

Corrigé CCP 2010 PC Physique 2

Problème I: Interférométrie à deux ondes

Francis BROUCHIER

2 juin 2010

1 Le champ électromagnétique dans le vide

1.1 Unités de ε_0 et μ_0

En partant de la formule donnant la capacité d'un condensateur plan dans le vide $C = \varepsilon_0 \cdot S / e$, on voit que ε_0 s'exprime en $\text{Farad} \cdot \text{m}^{-1}$.

De la même façon μ_0 s'exprime en $\text{Henry} \cdot \text{m}^{-1}$.

1.2 Équations de Maxwell dans le vide

En l'absence de charges et de courants ($\rho = 0 \quad \vec{j} = \vec{0}$) sur les quatre équations de Maxwell, seules trois portent un deuxième nom du au physicien qui a découvert la loi intégrale dont elle est issue. En pratique on se contente de les numéroter suivant un usage constant :

$$(1) \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{Maxwell - Faraday}$$

$$(2) \quad \text{div} \vec{E} = 0 \quad \text{Maxwell - Gauss}$$

$$(3) \quad \text{div} \vec{B} = 0 \quad \text{Maxwell tout court}$$

$$(4) \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \varepsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{Maxwell - Ampère}$$

1.3 Équation de propagation

On prend le rotationnel de l'équation (1) et la dérivée par rapport au temps de l'équation (4) et on élimine $\vec{B}$ entre les deux :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B})}{\partial t} \quad \frac{\partial(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B})}{\partial t} = \varepsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \Delta \vec{E} - \varepsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

On obtient l'équation de d'Alembert dans l'espace et la vitesse de propagation de l'onde est telle que

$$\varepsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot c^2 = 1$$

2 L'onde progressive unidirectionnelle dans le vide

2.1 Direction et sens de propagation

Cette onde ne dépend que de la variable d'espace x , elle se déplace donc le long de l'axe des x et dans le sens des x croissants. Avec la relation de Maxwell-Gauss on peut écrire $\partial E_x / \partial x = 0$, les autres termes étant nuls. E_x ne peut être que constant, or il dépend du temps et la constante ne peut être que nulle soit $E_1 = 0$.

2.2 Composantes de $\vec{B}$

$\vec{E}$ ne dépendant que de x et E_x étant nul, on peut écrire :

$$\vec{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial E_z}{\partial x}\vec{u}_y + \frac{\partial E_y}{\partial x}\vec{u}_z = -\frac{\partial B_y}{\partial t}\vec{u}_y - \frac{\partial B_z}{\partial t}\vec{u}_z$$

En tenant compte que $\vec{B}$ a la même forme mathématique que $\vec{E}$ (fonction sinusoïdale du temps et de l'espace) et en projetant sur les axes $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ on a :

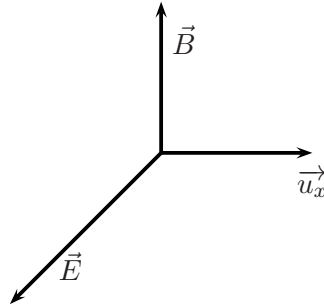
$$\frac{\omega}{c}E_3 \cdot \cos\omega(t - \frac{x}{c}) = -\omega B_y \quad \frac{\omega}{c}E_2 \cdot \cos\omega(t - \frac{x}{c}) = \omega B_z$$

Les composantes de $\vec{B}$ sont alors :

$$\boxed{B_x = 0} \quad \boxed{B_y = -\frac{E_3}{c} \cos\omega(t - \frac{x}{c})} \quad \boxed{B_z = \frac{E_2}{c} \cos\omega(t - \frac{x}{c})}$$

Comme $\vec{E} = E_y\vec{u}_y + E_z\vec{u}_z$ le terme $\vec{u}_x \wedge \vec{E} = E_y\vec{u}_z - E_z\vec{u}_y$.

En comparant avec la relation précédente on constate que $E_z/c = B_y$ et $E_y/c = B_z$. Cela revient à dire que l'on obtient $\vec{B}$ en faisant une rotation de $\pi/2$ dans le sens direct autour de Ox .



Cette onde est une onde plane progressive, longitudinale et monochromatique (fonction sinusoïdale du temps de pulsation fixe). L'auteur du corrigé se demande le sens de la question : "en préciser la signification physique ?". Aussi ne peut-il y répondre.

2.3 Vecteur de Poynting

Dans le vide, en présence de champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ le vecteur de Poynting est défini par la relation $\vec{R} = \vec{E} \wedge \vec{B}/\mu_0$. Dans le cas présent ces deux vecteurs étant perpendiculaires et perpendiculaires à la direction de propagation on peut écrire : $\vec{R} = \vec{u}_x \cdot ||\vec{E}||^2/\mu_0 \cdot c$.

Le flux du vecteur de Poynting à travers une surface interceptant cette onde représente la puissance instantanée à travers cette surface. Pour une onde monochromatique et sous incidence normale à travers une surface unité la valeur moyenne du carré d'une fonction sinusoïdale du temps étant la moitié du carré de sa valeur maximum on écrit :

$$\mathcal{E} = E^2/2 \cdot \mu_0 \cdot c \quad E^2 = E_2^2 + E_3^2 \quad \boxed{\mathcal{E} = \frac{E_2^2 + E_3^2}{2 \cdot \mu_0 \cdot c}}$$

3 Superposition de deux ondes monochromatiques et conditions d'interférences

3.1 Conditions d'obtention d'interférences

La première condition est que ces deux ondes aient la même pulsation (ou la même longueur d'onde). De plus il faut qu'en un point la différence de phase entre les deux signaux reste constante pour que la somme des cosinus ne varie pas dans le temps.

3.2 sources de lumière distinctes

L'émission de lumière par un atome se produit quand un électron passe d'un état d'énergie supérieur à un état inférieur. La fréquence produite étant telle que $\Delta W = h.\nu$. Cette émission ne peut durer un temps infini et elle est remplacée par l'émission d'un autre atome sans liaison de phase avec le premier. Ainsi deux sources distinctes ne peuvent émettre deux ondes monochromatiques ayant une relation de phase entre elles.

3.3 Réalisation pratique

Pour avoir deux ondes avec une relation de phase constante il faut partir d'une seule source et en obtenir deux images en optique géométrique. Mais il faut que les trajets optiques ne soient pas trop différents sans quoi l'émission d'un atome peut se superposer à celle d'un autre atome et ne plus donner d'interférences : c'est la longueur de cohérence.

3.4 Familles de systèmes interférentiels

A partir d'une même source lumineuse il faut obtenir deux ondes ayant une relation de phase constante entre elles. On peut y arriver de deux façons :

soit par division d'amplitude à l'aide d'un miroir semi-réfléchissant, qui réfléchit, en gros, la moitié de la lumière et en laisse passer l'autre moitié. Dans cette famille on trouve l'interféromètre de Michelson et Morley rendu célèbre par sa tentative de mettre en évidence la course de la Terre autour du Soleil et dont l'insuccès a conduit à la théorie de la relativité restreinte d'Einstein (On oublie trop souvent qu'il existait la théorie de la relativité restreinte de Galilée pour les lois de la mécanique). L'interféromètre de Mach-Zehnder (objet du problème) et l'interféromètre de Sagnac prolongent une liste non exhaustive.

soit par division du front d'onde qui ont donné lieu aux premières réalisations expérimentales mettant en évidence le caractère sinusoïdal des ondes lumineuses : les fentes d'Young, les miroirs de Fresnel, le biprisme de Fresnel et la bilentille de Billet.

3.5 Relation entre éclairement et amplitude

On a vu, plus haut, que pour une onde monochromatique on pouvait écrire : $\mathcal{E}_0 = E_0^2/2\mu_0.c$. Les deux ondes considérées ont la même polarisation et la même amplitude E_0 . La seule chose que l'énoncé ne dit pas est qu'elles ont un déphasage constant que nous désignerons par Φ (comme cela est précisé plus loin). Ainsi l'éclairement total vaut $\mathcal{E} = 2.\mathcal{E}_0.(1 + \cos \Phi)$.

4 Dispositif interférentiel

4.1

La source S placée au foyer objet d'une lentille convergente fournit, après traversée de la lentille, une onde plane. Cette onde est divisée en deux ondes égales par (SP_1) , se réfléchissent sur (M_1) et (M_2) et s'ajoutent sur (SP_2) . Si on admet que les trajets de ces ondes ont rigoureusement la même longueur (selon la figure) après (SP_2) ces ondes sont en phase et l'éclairement de l'écran vaut $4.\mathcal{E}_0$. La tache lumineuse sur l'écran est donc brillante.

4.2 Lames à faces parallèles

4.2.1

Sur le parcours de (M_1) à (SP_2) la différence de marche supplémentaire introduite par (L_1) vaut $\delta_1 = e.(n - 1)$

4.2.2

L'angle de réfraction dans la lame est tel que $\sin \theta = n.\sin \theta'$. Le chemin optique $\mathcal{L}(A'B') = n.A'B' = n.e/\cos \theta'$. Au troisième ordre près en θ on peut écrire $\theta \sim n\theta'$ et $\cos \theta' \sim (1 - \theta'^2/2) \sim (1 - \theta^2/(2.n^2))$.

En faisant les calculs au second ordre près en θ on obtient $\mathcal{L}(A'B') = n.e.(1 + \theta^2/(2.n^2))$.

Par ailleurs $A'H' = A'B'.\cos(\theta - \theta') = A'B'.[\cos\theta.\cos\theta' + \sin\theta.\sin\theta'] \sim A'B'[(1 - \theta^2/2)(1 - \theta^2/2n^2) + \theta.\theta/n]$. Soit en simplifiant $A'H' \sim e.(1 - \theta^2/2 + \theta^2/n)$.

$\mathcal{L}(A'B')$ est le chemin optique parcouru dans la lame, $A'H'$ est le chemin optique qui serait parcouru dans l'air si la lame n'existait pas. La différence de marche supplémentaire vaut donc $\delta_2 \sim e.(n - 1 - \theta^2/2.n + \theta^2/2)$ soit $\delta_2 \sim e(n - 1) + e.\theta^2.(1/2 - 1/2.n)$.

4.2.3

Le déphasage Φ des faisceaux au niveau de l'écran vaut $2\pi.(\delta_2 - \delta_1)/\lambda$ soit $\Phi = 2\pi.e.\theta^2(1/2 - 1/2.n)/\lambda$. Le déphasage Φ ne dépend que de θ^2 et de constantes. Quand Φ est un multiple entier de 2π l'éclairement de l'écran est maximal $\cos\Phi = 1$, quand Φ est de la forme $(2.k + 1).\pi$ $\cos\Phi = -1$ et l'éclairement est nul.

4.3 Valeur de θ

4.3.1

On a vu qu'on a un maximum de brillance pour $\Phi = k.2\pi$, donc :

$$\theta = \sqrt{\frac{k.\lambda}{e.(1/2 - 1/2.n)}}$$

Avec les valeurs numériques de l'énoncé on obtient : $\theta_1 = 0,0612 \text{ rad} = 3,505 \text{ degré}$

4.3.2

L'épaisseur de la lame apparaît au dénominateur de la valeur de θ . Pour gagner en sensibilité sur θ il faut donc diminuer e .

4.3.3 Épaisseur maximale de la lame

La longueur de cohérence de la source est la longueur pendant laquelle la source conserve une phase constante. Pour obtenir des interférences il faut donc éviter que la différence de marche entre les deux ondes issues de la même source soit supérieure à cette longueur. On devra donc avoir $\delta_2 - \delta_1 < l_c$ soit pour $k = 1$ $e.\theta^2.(1/2 - 1/2.n) < l_c$. On doit donc avoir :

$$e < \frac{l_c}{\theta^2.(1/2 - 1/2.n)} \sim 197 \text{ mm}$$

Cette valeur semble relativement élevée car le déphasage Φ augmente avec l'épaisseur de la lame. Pour obtenir de bons résultats il vaut mieux prendre une valeur beaucoup plus faible de l'ordre de 10 mm .

4.4 Source polychromatique

Quand le déphasage $\Phi = (2.k + 1)\pi$ l'éclairement sur l'écran est nul, la longueur d'onde correspondante est absente. L'épaisseur de la lame, l'angle θ et l'indice ne changent pas, pour $\lambda_1 = 632,8 \text{ nm}$ $\Phi = 2\pi$, donc la constante $e.\theta^2.(1/2 - 1/2.n) = \lambda_1$. La condition pour avoir un éclairement nul s'écrit alors : $(2.k + 1)\pi = 2\pi.\lambda_1/\lambda$ soit $\lambda = 2.\lambda_1/(2.k + 1)$. On essaie les valeurs entières successives de k : $k = 0$ $\lambda = 1265,6 \text{ nm}$, en dehors du domaine de la lumière blanche ; $k = 1$ $\lambda = 421,9 \text{ nm}$ et $k = 2$ $\lambda = 253,1 \text{ nm}$ en dehors du domaine.

La couleur obtenue sur l'écran est appelée la teinte sensible.

5 lame à indice variable

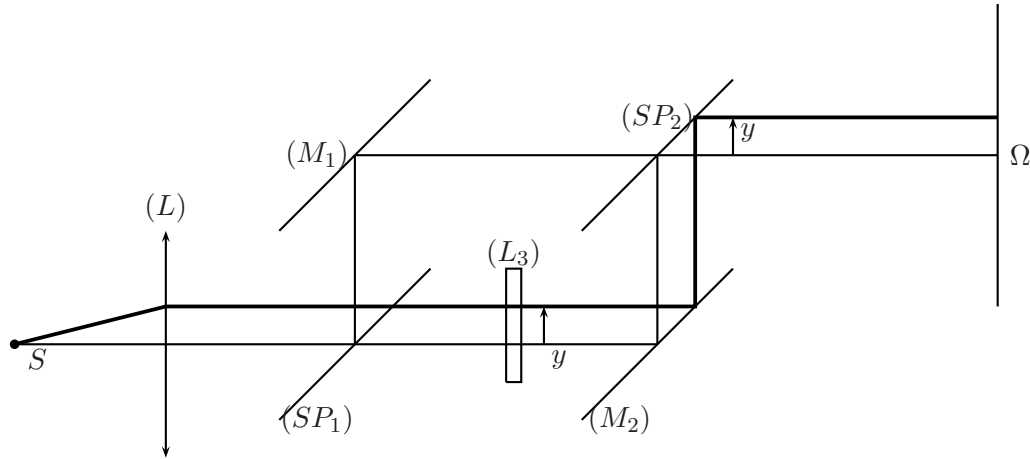
5.1 Orientation du gradient

n' ne dépend que de y son gradient est le vecteur tel que $\overrightarrow{\text{grad}n'} = \partial n' / \partial y \vec{u}_y = -\gamma \cdot \vec{u}_y$. Le gradient de l'indice est donc orienté dans le sens des y décroissants.

5.2

La différence de marche pour le seul rayon atteignant la lame (L_3) vaut $\delta_3 = e.(n' - 1) = e.(n - 1 - \gamma y)$

5.3 tracé du rayon traversant (L_3)



L'ordonnée $Y = \Omega M$ du point d'impact du rayons sur l'écran sera justement y .

5.4 Différence de marche globale δ

La différence de marche globale entre les deux rayons vaut $\delta_3 - \delta_1$ soit $\delta = -e.\gamma.y$

5.5 interférences sur l'écran

La différence de marche est fonction de y , le déphasage entre les deux ondes sera $\Phi = 2.\pi.\delta/\lambda = -2.\pi.e.\gamma.y/\lambda$. Il y aura donc des interférences lumineuses parallèles à l'axe de z . Les franges brillantes seront telles que $\Phi = 2.k.\pi = -2.\pi.e.\gamma.y/\lambda$ soit $y = -k.\lambda/e.\gamma$. La valeur absolue de l'interfrange est alors de $i = \lambda/e.\gamma$.

Avec les valeurs numériques de l'énoncé on trouve $i = 546.10^{-9}/10.10^{-3} = 5,46.10^{-5} \text{ m} = 54,6 \text{ } \mu\text{m}$.

Corrigé CCP 2010 PC Physique 2

Problème II: Gain de temps et économie d'énergie

Francis BROUCHIER

18 juin 2010

1 Approche simplifiée du comportement thermique d'un habitat ; optimisation du temps de mise en température

1.1 Modélisation sommaire

1.1.1

En électricité on écrit pour une résistance R traversée par un courant I aux bornes de laquelle existe une différence de tension ΔV : $\Delta V = R.I$. En thermodynamique on transpose ΔV en $\Delta\theta$, R en R_{th} et I en Φ , ce qui donne $\Delta\theta = R_{th}.\Phi$. Avec $\Delta\theta$ en $^{\circ}\text{C}$ ou en K (le problème utilise les deux options), Φ est en *Watt* (unité de puissance) et R_{th} en $^{\circ}\text{C}/\text{W}$ (unité fréquemment utilisée en électronique pour les radiateurs des transistors de puissance).

1.1.2

En électricité on écrit pour un condensateur $Q = C.V$ et $I = dQ/dt = C.dV/dt$. En transposant en thermodynamique on écrit : $\phi = C_{th}.d\theta/dt$ avec Φ en *Watt*, $d\theta/dt$ en $^{\circ}\text{C}/\text{s}$ et C_{th} en *Joule*/ $^{\circ}\text{C}$.

1.1.3 a) Loi des nœuds

$$\Phi = C_{th} \cdot \frac{d\theta}{dt} + \frac{\theta(t) - \theta_e}{R_{th}}$$

b) Si $\theta = \theta_c$ constante $d\theta/dt = 0$ ce qui donne :

$$\Phi_0 = \frac{\theta_c - \theta_e}{R_{th}} \quad \text{A.N.} \quad \Phi_0 = 6 \text{ kW}$$

1.2 Mise en température

1.2.1 Mise en température sous flux constant

a) $\Phi_0 = C_{th}d\theta/dt + (\theta(t) - \theta_e)/R_{th} = C_{th}d(\theta(t) - \theta_e)/dt + (\theta(t) - \theta_e)/R_{th}$. On obtient une équation différentielle du premier ordre avec second membre dont la solution est :

$$\frac{d(\theta(t) - \theta_e)}{dt} + \frac{1}{R_{th}.C_{th}}.(\theta(t) - \theta_e) = \frac{\Phi_0}{C_{th}} \quad \theta(t) - \theta_e = R_{th}.\Phi_0[1 - \exp(-t/\tau_0)]$$

b) Avec les valeurs numériques de l'énoncé on trouve :

$$t \sim 3.\tau_0 = 22500\text{s} = 6\text{h } 15\text{mn}$$

1.2.2 Chauffage forcé au départ puis réduit en fonction du temps

a) On remplace Φ_0 par $\Phi_1(t)$ et on obtient l'équation différentielle :

$$\frac{d(\theta(t) - \theta_e)}{dt} + \frac{1}{\tau_0}(\theta(t) - \theta_e) = \frac{\Phi_0}{R_{th}}(1 + 9 \exp[-t/\tau])$$

b) Connaissant la solution générale de cette équation pour déterminer la constante A on écrit que $\theta(0) = \theta_e$ et on obtient :

$$A = \frac{(\theta_c - \theta_e) \cdot (\tau_0/\tau - 10)}{1 - \tau_0/\tau} \quad A = 0 \quad \tau = \frac{\tau_0}{10}$$

c) Avec cette valeur on obtient :

$$\theta(t) = \theta_c - (\theta_c - \theta_e) \exp(-t/\tau)$$

un calcul analogue donne pour le temps t $t \sim 2250 \text{ s} \sim 37,5 \text{ mn}$

1.2.3 Chauffage évolutif en fonction de la température intérieure atteinte

a) Pour obtenir cette équation on remplace Φ_0 par Φ_2 et il vient :

$$\frac{d(\theta(t) - \theta_e)}{dt} + \frac{1}{\tau_0}(\theta(t) - \theta_e) = \frac{k}{R_{th}}[\theta_c - \theta(t)] + \frac{k'}{R_{th}} \cdot \int_0^t [\theta_c - \theta(u)] du$$

En dérivant cette équation par rapport au temps on aboutit à l'équation différentielle du second ordre demandée :

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{1}{\tau_0} \frac{d\theta(t)}{dt} + \frac{k}{R_{th}} \frac{d\theta(t)}{dt} + \frac{k'}{R_{th}} \theta(t) = \frac{k'}{R_{th}} \theta_c$$

En régime établi les dérivées par rapport au temps sont nulles et il reste $k'[\theta_c - \theta(t)] = 0$ soit $\theta(t) = \theta_c$.

b) L'équation différentielle est du second ordre avec second membre constant. Sa solution générale est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de l'équation avec second membre. Le terme r est obtenu comme solution de l'équation du second degré en r :

$$r^2 + \left(\frac{1}{\tau_0} + \frac{k}{R_{th}}\right) \cdot r + \frac{k'}{R_{th}} = 0$$

Le régime critique est atteint lorsque le discriminant de cette équation est nul $\Delta = 0$ et la valeur de r est :

$$r = -\left(\frac{k}{2 \cdot R_{th}} + \frac{1}{2 \cdot \tau_0}\right)$$

On désire :

$$\tau' = -\frac{1}{r} = \frac{\tau_0}{10} = \frac{2 \cdot R_{th} \cdot \tau_0}{k \cdot \tau_0 + R_{th}} \quad 20 \cdot R_{th} = R_{th} + k \cdot \tau_0 \quad k = \frac{19 \cdot R_{th}}{\tau_0}$$

En écrivant que le discriminant de l'équation est nul on trouve la valeur de k' :

$$\left(\frac{1}{\tau_0} + \frac{19}{\tau_0}\right)^2 = \frac{4 \cdot k'}{R_{th}} \quad k' = \frac{R_{th}}{4} \cdot \left(\frac{20}{\tau_0}\right)^2$$

c) Pour $t = 0$ $\theta(0) = \theta_e$ soit $A' = \theta_e - \theta_c$. En dérivant l'expression de $\theta(t)$ on trouve :

$$\frac{d\theta}{dt} = r A' \exp(rt) + A'' \exp(rt) + A'' t r \exp(rt) \quad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{t=0} = r \cdot A' + A'' = \frac{k}{R_{th}} [\theta_c - \theta_e] \quad A'' = \frac{9}{\tau_0} (\theta_c - \theta_e)$$

2 Économie d'énergie

2.1 Économie sur le chauffage de l'air neuf d'un logement

2.1.1 Déperditions dues au renouvellement de l'air vicié par appel d'air neuf

On peut admettre que la pression de l'air intérieur est la même que celle de l'air extérieur. En admettant que le volume d'air à renouveler est de $300 \text{ m}^3/\text{h}$ et en appliquant la formule de l'énoncé $\Phi_{net} = \Phi_i - \Phi_e = 0,34\mathcal{D}(20 - 5)$, on trouve $\Phi_{net} = 1530 \text{ W}$

2.1.2 Récupération de chaleur sur l'air extrait avec un échangeur à contre-courant

a) On écrit que le flux élémentaire échangé est égal au produit de la conductance élémentaire $g \cdot dx$ par la différence de température : $d\Phi_{éch} = (\theta_c - \theta_f)g \cdot dx$

b) On écrit la loi des nœuds en $\theta_c(x)$, ce qui donne : $G(\theta_c(x - dx) - G\theta_c(x) = d\Phi_{éch}$

c) $G\theta_f(x + dx) - G\theta_f(x) = -d\Phi_{éch}$

d) En faisant un développement limité au premier ordre on obtient :

$$G[\theta_c(x) - \frac{d\theta_c}{dx} \cdot dx] - G\theta_c(x) = d\Phi_{éch} \quad G[\theta_f(x) + \frac{d\theta_f}{dx} \cdot dx] - G\theta_f(x) = -d\Phi_{éch}$$

En remplaçant $d\Phi_{éch}$ par la valeur du a) il reste :

$$\frac{d\theta_c}{dx} = -\frac{g}{G}(\theta_c - \theta_f) \quad \frac{d\theta_f}{dx} = -\frac{g}{G}(\theta_c - \theta_f)$$

On remarque que $d\theta_c/dx = d\theta_f/dx$. En prenant les dérivées secondes, il vient :

$$\frac{d^2\theta_c}{dx^2} = -\frac{g}{G}(\frac{d\theta_c}{dx} - \frac{d\theta_f}{dx}) = 0 \quad \text{de même} \quad \frac{d^2\theta_f}{dx^2} = 0$$

Sachant que les dérivées secondes par rapport à x sont nulles on peut écrire $\theta_c = \alpha x + \beta$ et $\theta_f = \gamma x + \delta$, où α, β, γ et δ sont des constantes à déterminer par les conditions initiales. De $d\theta_c/dx + g\theta_c/G = g\theta_f/G$ on tire $G\alpha + g(\alpha x + \beta) = g(\gamma x + \delta)$. En identifiant les termes il vient $\alpha = \gamma$ et $G\alpha + g\beta = g\delta$ soit $\theta_c = \alpha x + \beta$ et $\theta_f = \alpha x + \beta + \alpha G/g$. En $x = 0$, $\theta_c = 20$, d'où $\beta = 20$. En $x = L = 15$ $\theta_f = 5 = 20 + \alpha(15 + G/g)$. Avec les valeurs numériques de l'énoncé $G/g = 11$ ce qui donne $\alpha = -0,58$. Finalement on obtient les valeurs demandées :

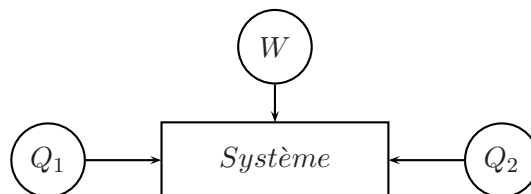
$$\theta_c = -0,58x + 20 \quad \theta_f = -0,58x + 13,6$$

e) En $x = 0$ $\theta_f = 13,6 \text{ }^\circ\text{C}$, le flux de chaleur net à fournir est donc $\Phi_{net} = 653 \text{ W}$. On économise 877 W en ne tenant pas compte de la puissance consommée par le ventilateur pour faire circuler l'air. Cette méthode porte le nom de "ventilation à double flux".

2.2 Pompe à chaleur à cycle de Stirling

2.2.1

Une pompe à chaleur prend de la chaleur à une source froide, y ajoute le travail d'un moteur et fournit au système la chaleur d'une source chaude.



Q_2 fourni au système est positif, Q_1 et W sont négatifs. Supposer le fonctionnement idéal revient à supposer que les transformations sont réversibles. On écrit alors les deux principes de la Thermodynamique :

$$Q_1 + Q_2 + W = 0 \quad \text{et} \quad Q_1/T_1 + Q_2/T_2 = 0.$$

2.2.2 Efficacité $e = Q_2/|W|$

$$Q_1 = -\frac{Q_2}{T_2}T_1 \quad Q_2(1 - \frac{T_1}{T_2}) + W = 0 \quad \boxed{e = \frac{T_2}{T_2 - T_1} = 8,66}$$

Pour une puissance de chauffage de $\Phi_0 = 6 \text{ kW}$ la puissance théorique du moteur est $P_{th} = 693 \text{ W}$. On réalise, théoriquement, une belle économie !

2.2.3 Cycle de Stirling

a) Le volume total est la somme de V_1 et de V_2 :

$$\boxed{V = V_1 + V_2 = V_0 \cdot (1 - \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{2})}$$

Le volume maximal est obtenu lorsque $\cos \alpha + \sin \alpha$ est minimal et négatif. En dérivant on obtient $\cos \alpha - \sin \alpha = 0$ dont la solution négative est $\alpha = 5\pi/4$, soit $\cos \alpha = \sin \alpha = -\sqrt{2}/2$, ainsi :

$$\boxed{V_M = V_0 \cdot (1 + \sqrt{2}/2)}$$

b) On écrit la loi des gaz parfaits $p_0 \cdot V_M = n \cdot R \cdot T_0$ ce qui donne :

$$\boxed{n = \frac{p_0 \cdot V_0 \cdot (1 + \sqrt{2}/2)}{R \cdot T_0} = 0,35 \text{ mole}}$$

c) La pression p est la même dans les deux cylindres. Le nombre de moles dans le cylindre 1 est $n_1 = p \cdot V_1 / R \cdot T_1$, de même dans le cylindre 2 $n_2 = p \cdot V_2 / R \cdot T_2$. La somme de ces deux nombres vaut n d'où on tire :

$$\boxed{p = \frac{n \cdot R}{V_1/T_1 + V_2/T_2}}$$

d) $dV_1 = V_0 \cdot \sin \alpha d\alpha / 2$ et $dV_2 = -V_0 \cdot \cos \alpha d\alpha / 2$. Après simplifications on obtient :

$$\boxed{J_1 = \int_{\alpha=0}^{2\pi} \frac{n \cdot R \cdot \sin \alpha d\alpha}{(1 - \cos \alpha)/T_1 + (1 - \sin \alpha)/T_2}} \quad \boxed{J_2 = \int_{\alpha=0}^{2\pi} \frac{-n \cdot R \cdot \cos \alpha d\alpha}{(1 - \cos \alpha)/T_1 + (1 - \sin \alpha)/T_2}}$$

Pour un tour J_1 est le travail reçu par le gaz dans le cylindre 1, d'où $S = J_1 + J_2$ est le travail total fourni par le moteur pour un tour.

$$I = \frac{J_1}{T_1} + \frac{J_2}{T_2} = \int_0^{2\pi} \frac{n \cdot R \cdot T_2 \cdot \sin \alpha d\alpha}{(1 - \cos \alpha)T_2 + (1 - \sin \alpha)T_1} - \int_0^{2\pi} \frac{n \cdot R \cdot T_1 \cos \alpha d\alpha}{(1 - \cos \alpha)T_2 + (1 - \sin \alpha)T_1}$$

Posons $T_2 \cos \alpha + T_1 \sin \alpha = -X$ d'où on tire $dX = (T_2 \sin \alpha - T_1 \cos \alpha) d\alpha$. L'intégrale I devient alors avec pour $\alpha = 0$ $X = -T_2$ et pour $\alpha = 2\pi$ $X = -T_2$:

$$I = n \cdot R \int_{-T_2}^{-T_2} \frac{dX}{T_1 + T_2 + X} = 0 \quad \boxed{\frac{J_1}{T_1} + \frac{J_2}{T_2} = 0}$$

$T_1 + T_2 - \sqrt{2T_1T_2} = (\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2})^2 > 0$ donc $\boxed{J_1 \text{ est positif} \quad J_2 \text{ est négatif}}$.

Pour un cycle de gaz dans les pistons J_1 et J_2 sont les quantités de chaleur échangées avec le milieu extérieur. J_1 échange avec l'air extérieur à $\theta_1 = 5^\circ \text{C}$, il reçoit de la chaleur et J_2 est la source chaude de la maison à $\theta_2 = 40^\circ \text{C}$. J_1 et J_2 sont donc les opposées des quantités de chaleur Q_1 et Q_2 pour un cycle. On peut remarquer qu'avec les formules données dans l'énoncé on retrouve bien $J_1/T_1 + J_2/T_2 = 0$.

2.2.4

On applique le premier principe $W + J_1 + J_2 = 0$. Pour un tour de moteur :

$$W = n.R.\pi \frac{\sqrt{2T_1T_2}}{T_1^2 + T_2^2} [T_1 + T_2 - \sqrt{2T_1T_2}] (T_2 - T_1)$$

Avec les valeurs numériques de l'énoncé $T_1 = 278 \text{ K}$ $T_2 = 313 \text{ K}$ $n = 0,35$ $R = 8,314$ $W = 132 \text{ J}$.
Or le moteur doit fournir une puissance de 693 W , soit faire $693/132$ tours par seconde, en multipliant par 60 on a vitesse de rotation = 165 tours/minute