

CCP 2010, Filière PSI, première épreuve de physique

Corrigé proposé par JPh Caniparoli ; pour me contacter (erreurs, ...) : artefact.act@wanadoo.fr

Plusieurs remarques sont regroupées à la fin du corrigé.

Problème A : Clarinette et saxophone soprano

Equation de propagation d'une onde sonore dans un tube

Bilan de masse sur un système ouvert

A.1

$$\begin{aligned} dm(t) &= \rho(x, t) S(x) dx = \{\rho_0 + \mu(x, t)\} S(x) dx \\ dm(t + dt) &= \rho(x, t + dt) S(x) dx = \{\rho_0 + \mu(x, t + dt)\} S(x) dx \end{aligned}$$

A.2

Les masses entrant et sortant sont les flux de masse traversant les surfaces $S(x)$ et $S(x + dx)$ dans le sens des x croissants multipliés par dt

$$\delta m_e = dt \iint_{S(x)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = dt \iint \rho(x, t) u(x, t) \vec{e}_x \cdot dS \vec{e}_x = \rho(x, t) u(x, t) S(x) dt$$

$$\delta m_s = dt \iint_{S(x+dx)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \rho(x + dx, t) u(x + dx, t) S(x + dx) dt$$

A.3

Le bilan de masse du système ouvert s'écrit

$$dm(t + dt) = dm(t) + \delta m_e - \delta m_s$$

$$\begin{aligned} \rho(x, t + dt) S(x) dx &= \rho(x, t) S(x) dx + \rho(x, t) u(x, t) S(x) dt - \rho(x + dx, t) u(x + dx, t) S(x + dx) dt \\ \{\rho(x, t + dt) - \rho(x, t)\} dx + \{\rho(x + dx, t) u(x + dx, t) S(x + dx) - \rho(x, t) u(x, t) S(x)\} dt &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dt S(x) dx + \frac{\partial(\rho S u)}{\partial x} dx dt = 0$$

On utilise $S\rho(x, t) = \rho_0 + \mu(x, t)$ et on simplifie par $dt dx$

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial(Su)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu Su)}{\partial x} = 0$$

Les deux premiers termes sont d'ordre 1, tandis que le troisième est d'ordre 2 (produit μu). En se limitant à l'ordre 1

$$S \frac{\partial \mu}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial(Su)}{\partial x} = S \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial(Su)}{\partial x} = 0$$

Remarque : l'équation proposée par l'énoncé est correcte, mais peut être simplifiée.

Équation du mouvement

A.4

On calcule les ordres de grandeurs

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \approx \frac{U}{\tau} ; \left(\vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{u} \approx \frac{U^2}{L}$$

On déduit la condition à laquelle on peut négliger $\left(\vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{u}$ devant $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$

$$\frac{U^2}{L} \ll \frac{U}{\tau} ; U \ll \frac{L}{\tau}$$

A.5

On considère la vitesse u , et les écarts aux grandeurs d'équilibre μ et p comme des infiniment petits d'ordre 1. L'équation d'Euler s'écrit

$$(\rho_0 + \mu) \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{u} \right) = - \overrightarrow{\text{grad}} (P_0 + p) = - \frac{\partial p}{\partial t} \vec{e}_x$$

L'accélération convective, d'ordre 2 est négligeable devant l'accélération locale, d'ordre 1. De même $\rho_0 + \mu \approx \rho_0$ en ne gardant que le terme d'ordre principal. En se limitant à l'ordre 1, et en tenant compte du fait que les vecteurs sont selon $\vec{e}_x$

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x}$$

A.6

Le coefficient de compressibilité isentropique χ_S s'écrit

$$\chi_S = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_S = \frac{1}{\rho_0 + \mu} \left(\frac{\partial \rho_0 + \mu}{\partial P_0 + p} \right)_S = \frac{1}{\rho_0 + \mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial p} \right)_S$$

À l'ordre 1, μ varie linéairement avec p , puisque $\mu = 0$ lorsque $p = 0$. Par conséquent, en se limitant à l'ordre principal

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial p} \right)_S = \frac{\mu}{p} ; \chi_S(\rho_0) = \frac{1}{\rho_0} \frac{\mu}{p}$$

soit

$$\mu(x, t) = \rho_0 \chi_S(\rho_0) p(x, t)$$

A.7

On élimine μ entre les équations obtenues aux questions A.3 et A.6

$$S \frac{\partial \mu}{\partial t} = S \rho_0 \chi_S \frac{\partial p}{\partial t} = - \rho_0 \frac{\partial (Su)}{\partial x} ; \frac{\partial p}{\partial t} = - \frac{1}{S \chi_S} \frac{\partial (Su)}{\partial x}$$

On élimine ensuite u entre cette équation et celle obtenue à la question A5, en tenant compte de l'indépendance de $S(x)$ par rapport à t

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\frac{1}{\chi_S S} \frac{\partial(Su)}{\partial t \partial x} = -\frac{1}{\chi_S S} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial(Su)}{\partial t} \right) = -\frac{1}{\chi_S S} \frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{1}{\chi_S \rho_0 S} \frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial p}{\partial x} \right)$$

En développant les dérivations

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0 \chi_S} \frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial x} \left(S \frac{\partial p}{\partial x} \right) = c^2 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{1}{S} \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} \right)$$

où $c^2 = 1/(\rho_0 \chi_S)$.

De même en partant de l'équation d'Euler simplifiée

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial t \partial x} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0 \chi_S} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{S} \frac{\partial(Su)}{\partial x} \right) = c^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{S} \frac{\partial(Su)}{\partial x} \right)$$

Et après développement des dérivées par rapport à x

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{1}{S} \frac{\partial S}{\partial x} \right) u \right) = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{S} \frac{\partial S}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{S} \frac{\partial S}{\partial x} \right) u \right)$$

A.8

Loi du gaz parfait pour une masse m de gaz de masse molaire $\mathcal{M}$

$$P_0 V = n R T_0 = \frac{m}{\mathcal{M}} R T_0 ; \rho_0 = \frac{m}{V} = \frac{P_0 \mathcal{M}}{R T_0}$$

A.9

Loi de Laplace pour une masse m de gaz :

$$P V^\gamma = P \left(\frac{m}{\rho} \right)^\gamma = cste ; P \rho^{-\gamma} = cste'$$

La différentielle logarithmique de la relation précédente permet de relier les petites variations de P et ρ pour une transformation isentropique

$$\frac{dP}{P} - \gamma \frac{d\rho}{\rho} = 0$$

D'où l'expression de χ_S à la pression P_0

$$\chi_S = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_S = \frac{1}{\gamma P_0}$$

A.10

D'après la loi du gaz parfait $\rho_0 = P_0 \mathcal{M} / (R T_0)$, d'où

$$c^2 = \frac{1}{\rho_0 \chi_S} = \gamma \frac{P_0}{\rho_0} = \frac{\gamma R T_0}{\mathcal{M}}$$

Avec les données de l'énoncé

$$c = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{\mathcal{M}}} = 343 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Ondes stationnaires dans une clarinette

A.11

La clarinette est cylindrique, donc $S = cste$, et les termes faisant intervenir les dérivées de S sont nuls dans les équations de propagation précédentes. Elles se simplifient en deux équations de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial p}{\partial x} ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial u}{\partial x}$$

c représente dans ce cas la célérité des ondes sonores dans le tube de la clarinette, égale à la célérité des ondes sonores dans l'espace libre.

A.12

Remarque : question hors-programme, dont les résultats sont importants dans la suite de l'énoncé (voir fin du corrigé)

Ceci étant noté, les conditions aux limites sont :

- le tube est fermé en $x = 0$: $u(x = 0, t) = 0$;
- le tube est ouvert en $x = L_{cla}$: $p(x = L_{cla}, t) = 0$ (continuité de la surpression).

A.13

Les dérivées partielles de la solution proposée sont

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} &= f(x) \cdot (-\omega^2 \cos(\omega t)) ; \quad \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = f''(x) \cos(\omega t) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= g(x) \cdot (-\omega^2 \sin(\omega t)) ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = g''(x) \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Les équations de d'Alembert pour p et u s'écrivent alors

$$-\omega^2 f(x) \cos(\omega t) = c^2 f''(x) \cos(\omega t) ; \quad -\omega^2 g(x) \sin(\omega t) = c^2 g''(x) \sin(\omega t)$$

Les fonctions sinusoïdales ne sont pas identiquement nulles et peuvent être simplifiées pour conduire à deux équations différentielles identiques de type oscillateur harmonique

$$f''(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 f(x) = 0 ; \quad g''(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 g(x) = 0$$

A.14

La solution proposée correspond à $g(x) = u_1 \sin(kx)$. Le report dans l'équation différentielle précédente conduit à la valeur de k

$$-u_1 k^2 \sin(kx) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 u_1 \sin(kx) = 0 ; \quad k = \pm \frac{\omega}{c}$$

Les deux valeurs opposées de k correspondent à la même solution au signe près, on peut donc choisir la valeur positive de k

$$k = \frac{\omega}{c}$$

En $x = 0$, $\sin(kx) = 0$, donc $u(x = 0, t) = 0$: la condition aux limites est vérifiée.

A.15

On peut utiliser équivalente l'équation de conservation de la masse ou l'équation d'Euler linéarisées. L'équation d'Euler linéarisée s'écrit compte tenu de la forme de u

$$\rho_0 u_1 \sin(kx) \omega \cos(\omega t) = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

qui s'intègre en

$$p(x, t) = u_1 \rho_0 \frac{\omega}{k} \cos(kx) \cos(\omega t) = \rho_0 c u_1 \cos(kx) \cos(\omega t) + f(t)$$

$f(t)$ ne doit pas modifier la surpression, donc $f(t) = C$, ce qui correspond à une surpression constante, nulle puisqu'au repos $p = 0$.

$$p(x, t) = \rho_0 c u_1 \cos(kx) \cos(\omega t)$$

La condition aux limites en $x = L_{cla}$ est $p(x = L_{cla}, t) = 0$, soit $\cos(kL_{cla}) = 0$. Les valeurs possibles de k vérifient donc la condition

$$kL_{cla} = \left(m + \frac{1}{2}\right) \pi ; k = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{L_{cla}} ; m \text{ entier}$$

Les pulsations possibles sont alors données par la relation

$$\omega_m = k_m c = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi c}{L_{cla}} = 2\pi \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{c}{2L_{cla}} ; m \text{ entier}$$

Remarque : l'énoncé ne permettait pas aux candidats n'ayant pas obtenu à la question A.12 les conditions aux limites (hors programme) correctes de s'en sortir. D'autant plus que la condition aux limites donnée implicitement par l'énoncé ($u = 0$ en $x = 0$ à la question précédente) est plus facile à trouver que celle portant sur la surpression.

A.16

Comme $f = \omega/2\pi$,

$$f_1 = f_{m=0} = \frac{c}{4L_{cla}} ; f_{m=1} = \frac{3c}{4L_{cla}} = 3f_1$$

Remarque : il est dommage qu'aucune application numérique ne soit proposée à ce point. Les résultats réels sont-ils tellement différents des résultats théoriques ?

A.17

Le décompte des intervalles entre les Do séparés d'une octave donne $n = 12$ pour un doublement de la fréquence, donc le coefficient multiplicatif entre 2 notes successives vérifie la relation $a^{12} = 2$

$$a = \sqrt[12]{2} = 1,059$$

A.18

Pour la clarinette, la fréquence de l'harmonique 1 est le triple de celle du fondamental. En supposant que l'oreille reconnaît les notes de la clarinette en se basant sur la fréquence la plus basse du spectre, l'activation de la clé de douzième permet de passer de la note de départ à une note de fréquence triple, ce qui correspond à un nombre d'intervalle n qui vérifie $3 = a^n$, soit

$$n = \frac{\ln 3}{\ln a} = 12 \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 19$$

Soit en partant du Ré initial :

- 12 intervalles correspondant au passage au Ré une octave au-dessus ;
- 7 intervalles correspondant au passage au La

La note entendue est donc le La situé entre une et deux octaves au-dessus du Ré initial.

Remarque : cette question favorise nettement les musiciens, bien que l'énoncé précise « *Aucune connaissance musicale n'est requise pour traiter ce problème.* » (voir fin du corrigé)

Ondes stationnaires dans un saxophone soprano

A.19

Comme l'angle au sommet du tube est α , et le sommet à l'origine des x , le rayon de la section du saxophone est $r(x) = x \tan(\alpha/2) \approx \alpha x/2$, et l'aire de sa section

$$S(x) = \pi r(x)^2 = \frac{\pi}{4} \alpha^2 x^2$$

A.20

On déduit de la relation précédente l'expression

$$\frac{1}{S} \frac{dS}{dx} = \frac{2}{x}$$

L'équation de propagation pour p s'écrit alors

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{c^2}{x} \left(x \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial p}{\partial x} \right)$$

On retrouve la forme de l'énoncé après avoir calculé

$$\frac{\partial^2 (xp)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial p}{\partial x} + p \right) = x \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{c^2}{x} \frac{\partial^2 (xp)}{\partial x^2}$$

A.21

L'équation précédente s'écrit en la remultipliant par x

$$x \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 (xp)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 (xp)}{\partial x^2}$$

Soit, avec le changement de variable $\Pi = xp$ proposé, l'équation de d'Alembert en Π

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2}$$

- en $x = 0$, $\Pi(x = 0, t) = xp = 0$ indépendamment de la valeur de p ;
- en $x = L_{sax}$ le tube est ouvert donc comme pour la clarinette $p(x = L_{sax}) = 0$, soit $\Pi(x = L_{sax}, t) = 0$.

A.22

La forme sous laquelle on cherche Π , solution de l'équation de d'Alembert est identique à celle de la solution cherchée pour p solution de la même équation de d'Alembert dans la partie précédente, donc par analogie,

$$h''(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 h(x) = 0$$

La solution générale est de la forme

$$h(x) = E \sin(kx) + F \cos(kx) ; k = \frac{\omega}{c}$$

La condition aux limites en $x = 0$, $\Pi(x = 0, t) = 0$, impose la condition $0 = h(x = 0) = F$, donc

$$h(x) = E \sin(kx)$$

La condition aux limites en $x = L_{sax}$, $\Pi(x = L_{sax}, t) = 0$ impose la condition $0 = h(x = L_{sax}) = E \sin(kL_{sax})$, soit pour une solution non nulle ($E \neq 0$) $\sin(kL_{sax}) = 0$ et

$$kL_{sax} = m\pi ; k_m = m \frac{\pi}{L_{sax}} ; \omega_m = k_m c = m \frac{\pi c}{L_{sax}} ; m \text{ entier}$$

Les pulsations engendrées par le saxophone sont donc de la forme

$$\omega_m = m \frac{\pi c}{L_{sax}} ; m \text{ entier}$$

A.23

La fréquence du mode fondamental correspond à $m = 1$ ($m = 0$ donne une solution identiquement nulle), celle du premier harmonique à $m = 2$

$$f_1 = \frac{c}{2L_{sax}} ; f_{\text{harmonique } 1} = \frac{c}{L_{sax}}$$

Les spectres du saxophone et de la clarinette sont différents, dont leur timbres sont différents, ce qui permet de différencier ces deux instruments. Comme pour la même longueur la fréquence fondamentale du saxophone est double de celle de la clarinette, la clarinette est un instrument qui a taille égale émet des sons plus grave que le saxophone.

Problème B : Quelques propriétés du four à micro-ondes

Le Magnétron

B.1

Pour accélérer les électrons, il faut augmenter leur énergie cinétique, donc diminuer leur énergie potentielle. Celle-ci est égale à $E_p = -eV$, donc les électrons accélèrent vers des régions de potentiel croissant

$$V_A > V_C = 0$$

Le potentiel de l'anode doit être positif.

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V(r) = -\frac{dV}{dr} \vec{e}_r$$

Le champ électrique est radial.

B.2

Les électrons ne sont soumis qu'aux champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$

$$m\vec{a} = -e \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right)$$

Comme $\vec{E}$ est radial et $\vec{B}$ axial, la force de Lorentz est à tout instant perpendiculaire à l'axe Oz , donc la composante axiale de l'accélération est nulle, et la vitesse axiale est constante, nulle car les électrons sont émis sans vitesse. Cela justifie l'indication de l'énoncé « On travaillera dans un plan à ordonnée z constante ».

B.3

En coordonnées cylindriques, $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$, d'où les dérivées successives (en considérant $z = Cste$ comme le suggère l'énoncé)

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\vec{e}_r}{dt} + \frac{dz}{dt} \vec{e}_z = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta$$

$$\vec{a} = \frac{d^2r}{dt^2} \vec{e}_r + \frac{dr}{dt} \frac{d\vec{e}_r}{dt} + \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{e}_\theta + r \frac{d\theta}{dt} \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \vec{e}_r + \left(r \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right) \vec{e}_\theta$$

B.4

D'après le calcul précédent, la force magnétique a pour expression

$$-e\vec{v} \wedge \vec{B} = -eB \left(r \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_r - \frac{dr}{dt} \vec{e}_\theta \right)$$

Les projections de l'équation du mouvement sur $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 &= \frac{e}{m} \frac{dV}{dr} - \frac{eB}{m} r \frac{d\theta}{dt} = \frac{e}{m} \frac{dV}{dr} - 2\omega_L r \frac{d\theta}{dt} \\ r \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} &= \frac{eB}{m} \frac{dr}{dt} = 2\omega_L \frac{dr}{dt} \end{aligned}$$

B.5

$$\frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} - \omega_L r^2 \right) = 2r \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} - \omega_L 2r \frac{dr}{dt} = r \left(2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} - 2\omega_L \frac{dr}{dt} \right) = 0$$

Car le terme entre parenthèses est nulle d'après la projection selon $\vec{e}_\theta$ de l'équation du mouvement.

B.6

Les électrons sont émis sans vitesse initiale sur la cathode en $r = R_c$, donc

$$\left(\frac{d\theta}{dt} \right)_{r=R_c} = 0$$

D'après la question précédente, la quantité $r^2 \frac{d\theta}{dt} - \omega_L r^2$ est une constante du mouvement (intégrale première). En prenant comme référence $r = R_c$

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} - \omega_L r^2 = R_c^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)_{r=R_c} - \omega_L R_c^2 = \omega_L R_c^2$$

soit

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\omega_L}{r^2} (r^2 - R_c^2) = \omega_L \left(1 - \left(\frac{R_c}{r} \right)^2 \right)$$

B.7

La force magnétique ne dérive pas d'une énergie potentielle, donc l'énergie mécanique de l'électron est la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle dans le champ électrique

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 - eV(r)$$

Les électrons sont émis avec une vitesse nulle et à un potentiel nul, donc leur énergie mécanique initiale est nulle. D'autre part la puissance de la force magnétique est nulle, donc si les phénomènes dissipatifs sont négligeables (absence d'interaction entre les électrons) le système est conservatif et l'énergie mécanique des électrons est une constante du mouvement.

$$0 = E_m = \frac{1}{2} m v^2 - eV(r) = \frac{m}{2} \left(\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(r \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) - eV(r)$$

$d\theta/dt$ s'exprime d'après la question précédente. On en déduit

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{2e}{m} V(r) - \left(r \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{2e}{m} V(r) - \omega_L^2 r^2 \left(1 - \left(\frac{R_c}{r} \right)^2 \right)^2$$

B.8

Lorsque le champ magnétique augmente, il en va de même pour la pulsation de Larmor, et $(dr/dt)^2$ décroît. Si le champ magnétique devient trop élevé, $(dr/dt)^2$ s'annule et devient négatif : dr/dt n'est plus défini et le mouvement de l'électron devient impossible. Pour que les électrons atteignent l'anode, dr/dt doit être défini donc $(dr/dt)^2$ être positif pour $R_A < r < R_c$. En particulier pour $r = R_A$ cette condition s'écrit

$$\frac{2e}{m}V_A - \omega_L^2 R_A^2 \left(1 - \left(\frac{R_c}{R_A}\right)^2\right)^2 = \frac{2e}{m}V_A - \left(\frac{eB}{2m}\right)^2 R_A^2 \left(1 - \left(\frac{R_c}{R_A}\right)^2\right)^2 \geq 0$$

On en déduit la condition sur B

$$B \leq B_{max} = \sqrt{\frac{8mV_A}{e}} \frac{1}{R_A - R_c^2/R_A} = \sqrt{\frac{8mV_A}{e}} \frac{R_A}{R_A^2 - R_c^2}$$

Cavité résonante

B.9

On écrit la loi des nœuds en terme de potentiel au nœud de potentiel u_n

$$(u_{n-1} - u_n) \left(jC\omega + \frac{1}{jL\omega}\right) + (u_{n+1} - u_n) \left(jC\omega + \frac{1}{jL\omega}\right) + (0 - u_n)j\Gamma\omega = 0$$

$$(u_{n-1} + u_{n+1}) \left(1 - LC\omega^2\right) - 2u_n \left(1 - L \left(C + \frac{\Gamma}{2}\right) \omega^2\right) = 0$$

B.10

D'après la forme de la solution proposée

$$\underline{u}_{n-1} + \underline{u}_{n+1} = \underline{u}_0 \exp(j(\omega t - (n-1)\varphi)) + \underline{u}_0 \exp(j(\omega t - (n+1)\varphi)) = \underline{u}_n (e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}) = 2\underline{u}_n \cos(\varphi)$$

La relation de la question précédente s'écrit alors

$$2\underline{u}_n \cos(\varphi) (1 - LC\omega^2) - 2\underline{u}_n \left(1 - L \left(C + \frac{\Gamma}{2}\right) \omega^2\right) = 0$$

soit après simplifications

$$\cos(\varphi) = \frac{1 - L(C + \Gamma/2)\omega^2}{1 - LC\omega^2} = 1 - \frac{L\Gamma\omega^2}{2(1 - LC\omega^2)}$$

B.11

La ligne est refermée sur elle-même, donc la cellule $N + 1$ représente en réalité la cellule 1. Par conséquent $\underline{u}_1 = \underline{u}_{N+1}$, soit

$$\underline{u}_0 \exp(j(\omega t + \varphi)) = \underline{u}_0 \exp(j(\omega t + (N+1)\varphi)) = e^{jN\varphi} \underline{u}_0 \exp(j(\omega t + \varphi))$$

Par conséquent $e^{jN\varphi} = 1$, soit

$$N\varphi = 2\pi p ; \varphi = 2\pi \frac{p}{N} ; p \text{ entier}$$

Pour une valeur φ possible, si $\varphi' = \varphi + 2\pi m$ où m est entier

$$\underline{u}'_n = \underline{u}_0 \exp(j(\omega t + n\varphi')) = \underline{u}_0 \exp(j(\omega t + n\varphi + 2\pi mn)) = \underline{u}_n$$

Les valeurs de $\varphi = 2\pi p/N$ donnant des solutions distinctes sont donc comprises dans un intervalle de 2π . En prenant $0 \leq \varphi = 2\pi p/N < 2\pi$, les valeurs de p donnant des solutions distinctes sont les entiers vérifiant $0 \leq p < N$.

B.12

La condition sur ω s'écrit

$$1 - \frac{L\Gamma\omega^2}{2(1 - LC\omega^2)} = \cos\left(2\pi \frac{p}{N}\right) ; p \text{ entier} ; 0 \leq p < N$$

$p = 0$ correspond à $\omega = 0$, solution permanente non oscillante.

$$\frac{L\Gamma\omega^2}{2(1 - LC\omega^2)} = 1 - \cos\left(2\pi \frac{p}{N}\right) = 2\sin^2\left(\pi \frac{p}{N}\right) ; p \text{ entier} ; 0 < p < N$$

$$L\Gamma\omega_p^2 = 4(1 - LC\omega_p^2)\sin^2\left(\pi \frac{p}{N}\right) ; \omega_p^2 = \frac{4\sin^2\left(\frac{\pi p}{N}\right)}{L(\Gamma + 4C\sin^2\left(\frac{\pi p}{N}\right))} = \frac{1}{LC} \frac{1}{1 + \frac{\Gamma}{4C\sin^2\left(\frac{\pi p}{N}\right)}}$$

Les pulsations résonantes vérifient donc

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\Gamma}{4C\sin^2\left(\frac{\pi p}{N}\right)}}} ; p \text{ entier} ; 0 < p < N$$

$\omega_{N-p} = \omega_p$: les modes p et $N - p$ sont identiques au sens de rotation près, car $u_n(\omega_p) = u_{N-n}(\omega_{N-p})$: ils se déduisent l'un de l'autre en changeant l'orientation de l'axe z . On peut alors distinguer deux cas :

- si le nombre de cavités N est impair, il y a $(N-1)/2$ pulsations de résonance correspondant chacune à 2 modes propres de sens de rotation opposés ;
- si le nombre de cavités N est pair, il y a $N/2$ pulsations de résonance, correspondant chacune à 2 modes propres, sauf pour $p = N/2$, qui correspond à un unique mode, invariant par changement du sens de rotation.

Guide d'onde

B.13

D'après les équations (4) de Maxwell-Ampère et de Maxwell-Faraday (2)

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \vec{\text{rot}} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial(\vec{\text{rot}} \vec{E})}{\partial t} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

En utilisant le formulaire et l'équation de Maxwell-Gauss (1)

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \vec{\Delta} \vec{E} = -\vec{\Delta} \vec{E}$$

D'où l'équation de d'Alembert

$$\vec{\Delta} \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

B.14

Les relations de passage à l'interface entre 2 milieux s'écrivent

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} ; \vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \mu_0 \vec{J}_s \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

On en déduit la continuité des composantes tangentielles du champ électrique $\vec{E}$ et de la composante normale du champ magnétique $\vec{B}$.

Les parois étant parfaitement conductrices, le champ électromagnétique variable est nul dans les parois, donc à la surface des parois les composantes tangentielles du champ électrique et normale du champ magnétique sont nulles.

B.15

Conditions aux limites pour $\vec{E}$:

- sur les faces $x = 0$ et $x = a$, de normales $\pm \vec{e}_x$, les composantes tangentielles de $\vec{E}$ sont E_y et E_z , donc

$$E_y(x = 0, y, z) = E_y(x = a, y, z) = E_z(x = 0, y, z) = E_z(x = a, y, z) = 0$$

- sur les faces $y = 0$ et $y = b$, de normales $\pm \vec{e}_y$, les composantes tangentielles de $\vec{E}$ sont E_z et E_x , donc

$$E_z(x, y = 0, z) = E_z(x, y = b, z) = E_x(x, y = 0, z) = E_x(x, y = b, z) = 0$$

Conditions aux limites pour $\vec{B}$

- sur les faces $x = 0$ et $x = a$, de normales $\pm \vec{e}_x$, la composante normale de $\vec{B}$ est B_x , donc

$$B_x(x = 0, y, z) = B_x(x = a, y, z) = 0$$

- sur les faces $y = 0$ et $y = b$, de normales $\pm \vec{e}_y$, la composante normale de $\vec{B}$ est B_y , donc

$$B_y(x, y = 0, z) = B_y(x, y = b, z) = 0$$

Les conditions aux limites sur $\vec{E}$ permettent d'exprimer la condition sur E_z

$$E_{z, \text{surface}} = E_z(x = 0, y, z) = E_z(x = a, y, z) = E_z(x, y = 0, z) = E_z(x, y = b, z) = 0$$

Les dérivées $\partial B_z / \partial y$ et $\partial B_z / \partial x$ interviennent dans l'expression de $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}$, donc dans l'équation de Maxwell-Ampère

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \end{vmatrix} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Compte tenu de la forme des solutions proposées, on peut utiliser les relations

$$\frac{\partial}{\partial t} = j\omega \cdot ; \quad \frac{\partial}{\partial z} = -jk \cdot$$

L'équation de Maxwell-Ampère conduit aux trois équations scalaires

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_z}{\partial y} + jk B_y &= j\mu_0 \varepsilon_0 \omega E_x \\ -\frac{\partial B_z}{\partial x} - jk B_x &= j\mu_0 \varepsilon_0 \omega E_y \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} &= j\mu_0 \varepsilon_0 \omega E_z \end{aligned}$$

On peut alors combiner les conditions aux limites pour obtenir des conditions sur les dérivées spatiales de B :

- sur les faces $x = 0$ et $x = a$, $B_x = 0$ et $E_y = 0$, d'où la condition

$$\left. \frac{\partial B_z}{\partial x} \right|_{x=0, x=a} = -jk B_x - j\mu_0 \varepsilon_0 \omega E_y = 0$$

- sur les faces $y = 0$ et $y = b$, $B_y = 0$ et $E_x = 0$, d'où la condition

$$\left. \frac{\partial B_z}{\partial y} \right|_{y=0, y=b} = -jk B_y + j\mu_0 \varepsilon_0 \omega E_x = 0$$

Remarque : question beaucoup trop difficile, car de rédaction peu claire, et sans aucune indication.

B.16

L'équation de d'Alembert pour le champ magnétique conduit à 3 équations scalaires

$$\Delta \underline{B}_x = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \underline{B}_x}{\partial t^2} ; \quad \Delta \underline{B}_y = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \underline{B}_y}{\partial t^2} ; \quad \Delta \underline{B}_z = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \underline{B}_z}{\partial t^2}$$

Pour la composante $\underline{B}_x$ l'équation s'écrit en tenant compte des relations sur les dérivées

$$\frac{\partial^2 \underline{B}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{B}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{B}_x}{\partial z^2} = \Delta^{(2)} \underline{B}_x + (jk)^2 \underline{B}_x = \mu_0 \varepsilon_0 (j\omega)^2 \underline{B}_x$$

Comme $\exp(j(\omega t - kz))$ ne dépend ni de x ni de y , $\Delta^{(2)} \underline{B}_x = (\Delta^{(2)} \underline{B}_{0x}) \exp(j(\omega t - kz))$, et après simplification par l'exponentielle

$$\Delta^{(2)} \underline{B}_{0x} - k^2 \underline{B}_{0x} = -\mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 \underline{B}_{0x} ; \quad \Delta^{(2)} \underline{B}_{0x} = (k^2 - \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2) \underline{B}_{0x}$$

En procédant de manière analogue pour les différentes composantes, on obtient finalement les équations

$$\Delta^{(2)} \underline{B}_{0x} = (k^2 - \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2) \underline{B}_{0x} ; \quad \Delta^{(2)} \underline{B}_{0y} = (k^2 - \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2) \underline{B}_{0y} ; \quad \Delta^{(2)} \underline{B}_{0z} = (k^2 - \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2) \underline{B}_{0z}$$

B.17

L'équation de Maxwell-Gauss s'écrit

$$\frac{\partial \underline{B}_x}{\partial x} + \frac{\partial \underline{B}_y}{\partial y} + \frac{\partial \underline{B}_z}{\partial z} = \frac{\partial \underline{B}_{0x}}{\partial x} \exp(j(\omega t - kz)) + \frac{\partial \underline{B}_{0y}}{\partial y} \exp(j(\omega t - kz)) - jk \underline{B}_{0z} \exp(j(\omega t - kz)) = 0$$

Soit après simplification

$$\frac{\partial \underline{B}_{0x}}{\partial x} + \frac{\partial \underline{B}_{0y}}{\partial y} - jk \underline{B}_{0z} = 0$$

La composante selon z de l'équation de Maxwell-Ampère a été exprimée à la question B.15 :

$$\frac{\partial \underline{B}_y}{\partial x} - \frac{\partial \underline{B}_x}{\partial y} = j\mu_0 \varepsilon_0 \omega \underline{E}_z$$

Pour une onde TE, $E_z = 0$, et cette équation se simplifie en

$$\frac{\partial \underline{B}_{0y}}{\partial x} - \frac{\partial \underline{B}_{0x}}{\partial y} = 0$$

On exprime $\Delta^{(2)} \underline{B}_{0x}$ et $\Delta^{(2)} \underline{B}_{0y}$ à partir des 2 équations précédentes, en les dérivant par rapport à x et y

$$\Delta^{(2)} \underline{B}_{0x} = \frac{\partial^2 \underline{B}_{0x}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{B}_{0x}}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(jk \underline{B}_{0z} - \frac{\partial \underline{B}_{0y}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \underline{B}_{0y}}{\partial x} \right) = jk \frac{\partial \underline{B}_{0z}}{\partial x} = \alpha(k) \frac{\partial \underline{B}_{0z}}{\partial x}$$

$$\Delta^{(2)} \underline{B}_{0y} = \frac{\partial^2 \underline{B}_{0y}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{B}_{0y}}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \underline{B}_{0x}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(jk \underline{B}_{0z} - \frac{\partial \underline{B}_{0x}}{\partial x} \right) = jk \frac{\partial \underline{B}_{0z}}{\partial y} = \alpha(k) \frac{\partial \underline{B}_{0z}}{\partial y}$$

où $\alpha = jk$

On identifie ces expressions de $\Delta^{(2)} \underline{B}_{0x}$ et $\Delta^{(2)} \underline{B}_{0y}$ aux expressions obtenues à la question B.16. Pour $\underline{B}_{0x}$

$$\Delta^{(2)} \underline{B}_{0x} = (k^2 - \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2) \underline{B}_{0x} = jk \frac{\partial \underline{B}_{0z}}{\partial x}$$

Soit

$$\underline{B}_{0x} = \frac{jk}{k^2 - \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2} \frac{\partial \underline{B}_{0z}}{\partial x}$$

Et de manière analogue

$$\underline{B}_{0y} = \frac{jk}{k^2 - \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2} \frac{\partial \underline{B}_{0z}}{\partial y}$$

B.18

L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit, compte tenu des relations $\partial/\partial t = j\omega$, $\partial/\partial z = -jk$, et de l'hypothèse $E_z = 0$,

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = \begin{vmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} jk \underline{E}_{0y} \exp(j(\omega t - kz)) \\ -jk \underline{E}_{0x} \exp(j(\omega t - kz)) \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -j\omega \vec{B}_0 \exp(j(\omega t - kz))$$

Les projections de cette relation sur $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ donnent, après simplifications

$$k\underline{E}_{0y} = -\omega\underline{B}_{0x} ; k\underline{E}_{0x} = \omega\underline{B}_{0y}$$

Soit en remplaçant $\underline{B}_{0x}$ et $\underline{B}_{0y}$ par leurs expressions en fonction des dérivées de $\underline{B}_{0z}$

$$\underline{E}_{0x} = \frac{j\omega}{k^2 - \mu_0\varepsilon_0\omega^2} \frac{\partial \underline{B}_{0z}}{\partial y} ; \underline{E}_{0y} = -\frac{j\omega}{k^2 - \mu_0\varepsilon_0\omega^2} \frac{\partial \underline{B}_{0z}}{\partial x}$$

D'après les questions précédentes, toutes les composantes des champs s'expriment en fonction de $\underline{B}_{0z}$ et de ses dérivées ; sa détermination permet le calcul complet du champ électromagnétique.

B.19

Par hypothèse, E_z est nul en tout point, en particulier sur les parois. La solution proposée conduit aux relations

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = -B_{max} \frac{n\pi}{a} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right) ; \frac{\partial B_z}{\partial y} = B_{max} \frac{m\pi}{b} \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$$

qui satisfont les conditions aux limites, puisque $\sin(n\pi x/a)$ s'annule en $x = 0$ et $x = a$ et $\sin(m\pi y/b)$ s'annule en $y = 0$ et $y = b$.

B.20

L'amplitude $\underline{B}_{0z}$ vérifie l'équation $\Delta^{(2)}\underline{B}_{0z} = (k^2 - \mu_0\mu_0\varepsilon_0\omega^2)\underline{B}_{0z}$. La forme proposée pour $\underline{B}_{0z}$ conduit à la relation

$$\Delta^{(2)}\underline{B}_{0z} = -B_{max} \left(\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \right) \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right) = - \left(\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \right) \underline{B}_{0z}$$

On en déduit la relation de dispersion

$$k^2 = \mu_0\varepsilon_0\omega^2 - \left(\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \right)$$

La propagation d'une onde est possible si k est réel, donc si k^2 est positif, soit la condition

$$\nu^2 = \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^2 > \frac{1}{4\pi^2\mu_0\varepsilon_0} \left(\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \right) = \nu_{n,m}^2$$

La fréquence limite pour le mode caractérisé par les entiers m et n a pour expression

$$\nu_{n,m} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2}$$

Dans le cas contraire, $k^2 < 0$, donc k est imaginaire pur, et la dépendance spatiale du champ est une exponentielle réelle, atténuée depuis l'entrée du guide où le signal est injecté, car l'amplitude du champ ne peut diverger : il s'agit d'une *onde évanescente*.

B.21

Dans le vide la relation liant longueur d'onde et fréquence s'écrit

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = 0,122 \text{ m}$$

B.22

Les fréquences de coupure des modes sont fonctions croissantes de n et m , on calcule donc leurs valeurs à n et m croissants, en excluant le cas $n = m = 0$ qui conduit d'après l'équation de Maxwell-Gauss à un champ nul. Le tableau rassemble les valeurs de $\nu_{n,m}$ pour les modes de fréquences caractéristiques les plus basses.

n	0	0	1	(1)	...
m	1	2	0	(1)	...
$\nu_{n,m}$ (MHz)	2080	4170	4410	(4880)	...

Comme $\nu_{1,0} > \nu$, soit $\nu_{n \neq 0, m} > \nu$, et que $\nu_{0,2} > \nu$, le seul mode susceptible de se propager est le mode (0, 1).

Remarque : l'énoncé précise $(n, m) \in N^{*2}$, ce qui exclut tous les modes $(0, m)$ et $(n, 0)$, en particulier le mode (0,1) qui est le seul qui se propage.

B.23

La relation de dispersion donne

$$k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2\right) = \left(\frac{2\pi}{c}\right)^2 (\nu^2 - \nu_{n,m}^2) ; k = \frac{2\pi}{c} \sqrt{\nu^2 - \nu_{n,m}^2}$$

soit pour le mode (0, 1), avec $\nu = 2450$ MHz et $\nu_{n,m} = 2080$ MHz

$$k = 27,1 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}$$

De même

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi\nu}{\frac{2\pi}{c} \sqrt{\nu^2 - \nu_{n,m}^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\nu_{n,m}}{\nu}\right)^2}}$$

Soit

$$v_\phi = 1,89c = 5,68 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} > c$$

La vitesse de phase est supérieure à c , ce qui ne pose pas de problème puisque la vitesse de phase ne représente pas la vitesse de propagation d'une grandeur matérielle.

B.24

Le mode (0, 1) est caractérisé par

$$B_{0z} = B_{max} \cos\left(\pi \frac{y}{b}\right)$$

Par conséquent

$$B_z = B_{max} \cos\left(\pi \frac{y}{b}\right) \cos(\omega t - kz)$$

Puis

$$B_x = 0$$

$$\underline{B}_{0y} = \frac{jk}{k^2 - \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2} B_{max} \left(-\frac{\pi}{b}\right) \sin\left(\pi \frac{y}{b}\right) ; \underline{B}_y = \frac{jk}{k^2 - \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2} B_{max} \left(-\frac{\pi}{b}\right) \sin\left(\pi \frac{y}{b}\right) \exp(j(\omega t - kz))$$

soit

$$B_y = B_{max} \frac{k}{k^2 - \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2} \left(\frac{\pi}{b} \right) \sin \left(\pi \frac{y}{b} \right) \sin(\omega t - kz)$$

Pour le champ électrique, on déduit des relations $k\underline{E}_{0y} = -\omega\underline{B}_{0x}$ et $k\underline{E}_{0x} = \omega\underline{B}_{0y}$ les relations

$$E_x = \frac{\omega}{k} B_y = B_{max} \frac{\omega}{k^2 - \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2} \left(\frac{\pi}{b} \right) \sin \left(\pi \frac{y}{b} \right) \sin(\omega t - kz)$$

et $E_y = E_z = 0$

En résumé

$$E_x = B_{max} \frac{\omega}{k^2 - \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2} \left(\frac{\pi}{b} \right) \sin \left(\pi \frac{y}{b} \right) \sin(\omega t - kz) ; E_y = E_z = 0$$

$$B_x = 0 ; B_y = B_{max} \frac{k}{k^2 - \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2} \left(\frac{\pi}{b} \right) \sin \left(\pi \frac{y}{b} \right) \sin(\omega t - kz) ; B_z = B_{max} \cos \left(\pi \frac{y}{b} \right) \cos(\omega t - kz)$$

Remarques sur le sujet

- Très peu d'applications numériques sont proposées (on calcule la vitesse du son dans l'air, mais pas les fréquences émises par la clarinette et le saxophone qui sont l'objet de cette partie), aucun commentaire n'est demandé sur les résultats obtenus : le sujet se limite aux calculs. Dans la partie B consacrée au four à micro-onde, l'énoncé n'indique même pas le rôle des éléments étudiés (magnétron et guide d'onde).

- partie A, question A.12, les conditions aux limites aux extrémités d'un tube pour les ondes sonores sont hors programme. Si la condition de vitesse nulle à l'extrémité fermée ne pose sûrement pas de problème, la condition de surpression nulle à la sortie ouverte d'un tuyau n'est qu'une approximation, aussi utile soit-elle, et n'est pas si évidente.

L'énoncé donne par la suite la condition de vitesse nulle mais pas celle de surpression nulle, alors qu'elles sont nécessaires pour les questions suivantes (recherche de modes propres). Les candidats ne disposant pas de ces conditions ne pouvait continuer correctement la partie A.

Dans le cadre du programme :

- les ondes stationnaires sont abordées spécifiquement dans le cas de la corde vibrante ;
- en ce qui concerne les ondes sonores, en commentaire du point concernant la réflexion et la transmission d'une onde sonore est le suivant :
« On justifie les relations de passage dans ce seul cas [incidence normale sur une interface plane infinie] ; en particulier le cas de l'interface entre deux tuyaux de sections distinctes (continuité du débit volumique et de la surpression) est hors programme. »
- la question A.18 favorise nettement les candidats ayant des connaissances musicales :
 - à défaut de donner le calcul l'énoncé donne implicitement la réponse dans le terme *clé de douzième*, le terme *douzième* donnant de manière précise la note attendue pour un musicien.
 - En outre les candidats non musiciens risquent d'être déroutés par le résultat obtenu (19 intervalles correspondant à des demi-tons) alors que l'énoncé pourrait suggérer une réponse de 12 (dont la signification est différente)

- Du point de vue de l'analyse du signal, la fréquence du son émis ne change pas (au sens mathématique), car les fréquences du spectre sont de la forme $3f_1, 5f_1, 7f_1, 9f_1, \dots$, de plus grand commun diviseur f_1 , alors que le spectre d'un son de fréquence $3f_1$ comporterait les fréquences $3f_1, 6f_1, 9f_1, \dots$: l'oreille n'est pas un analyseur de Fourier idéal. En revanche la perception auditive des sons graves du piano semble mettre en jeu la reconstitution de fréquences fondamentales absentes du spectre émis.
- enfin, la pratique musicale semble être en classe préparatoire scientifique (dans le cadre de ma seule expérience) un marqueur social fort (mais je ne suis pas non plus dans une région où la tradition des fanfares reste développée), ce qui pourrait introduire un biais social important dans cette question.
- la partie sur le guide d'onde ne me semble pas dans l'esprit de la filière PSI car très technique et calculatoire.
- la question B.15 est posée de manière beaucoup trop lapidaire, ce qui la rend sûrement (très) difficile pour la majorité des candidats : il faut trouver, sans aucune indication de démarche, comment obtenir des conditions sur certaines dérivées spatiales du champ magnétique à la surface d'un conducteur parfait, ce qui nécessite d'utiliser les conditions aux limites usuelles en les combinant avec l'équation de Maxwell-Faraday.
- question B.22, l'énoncé précise $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, ce qui exclut tous les modes $(0, m)$ et $(n, 0)$, en particulier le mode $(0, 1)$ qui est le seul qui se propage.