

Partie I

- A 1) - Cas de Neumann : le circuit est fixe et indéformable dans $\vec{B}$ dépendant du temps.
 Cas de Lorentz : le circuit est mobile ou déformable dans $\vec{B}$ indépendant du temps.

- 2) On raisonne en supposant $i_{exc} > 0$ (les expressions algébriques obtenues sont valables aussi pour $i_{exc} < 0$)

- Sur $\alpha\beta$ le champ $\vec{B}$ est radial sortant, c'est dans le sens de $\vec{e}_r$, donc $\vec{B} = k i_{exc} \vec{e}_r$

Champ électromoteur de Lorentz : $\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B} = (a\Omega \vec{e}_\theta) \wedge (k i_{exc} \vec{e}_r) = a\Omega k i_{exc} (-\vec{e}_z)$

f.é.m. induite : $e_{\alpha\beta} = \int_{\alpha}^{\beta} \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \vec{E}_m \cdot \int_{\alpha}^{\beta} d\vec{l} = \vec{E}_m \cdot \vec{\alpha\beta} = (-a\Omega k i_{exc} \vec{e}_z) \cdot (h \vec{e}_z)$

On obtient donc $e_{\alpha\beta} = -a h k i_{exc} \Omega$

- Sur $\gamma\delta$ le résultat est identique car il y a deux changements de signe (un pour le sens de $\vec{v}$, un pour le sens d'intégration).

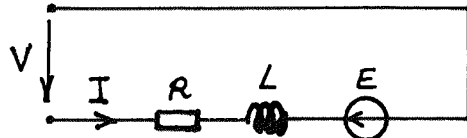
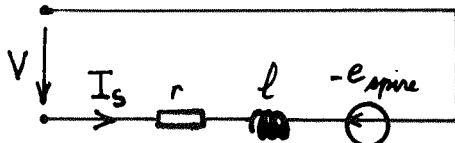
On aura donc de même $e_{\gamma\delta} = -a h k i_{exc} \Omega$

- Pour l'ensemble de la spire $e_{spire} = e_{\alpha\beta} + e_{\gamma\delta}$ soit $e_{spire} = -2 a h k i_{exc} \Omega$

Rq : Sur les conducteurs $\delta\alpha$ et $\beta\gamma$ la f.é.m. induite est nulle car $\vec{E}_m$ et $d\vec{l}$ sont orthogonaux.

- 3) - Schéma équivalent d'une seule spire.

Schéma équivalent des N spires en parallèle.



D'après les lois d'association en parallèle on a directement :

$$R = \frac{r}{N} ; \quad L = \frac{L}{N} ; \quad E = -e_{spire} \quad \text{soit} \quad E = 2 a h k i_{exc} \Omega$$

$$4) - \quad R = \frac{r}{N} = \frac{12}{40} = 0,30 \, \Omega \quad L = \frac{L}{N} = \frac{1,4}{40} = 0,035 \, \text{H} = 35 \, \text{mH}$$

$$E = 2 a h k i_{exc} \Omega = 2 \times 25 \cdot 10^{-2} \times 1,1 \times 3,2 \times 0,5 \times 3000 \cdot \frac{2\pi}{60} = 276,46 \, \text{V} \approx 276 \, \text{V}$$

- En régime permanent continu la tension aux bornes de l'inductance étant nulle la loi de maille s'écrit :

$$V = RI + 0 + E \quad \text{donc} \quad I = \frac{V-E}{R} = \frac{310-276}{0,30} = 113,33 \, \text{A} \approx 113 \, \text{A}$$

5) - Comme à la question 2° on raisonne avec $i_{exc} > 0$.

Le couple de Laplace est dû uniquement aux forces de Laplace s'exerçant sur les conducteurs $\alpha\beta$ et $\gamma\delta$ (sur les conducteurs $\delta\alpha$ et $\beta\gamma$, les forces de Laplace sont colinéaires à l'axe $z'z$).

Sur $\alpha\beta$ on a $\vec{F}_{\alpha\beta} = I_s \vec{\alpha\beta} \wedge \vec{B} = I_s (h \vec{e}_z) \wedge (k i_{exc} \vec{e}_r) = I_s h k i_{exc} \vec{e}_\theta$

Sur $\gamma\delta$ il y a un changement de signe dû au changement de sens du courant donc $\vec{F}_{\gamma\delta} = -\vec{F}_{\alpha\beta}$.

L'ensemble de ces deux forces constitue un couple de moment $\Gamma_{spire} = +2aF = 2ah k i_{exc} I_s$

Le rotor étant constitué de N spires on aura donc $\Gamma = N \Gamma_{spire} = 2ah k i_{exc} N I_s$

Or $N I_s = I$ soit finalement $\boxed{\Gamma = 2ah k i_{exc} I}$

- $\Gamma = 2ah k i_{exc} I = 2 \times 25 \cdot 10^{-2} \times 1,1 \times 3,2 \times 0,5 \times 113 = 9944 \text{ N.m} \approx \underline{994 \text{ N.m}}$

6) - La conservation de la puissance se traduit par la relation $\boxed{P_{\text{alim}} = P_{\text{méca}} + P_J}$

- $\boxed{P_{\text{alim}} = VI} = 310 \times 113 = 35'030 \text{ W} \approx \underline{35,0 \text{ kW}}$

$\boxed{P_{\text{méca}} = \Gamma \Omega} = 994 \times 3000 \cdot \frac{2\pi}{60} = 31'227 \text{ W} \approx \underline{31,2 \text{ kW}}$

$\boxed{P_J = RI^2} = 0,30 \times 113^2 = 3'831 \text{ W} \approx \underline{3,8 \text{ kW}}$

Rq: on vérifie bien que
 $35,0 = 31,2 + 3,8$

7) - Le moteur sert à convertir la puissance électrique (P_{alim}) en puissance mécanique ($P_{\text{méca}}$).

Le rendement est donc $\boxed{\rho = \frac{P_{\text{méca}}}{P_{\text{alim}}}} = \frac{31'227}{35'030} = 0,8914 \approx \underline{89,1\%}$

8) - D'après 4° on a $V = RI + E$ soit $E = V - RI$

Si V et I sont fixés alors E reste constant.

D'après 3° on a $E = 2ah k i_{exc} \Omega$: $E = \text{cte}$ et $i_{exc} \downarrow \Rightarrow \Omega \uparrow$

D'après 5° on a $\Gamma = 2ah k i_{exc} I$: $I = \text{cte}$ et $i_{exc} \downarrow \Rightarrow \Gamma \downarrow$

Lorsqu'on diminue progressivement i_{exc} alors la vitesse Ω augmente et le couple Γ diminue.

(diminuer i_{exc} équivaut donc à augmenter le rapport d'une boîte de vitesse.

- Un véhicule tout électrique motorisé par une MCC peut donc s'affranchir d'une boîte de vitesse.

Pour simuler un rétrogradage on augmente i_{exc} (le couple Γ augmente et la vitesse Ω diminue).

B 9) - Le fonctionnement en montée du véhicule nécessite un couple moteur plus grand que lorsqu'il roule sur le plat. D'après 5° le couple Γ est proportionnel au courant I .

Le chronogramme 2 pour lequel les courants sont plus forts, correspond au fonctionnement en montée.

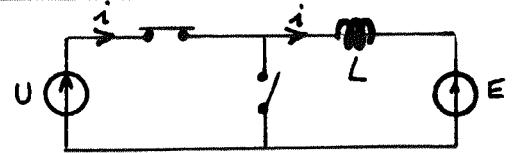
- Le courant représenté est positif quand K est passant puis nul quand K est bloqué : il s'agit donc de i_K .

- La période de hachage est $T = 5 \text{ ms}$ soit la fréquence $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{5 \cdot 10^{-3}} = 200 \text{ Hz}$

- Par lecture sur les chronogrammes $\alpha T \leftrightarrow 22 \text{ mm}$ d'où $\alpha = \frac{22}{28} = 0,79$ soit $\alpha \approx 0,8$
 $T \leftrightarrow 28 \text{ mm}$

10) - Pour $t \in [0, \alpha T]$ on a le schéma équivalent ci-contre.

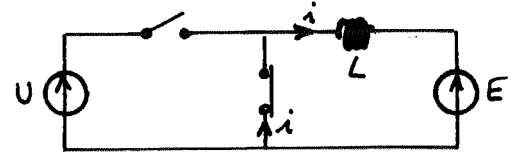
$$L \frac{di}{dt} + E = U \quad \text{d'où} \quad \frac{di}{dt} = \frac{U-E}{L} \quad \text{Rq: } (di/dt) > 0 \text{ donc } i(t) \text{ est } f^m \nearrow \text{ det}$$



$$\int_{I_{\min}}^{I_{\max}} di = \frac{U-E}{L} \int_0^{\alpha T} dt \rightarrow I_{\max} - I_{\min} = \frac{U-E}{L} (\alpha T) \quad \text{soit} \quad \Delta i = \frac{(U-E) \alpha T}{L}$$

11) - Pour $t \in [\alpha T, T]$ on a le schéma équivalent ci-contre.

$$L \frac{di}{dt} + E = 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{di}{dt} = -\frac{E}{L} \quad \text{Rq: } (di/dt) < 0 \text{ donc } i(t) \text{ est } f^m \searrow \text{ det}$$



$$\int_{I_{\max}}^{I_{\min}} di = -\frac{E}{L} \int_{\alpha T}^T dt \rightarrow I_{\min} - I_{\max} = -\frac{E}{L} (T - \alpha T) \quad \text{soit} \quad \Delta i = \frac{E(1-\alpha)T}{L}$$

12) - On identifie les deux expressions de Δi : $\frac{E(1-\alpha)T}{L} = \frac{(U-E)\alpha T}{L} \rightarrow E - \alpha E = \alpha U - \alpha E \quad \text{soit} \quad E = \alpha U$

- Avec $U = 400 \text{ V}$ et $\alpha \approx 0,8$ on a $E \approx 0,8 \times 400 = 320 \text{ V}$

Or on a $\Omega = 3000 \text{ tr.min}^{-1}$ pour $E = 276 \text{ V}$

Comme E est proportionnel à Ω on en déduit $\boxed{\Omega} = 3000 \times \frac{320}{276} = 3478 \text{ tr.min}^{-1} \approx 3500 \text{ tr.min}^{-1}$

- Au maximum (pour $\alpha = 1$) on a $E = U = 400 \text{ V}$ donc $\boxed{\Omega_{\max}} = 3000 \times \frac{400}{276} = 4347 \text{ tr.min}^{-1} \approx 4350 \text{ tr.min}^{-1}$

13) - D'après 11° on a : $\Delta i = \frac{E(1-\alpha)T}{L}$ } $\Delta i = \frac{\alpha(1-\alpha)UT}{L}$ Rq: d'après les chronogrammes $\Delta i = 11 \text{ A}$
 D'après 12° on a : $E = \alpha U$

$$L = \frac{\alpha(1-\alpha)UT}{\Delta i} = \frac{0,8 \times (1-0,8) \times 400 \times 5 \cdot 10^{-3}}{11} = 0,02909 \text{ H} \approx 29 \text{ mH}$$

Rq: Avec incertitudes de détermination près (estimation de α ...) cette valeur est compatible avec celle de 35 mH obtenue en 4°.

Partie II

A 14) - L'air évolue à volume constant $V = 4 \text{ m}^3$ sa température s'élevant de $\Delta\theta = 1,5^\circ\text{C}$

Pour l'air contenu dans le véhicule et assimilé à un gaz parfait la capacité thermique à considérer est

$$C_V = \frac{nR}{\gamma-1} \text{ avec } n = \frac{P_0 V}{RT_A} \text{ où } P_0 = 10^5 \text{ Pa et } T_A = 273 + 20 = 293 \text{ K}$$

$$\text{Donc } C_V = \left(\frac{P_0 V}{RT_A}\right) \cdot \frac{R}{\gamma-1} \text{ soit } C_V = \frac{P_0 V}{(\gamma-1)T_A}$$

$$\text{L'énergie thermique reçue par l'air est donc } Q = C_V \Delta\theta \text{ soit } \boxed{Q = \frac{P_0 V \Delta\theta}{(\gamma-1)T_A}}$$

$$Q = \frac{10^5 \times 4 \times 1,5}{(1,4-1) \times 293} = 5119,45 \text{ J} \approx \underline{5,12 \text{ kJ}} \quad (\text{ou } 1 \text{ min})$$

15) - La climatisation doit extraire $Q = 5,12 \text{ kJ}$ pendant la durée $\Delta t = 1 \text{ min}$

$$\text{La puissance doit être } \boxed{P = \frac{Q}{\Delta t}} = \frac{5,12 \times 10^3}{1,60} = 85,33 \text{ W} \approx \underline{85 \text{ W}}$$

16) - Dans la pratique la ventilation fonctionne. L'air entre dans le véhicule et à la température extérieure donc plus chaud que l'air de l'habitacle.

Le climatiseur ne doit pas se contenter de maintenir l'air de l'habitacle à 20°C , il doit aussi refroidir l'air chaud extérieur (à 35°C par exemple) qui est entré dans le véhicule.

Donc le choix d'une puissance bien plus importante (facteur 6 entre 85 W et 500 W).

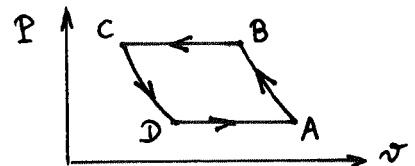
17) - $\boxed{D_m}$ = débit massique en $\underline{\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}}$

$\boxed{\Delta h}$ = variation d'enthalpie massique en $\underline{\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}}$

18) - Le cycle est constitué de :

2 adiabatiques réversibles AB et CD (équations $P = C\epsilon V^{-\gamma}$)

2 isobares BC et DA (équations $P = C\epsilon$)



19) - Lors de l'étape BC l'air se refroidit dans l'échangeur en cédant de la chaleur à l'extérieur de $t^\circ \theta_e = 35^\circ\text{C}$.

La température minimale qu'on peut espérer atteindre en C est $\boxed{\theta_{C\min} = \theta_e} = \underline{35^\circ\text{C}}$

- Un échangeur de grande taille (càd dont la surface d'échange est grande) permet de s'approcher au mieux de cette température.

20) - La transformation DC est adiabatique réversible donc $\frac{T_C}{T_D} \frac{P_C}{P_D}^{1-\gamma} = \frac{T_D}{P_D} \frac{P_D^{1-\gamma}}{P_D}$ d'où $P_C = P_D \left(\frac{T_D}{T_C}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = P_D \left(\frac{T_C}{T_D}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$

La pression en sortie de compresseur est $P_B = P_C$ donc $P_B = P_D \left(\frac{T_C}{T_D}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$

On a $P_D = 1 \text{ bar}$ et $T_C \geq T_{C\min} = T_e = 273 + 35 = 308 \text{ K}$. On veut avoir $T_D = 273 + 5 = 278 \text{ K}$

D'où la condition $P_B \geq P_{Bmin} = P_D \left(\frac{T_2}{T_D} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 1 \times \left(\frac{308}{278} \right)^{\frac{1,4}{1,4-1}} = \underline{1,43 \text{ bar}}$

- 21) - Lors de l'étape DA l'air se réchauffe à pression constante de $\theta_D = 5^\circ\text{C}$ à $\theta_A = 20^\circ\text{C}$ en prenant de la chaleur à l'air contenu dans le véhicule.

La puissance de climatisation est donc $P_{clim} = \dot{m} c_p (\theta_D - \theta_A)$

D'où le débit massique nécessaire $\dot{m} = \frac{P_{clim}}{c_p (\theta_D - \theta_A)} = \frac{-120}{1,10^3 \times (5-20)} = 0,008 \text{ kg.s}^{-1} = \underline{8 \text{ g.s}^{-1}}$

- 22) Pour une étape adiabatique on a $P_{th} = 0$: la relation du 17° s'écrit donc $P_u = \dot{m} \Delta h$

- Le compresseur correspond à l'étape adiabatique AB.

P_{comp} = puissance mécanique prélevée par le compresseur sur l'arbre du moteur = $+P_u = \dot{m} (h_B - h_A)$

Pour la transformation adiabatique réversible AB on a $T_A \frac{\gamma-1}{\gamma} P_A^{1-\gamma} = T_B \frac{\gamma-1}{\gamma} P_B^{1-\gamma}$ d'où $T_B = T_A \left(\frac{P_A}{P_B} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$

$T_B = T_A \left(\frac{P_B}{P_A} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = (273+20) \left(\frac{1,43}{1} \right)^{\frac{1,4-1}{1,4}} = 324,53 \text{ K}$ soit $\theta_B = \underline{51,5^\circ\text{C}}$

Or $h_B - h_A = c_p (\theta_B - \theta_A)$ donc $P_{comp} = \dot{m} c_p (\theta_B - \theta_A) = 0,008 \times 1,10^3 \times (51,5 - 20) = \underline{252 \text{ W}}$

- La turbine correspond à l'étape adiabatique CD.

P_{turb} = puissance mécanique fournie par la turbine à l'arbre du moteur = $-P_u = -\dot{m} (h_D - h_C) = \dot{m} (h_C - h_D)$

Or $h_C - h_D = c_p (\theta_C - \theta_D)$ donc $P_{turb} = \dot{m} c_p (\theta_C - \theta_D) = 0,008 \times 1,10^3 \times (35 - 5) = \underline{240 \text{ W}}$

- La puissance fournie par le moteur au système Compresseur-Turbine est $P_{mot} = P_{comp} - P_{turb} = 252 - 240 = \underline{12 \text{ W}}$

L'efficacité est $e = \frac{|P_{clim}|}{P_{mot}} = \frac{120}{12} = \underline{10}$

- 23) - Dans la réalité les transformations ne sont pas réversibles, les deux étapes adiabatiques ne le sont pas totalement, on n'atteint pas θ_{clim} ...

L'efficacité réelle est donc inférieure à celle du dispositif idéal.

B24) - La structure de l'onde électromagnétique étant la même que dans le vide on a $\|\vec{E}_0\| = c \|\vec{B}_0\|$

$$25) - \left. \begin{aligned} \|\vec{F}_{\text{elec}}\| &= e \|\vec{E}_0\| \\ \|\vec{F}_{\text{magn}}\| &= e \|\vec{v} \wedge \vec{B}_0\| \leq e v \|\vec{B}_0\| \end{aligned} \right\} \frac{\|\vec{F}_{\text{magn}}\|}{\|\vec{F}_{\text{elec}}\|} \leq \frac{e v \|\vec{B}_0\|}{e \|\vec{E}_0\|} = \frac{v}{c}$$

Les particules étant non relativistes on a $v \ll c$ donc $\|\vec{F}_{\text{magn}}\| \ll \|\vec{F}_{\text{elec}}\|$

26) - On applique le PFD aux électrons soumis seulement à la force électrique: $m \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e\vec{E}$

Soit en notation complexe $m(i\omega \vec{v}_e) = -e\vec{E}$ d'où $\vec{v}_e = +i \frac{e}{m\omega} \vec{E}$

27) - Pour les ions il suffit de changer m en M et $-e$ en $+e$ d'où $\vec{v}_p = -i \frac{e}{M\omega} \vec{E}$

- On constate que $\|\vec{v}_p\| = \frac{m}{M} \|\vec{v}_e\|$. Comme $m \ll M$ on a $\|\vec{v}_p\| \ll \|\vec{v}_e\|$

28) - Le déplacement des charges (électron, ion) équivaut à un courant. Soit l'apparition de la densité de courant $\vec{j}$.

- Comme $\|\vec{v}_p\| \ll \|\vec{v}_e\|$, seuls les électrons contribuent à la densité $\vec{j}$.

Par définition $\vec{j} = \rho \vec{v}$ donc ici $\vec{j} = \rho_e \vec{v}_e \stackrel{\text{soit}}{=} (-ne) \left(i \frac{e}{m\omega} \vec{E} \right)$ soit $\vec{j} = -i \frac{ne^2}{m\omega} \vec{E}$

- Par définition $\vec{j} = \chi \vec{E}$ donc ici $\vec{j} = \underline{\chi} \vec{E}$ avec $\underline{\chi} = -i \frac{ne^2}{m\omega}$

29) - La puissance Joule volumique instantanée est $p_j = \vec{j} \cdot \vec{E}$

Ici $\underline{\chi}$ étant imaginaire pur $\vec{j}$ et $\vec{E}$ sont en quadrature donc la valeur moyenne (temporelle) de p_j est nulle: il n'y a pas dissipation d'énergie de l'onde dans le plasma.

Pq: Le résultat est dû au modèle de plasma considéré dans lequel les phénomènes dissipatifs (par exemple force de frottement agissant sur les électrons) n'ont pas été pris en compte.

$$30) - (MG): \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\text{ici } \rho = \rho_{\text{elec}} + \rho_{\text{ion}} = 0 \quad \text{d'où} \quad (1)$$

$$(M\phi): \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\text{d'où} \quad (2)$$

$$(MF): \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{d'où} \quad (3)$$

$$(MA): \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\text{ici } \vec{j} = \underline{\chi} \vec{E}$$

$$\text{d'où} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 0 \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \left(\underline{\chi} \vec{E} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

$$31) - \Delta \vec{E} = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{E}) - \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) \stackrel{(1)}{=} \operatorname{grad}(0) - \operatorname{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = \vec{0} + \frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot} \vec{B}) \stackrel{(4)}{=} \frac{\partial}{\partial t} \left[\mu_0 \underline{\chi} \vec{E} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right]$$

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{Avec } \mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2} \text{ on obtient } \boxed{\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \quad (5)$$

Rq: L'équation (5) redonne l'équation de D'Alembert lorsque $\gamma = 0$

32) - En formalisme complexe : $\Delta \vec{E} = -k^2 \vec{E}$; $\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow i\omega$ et $\gamma = i \frac{me^2}{m\omega}$

(5) s'écrit donc $-k^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} (-\omega^2 \vec{E}) = \mu_0 (i \frac{me^2}{m\omega}) (i\omega \vec{E})$ soit $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \mu_0 \frac{me^2}{m}$

Or $\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}$ donc $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{me^2}{m} = \frac{1}{c^2} \left(\omega^2 - \frac{me^2}{m\epsilon_0} \right)$

On obtient bien $\boxed{k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$ avec $\boxed{\omega_p = \sqrt{\frac{me^2}{m\epsilon_0}}}$

33) - Pour $f < f_p$ on a $\omega < \omega_p$ donc $k^2 < 0$: k est alors imaginaire pur. Il s'agit d'une onde évanescente qui ne se propage pas.

On peut parler de fréquence de coupure du plasma car il se comporte comme un filtre passe-haut.

- Pour communiquer avec un satellite on choisira $\boxed{f > f_p}$ car l'onde doit traverser l'ionosphère.

Pour la communication en onde courte on choisira $\boxed{f < f_p}$ car l'onde doit se réfléchir sur l'ionosphère.

34) - D'après 32) on a $\omega^2 - \omega_p^2 = c^2 k^2$ différentielle $2\omega d\omega = c^2 2k dk$

Par définition $v_g = \frac{d\omega}{dk} = c^2 \frac{k}{\omega} = \frac{c^2}{\omega} \left| \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \right| = c \left| \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega^2} \right| = c \left| 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right|$ soit $\boxed{v_g = c \left| 1 - \frac{f_p^2}{f^2} \right|}$

35) - En dehors de la couche ionosphérique les deux paquets d'onde se déplacent à la même vitesse c .

Dans l'ionosphère, donc sur la distance H , les deux paquets se déplacent à des vitesses différentes v_{g1} et v_{g2} .

Donc $\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{H}{v_{g2}} - \frac{H}{v_{g1}}$ soit $\boxed{\Delta t = \frac{H}{c} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - (f_p/f_2)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - (f_p/f_1)^2}} \right]}$

- Comme $f \gg f_p$ on a $\frac{f_p}{f} \ll 1$ donc $\frac{1}{\sqrt{1 - (f_p/f)^2}} = \left(1 - \frac{f_p^2}{f^2} \right)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{f_p^2}{f^2}$

Donc $\Delta t \approx \frac{H}{c} \left[\left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{f_p^2}{f_2^2} \right) - \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{f_p^2}{f_1^2} \right) \right]$ soit $\boxed{\Delta t = \frac{H f_p^2}{2c} \left(\frac{1}{f_2^2} - \frac{1}{f_1^2} \right)}$

36) - L'onde parcourt la distance $(D-H)$ à la vitesse c et la distance H à la vitesse v_g

$$\text{Donc } t = \frac{D-H}{c} + \frac{H}{v_g} \quad \text{avec } \frac{1}{v_g} \stackrel{34\%}{=} \frac{1}{c \sqrt{1 - (f_p/f)^2}} \approx \frac{1}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{f_p^2}{f^2} \right)$$

$$\text{Donc } t \approx \frac{D-H}{c} + \frac{H}{c} \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{f_p^2}{f^2} \right) \quad \text{soit} \quad \boxed{t = \frac{1}{c} \left(D + \frac{H}{2} \cdot \frac{f_p^2}{f^2} \right)}$$

$$37) - \text{D'après 36\%: } D = ct - \frac{1}{2} H \frac{f_p^2}{f^2} \quad \text{D'après 35\%: } \frac{1}{2} H f_p^2 = \frac{c \Delta t}{\frac{1}{f_i^2} - \frac{1}{f_n^2}}$$

$$\text{Donc } D = ct - \frac{c \Delta t}{f^2 \left(\frac{1}{f_i^2} - \frac{1}{f_n^2} \right)} \quad \text{ce qui donne bien} \quad \boxed{D = c \Delta t - d} \quad \text{avec} \quad \boxed{d = \frac{c \Delta t}{f^2 \left(\frac{1}{f_i^2} - \frac{1}{f_n^2} \right)}}$$

38) - Pour une localisation automobile, une précision de l'ordre du mètre est suffisante, donc la correction ionosphérique n'est pas nécessaire.