vec{e}_y = 2j E_0 e^{j\omega t} \sin kx \vec{e}_y = 2E_0 e^{j(\omega t + \pi/2)} \sin kx \vec{e}_y \\ \vec{B}(x, t) = -\frac{E_0}{c} e^{j\omega t} [e^{jkx} + e^{-jkx}] \vec{e}_z = -\frac{2E_0}{c} e^{j\omega t} \cos kx \vec{e}_z$$

$$\text{rapport des modules: } \frac{E}{B} = c \tan kx.$$

2.3.4. Dans la cavité $\vec{E}$ doit s'annuler sur les 2 conducteurs.

$$\rightarrow \sin ka = 0 \rightarrow ka = N\pi = \frac{\omega a}{c} = \frac{2\pi f N a}{c} \rightarrow f_N = \frac{N}{2a} \frac{c}{a}$$

$$\text{A.N. pour } N=1 \quad f_1 = \frac{c}{2a} = \frac{3 \cdot 10^8}{2 \cdot 3 \cdot 10^{-2}} = 5 \text{ GHz}$$

$$2.3.5 \quad \vec{R}(x, t) = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = -\frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) \sin kx \cdot \cos \omega t \cos kx (\vec{e}_y \wedge \vec{e}_z) \\ = +\frac{4E_0^2}{\mu_0 c} \sin \omega t \cos \omega t \sin kx \cos kx \vec{e}_x = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \sin 2\omega t \sin 2kx \vec{e}_x$$

$\langle \vec{R}(x, t) \rangle_t = \vec{0}$. Onde stationnaire: pas de propagation de l'énergie.

$$2.3.6 \quad U(x, t) = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \sin^2 \omega t \sin^2 kx + \frac{1}{2\mu_0 c^2} E_0^2 \cos^2 \omega t \cos^2 kx \\ = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 [\sin^2 \omega t \sin^2 kx + \cos^2 \omega t \cos^2 kx]$$

$$\langle U(x, t) \rangle_t = \frac{1}{4} \epsilon_0 E_0^2$$

$$2.3.7 \quad \vec{B}(0, t) \wedge (-\vec{e}_z) = \mu_0 \vec{j}_s = -\frac{2E_0}{c} e^{j\omega t} (\vec{e}_y \wedge -\vec{e}_z) = \frac{2E_0}{c} e^{j\omega t} \vec{e}_y \\ \vec{j}_s = 2\epsilon_0 c E_0 e^{j\omega t} \vec{e}_y$$

$$2.3.8 \quad \frac{d\vec{F}}{ds} = \frac{1}{2} \vec{j}_s \wedge \vec{B}(0, t) = \frac{1}{2} \times 2\epsilon_0 c E_0 \cos \omega t \times \left(-\frac{2E_0}{c} \cos \omega t \right) (\vec{e}_y \wedge \vec{e}_z) \\ = -2\epsilon_0 E_0^2 \cos^2 \omega t \vec{e}_x$$

$$\langle p \rangle_t = +\epsilon_0 E_0^2$$

$$\text{A.N. } \langle p \rangle_t = \frac{1}{36\pi \cdot 10^5} = 8,84 \cdot 10^{-8} \text{ Pa.} \quad \langle U(x, t) \rangle_t = 2,2 \cdot 10^{-8} \text{ J.m}^{-3} \quad (\text{v Pa})$$

2.4 Montage en "guide d'ondes".

$$\vec{E}_1(x, z, t) = E_1(x) e^{j(\omega t - k_g z)} \vec{e}_y$$

$$2.4.1 \quad \text{Rot } \vec{E}_1 = -\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ E_1(x) e^{j(\omega t - k_g z)} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} j k_g E_1(x) e^{j(\omega t - k_g z)} \\ 0 \\ \frac{dE_1(x)}{dx} e^{j(\omega t - k_g z)} \end{vmatrix} \rightarrow \vec{B}_1 \begin{vmatrix} -\frac{k_g}{\omega} E_1(x) e^{j(\omega t - k_g z)} \\ 0 \\ \frac{j}{\omega} \frac{dE_1(x)}{dx} e^{j(\omega t - k_g z)} \end{vmatrix}$$

L'onde est "transverse électrique" car $\vec{B}_1$ a une composante longitudinale

$$2.4.2 \quad \text{Rot } \vec{B}_1 = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} = \frac{j\omega}{c^2} \vec{E}_1$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -\frac{k_g}{\omega} E_1(x) e^{j(\omega t - k_g z)} \\ 0 \\ \frac{j}{\omega} \frac{dE_1(x)}{dx} e^{j(\omega t - k_g z)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ j \frac{k_g^2}{\omega} E_1(x) e^{j(\omega t - k_g z)} - \frac{j}{\omega} \frac{d^2 E_1(x)}{dx^2} e^{j(\omega t - k_g z)} \\ 0 \end{vmatrix} = \frac{j\omega}{c^2} E_1(x) e^{j(\omega t - k_g z)}$$

$$\rightarrow (k_g^2 - \frac{\omega^2}{c^2}) E_1(x) = \frac{d^2 E_1(x)}{dx^2}$$

$$\text{div } \vec{E}_1 = \frac{\partial}{\partial y} (E_1(x) e^{j(\omega t - k_g z)}) = 0$$

$$\text{div } \vec{B}_1 = -\frac{k_g}{\omega} \frac{dE_1(x)}{dx} e^{j(\omega t - k_g z)} + \frac{k_g}{\omega} \frac{dE_1(x)}{dx} e^{j(\omega t - k_g z)} = 0 \quad \text{C.Q.F.D.}$$

$$2.4.3 \quad \text{si } k_g < \frac{\omega}{c} \quad \frac{d^2 E_1(x)}{dx^2} = -(\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2) E_1(x)$$

$$\rightarrow E_1(x) = \alpha \sin[\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2} x + \varphi]$$

$$E(0) = 0 \Rightarrow \varphi = 0$$

$$E(a) = 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2} a = N_1 \pi \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} E(0) = 0 \\ E(a) = 0 \end{matrix}} \right\} E_1(x) = \alpha \sin N_1 \pi \frac{x}{a}$$

$$2.4.4 \quad \rightarrow \vec{E}_1(x, z, t) = \alpha \sin \frac{N_1 \pi x}{a} e^{j(\omega t - k_g z)} \vec{e}_y$$

$$\vec{E}_1(x, z, t) = \alpha \sin \frac{N_1 \pi x}{a} \cos(\omega t - k_g z) \vec{e}_y$$

$$\vec{B}_1 \begin{vmatrix} -\frac{k_g}{\omega} \alpha \sin \frac{N_1 \pi x}{a} e^{j(\omega t - k_g z)} \\ 0 \\ \frac{j}{\omega} \alpha \frac{N_1 \pi}{a} \cos \frac{N_1 \pi x}{a} e^{j(\omega t - k_g z)} \end{vmatrix} \rightarrow \vec{B}_1 \begin{vmatrix} -\frac{k_g}{\omega} \alpha \sin \frac{N_1 \pi x}{a} \cos(\omega t - k_g z) \\ 0 \\ -\frac{\alpha N_1 \pi}{\omega a} \cos \frac{N_1 \pi x}{a} \sin(\omega t - k_g z) \end{vmatrix}$$

$$2.4.5 \quad k_g = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{N_1^2 \pi^2}{a^2}} \quad k_g \text{ existe si } \omega > \omega_c = \frac{\pi c}{a} N_1 \rightarrow f_c = \frac{c}{2a} = 5 \text{ GHz}$$

pour $N_1 = 1$

$$2.4.6 \quad v_g = \frac{\omega}{k_g} = \frac{\omega c}{\sqrt{\omega^2 - \frac{\pi^2 c^2}{a^2}}} = \frac{2\pi f c}{\sqrt{4\pi^2 f^2 - \frac{4\pi^2 c^2}{a^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{f_c^2}{f^2}}}$$

$$\text{A.N. } v_g = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{1}{9}}} = \frac{3c}{2\sqrt{2}}$$

$$2.4.7 \quad \vec{R}_1 = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}_1 \wedge \vec{B}_1 = \begin{vmatrix} -\frac{\alpha^2}{\mu_0} \frac{\pi}{a\omega} \sin \frac{\pi x}{a} \cos N_1 \frac{\pi x}{a} \cos(\omega t - k_g z) \sin(\omega t - k_g z) \\ 0 \\ + \frac{k_g \alpha^2}{\mu_0 \omega} \sin^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2(\omega t - k_g z) \end{vmatrix}$$

$$\langle \vec{R}_1(x, z, t) \rangle_t = \frac{k_g \alpha^2}{2\mu_0 \omega} \sin^2 \frac{\pi x}{a} \vec{e}_z$$

$$2.4.8 \quad \Phi_m = \frac{k_g \alpha^2 b}{2\mu_0 \omega} \int_0^a \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx = \frac{k_g \alpha^2 ab}{4\mu_0 \omega} = \frac{\epsilon_0 \alpha^2 c^2 ab}{4 v_g}$$

$$2.4.9 \quad u_1(x, z, t) = \frac{1}{2} \epsilon_0 \alpha^2 \sin^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2(\omega t - k_g z) + \frac{\alpha^2}{2\mu_0} \left[\frac{k_g^2}{\omega^2} \sin^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2(\omega t - k_g z) + \frac{\pi^2}{a^2 \omega^2} \cos^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2(\omega t - k_g z) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 \alpha^2 \left[\left(1 + \frac{k_g^2 c^2}{\omega^2}\right) \sin^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2(\omega t - k_g z) + \frac{\pi^2 c^2}{a^2 \omega^2} \cos^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2(\omega t - k_g z) \right]$$

$$\langle u_1(x, z, t) \rangle_t = \frac{\epsilon_0 \alpha^2}{4} \left(\left(1 + \frac{k_g^2 c^2}{\omega^2}\right) \sin^2 \frac{\pi x}{a} + \frac{\pi^2 c^2}{a^2 \omega^2} \cos^2 \frac{\pi x}{a} \right)$$

$$2.4.10 \quad \langle u_1(x, z, t) \rangle_t = \frac{dW_m}{dx dy dz} \rightarrow \frac{dW_m}{dz} = \frac{\epsilon_0 \alpha^2}{4} b \int_0^a \left[\left(1 + \frac{k_g^2 c^2}{\omega^2}\right) \sin^2 \frac{\pi x}{a} + \frac{\pi^2 c^2}{a^2 \omega^2} \cos^2 \frac{\pi x}{a} \right] dx$$

$$= \frac{\epsilon_0 \alpha^2}{8} ba \left(1 + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2} \right) \frac{c^2}{\omega^2} + \frac{\pi^2 c^2}{a^2 \omega^2} \right)$$

$$= \frac{\epsilon_0 \alpha^2}{4} ba = \frac{\epsilon_0 \alpha^2 S}{4}$$

$$\Phi_m = \frac{dW_m}{dz} v_g = \frac{\epsilon_0 \alpha^2 c^2 S}{4 v_g} \rightarrow v_g = \frac{c^2}{v_g} = c \sqrt{1 - \frac{f_c^2}{f^2}}$$

On retrouve la vitesse de groupe vue pour le paquet d'onde.

$$v_g = \frac{c x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$v_g = \frac{c \sqrt{x^2 - 1}}{x}$$

