

Etude de l'effet Hall.

PSI E3A 2010

A) Régime statique

1) $\vec{J} = N_n (-e) \vec{V}$

$\vec{V}$ est donc dirigé vers les y décroissants, uniforme sur tout le conducteur et indépendant du temps.

2) $\vec{F}_{\text{mag}} = -e \vec{V} \wedge \vec{B}$ est la force exercée sur 1 e^-

Le volume dV de plaquette, contenant $dV \cdot N_n$ électrons subit donc $-e N_n \vec{V} dV \wedge \vec{B} = \vec{J} dV \wedge \vec{B}$

La force de Laplace exercée sur la plaquette est donc

$$\vec{F}_L = \iiint_{\text{plaquette}} \vec{J} dV \wedge \vec{B} = \int_{\text{longueur}} I_0 dy \vec{u}_y \wedge \vec{B} = \underline{I_0 L B \vec{u}_x}$$

(On retrouve 2 formules habituelles: $d\vec{F}_L = \vec{J} dV \wedge \vec{B}$ et $d\vec{F}_L = I_0 d\vec{l} \wedge \vec{B}$)

$\vec{F}_{\text{mag}} = -e \vec{V} \wedge \vec{B}$ et suivant $\vec{u}_y \wedge \vec{u}_z = \vec{u}_x$

Les électrons sont donc déviés vers la plaque 1.

3) Pour que $\vec{J}$ reste suivant $\vec{u}_x$, il faut qu'une force supplémentaire attire les électrons vers les x décroissants.

Cette force est due au champ électrique créé par l'accumulation des électrons sur la face ① (face chargée $-$) et le déficit d'électrons de l'autre côté, sur la face ② (chargée $+$)

En effet, ces 2 faces chargées de signe opposé se comportent comme un condensateur et créent un champ électrique interne suivant $+\vec{u}_x$.

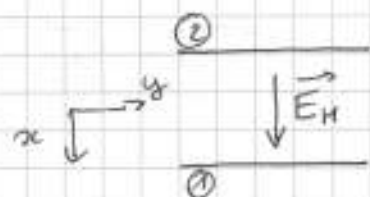
① Finalement $\vec{J}$ reste nul car dès que $\vec{E}$ noté $\vec{E}_H$ compense $\vec{B}$ c'est-à-dire $\vec{F} = -e(\vec{E}_H + \vec{v} \wedge \vec{B}) = \vec{0}$

d'où $\boxed{\vec{E}_H = -\vec{v} \wedge \vec{B}}$

ou $\vec{J} = -N_m e \vec{v}$

d'où $\boxed{\vec{E}_H = k_E \vec{J} \wedge \vec{B}}$

où $\boxed{k_E = \frac{1}{N_m e}}$



4) $V_H = V(P_1) - V(P_2) = \int_{P_2}^{P_1} dV = \int_{P_2}^{P_1} \text{grad } V \cdot d\vec{l}$ par définition du gradient.
 $= - \int_{P_2}^{P_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{P_2}^{P_1} E_H \cdot \vec{u}_x \cdot dx \vec{u}_x = -E_H \int_{P_2}^{P_1} dx$

Ainsi $V_H = -E_H l$

$= -k_E J B l$

ou $J = \frac{I_0}{h l}$

$V_H = -\frac{1}{N_m e} \frac{I_0}{h l} B l$

$\boxed{V_H = -\frac{1}{N_m e} \frac{I_0 B}{h}}$

, ce qui est l'expression demandée avec

$\boxed{R_H = -\frac{1}{e N_m}} < 0$

En fait, si les porteurs étaient des charges positives (trous),

R_H serait > 0 .

R_H est du signe des porteurs de charges (les + nombreux).

5) $\boxed{R_H = -\frac{1}{e N_m} = -3,7 \cdot 10^{-4} \text{ C}^{-1} \cdot \text{m}^3}$

$\boxed{B = \frac{|V_H|}{R_H} \frac{h}{I_0} = 1,0 \text{ T}}$

6) La sensibilité du capteur est le rapport entre la grandeur mesurée en pratique (V_H) et celle qu'on cherche à déterminer (B)

$$S_B = \frac{V_H}{B} = \frac{R_H I_0}{h}$$

A.N: $S_B = 1,2 \cdot 10^{-1} \text{ V.T}^{-1}$

$$7) \frac{\Delta V_H}{V_H} = \frac{\Delta R_H}{R_H} = \frac{e^{-a(t+\Delta t)} - e^{-at}}{e^{-at}} = e^{-a\Delta t} - 1$$

$a\Delta t \approx 0,1$
un DL à l'ordre 1
est insuffisant.

A.N. $\boxed{\frac{\Delta V_H}{V_H} = -0,13}$

V_H a diminué de 13%

Il faut donc stabiliser la température du dispositif.

8) On a trouvé question 2) que $F_L = I_0 L B \vec{u}_x$
et au 4) que $V_H = -\frac{1}{N_e \cdot h} \frac{I_0 B}{L}$

donc $\boxed{V_H = -\frac{1}{N_e} \frac{I_0 L B}{L h}}$

c'est à dire l'expression de l'énoncé

avec $\boxed{S = -\frac{1}{N_e e L h}}$

9) $\vec{E}$ vaut $\vec{E}_0 + \vec{E}_H$

Or $\vec{E}_H$ et $\vec{B}$ ont leurs effets sur les électrons qui se compensent
donc $\vec{J} = \sigma \vec{E}_0$

ou encore $\vec{J} = \sigma (\vec{E} - \vec{E}_H)$

or $\vec{E}_H = k_e \vec{J} \wedge \vec{B}$

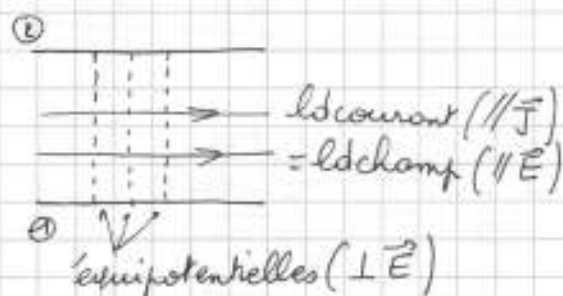
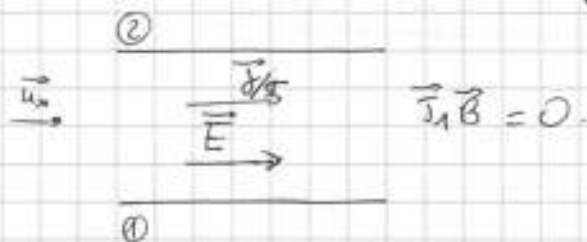
d'où $\boxed{\vec{J} = \sigma (\vec{E} - k_e \vec{J} \wedge \vec{B})}$

CQFD avec $\boxed{k_J = k_e = \frac{1}{N_e e}}$

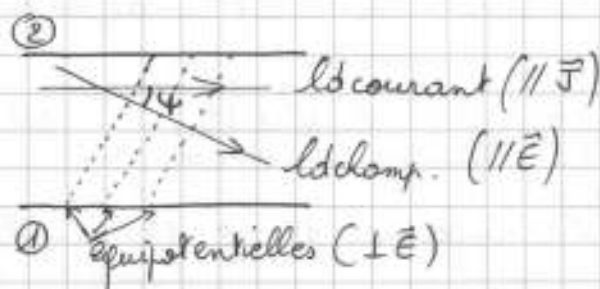
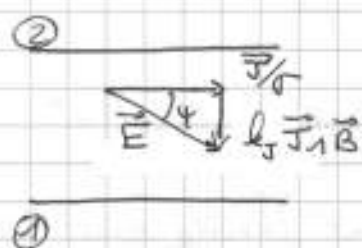
d'où $\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} + k_e \vec{J} \wedge \vec{B}}$

10) Si $\vec{B} = \vec{0}$ $\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma}$

(2)



Si $\vec{B} \neq \vec{0}$ $\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} + k_J \vec{J} \wedge \vec{B}$



11) D'après le schéma ci-dessus (à gauche) $\tan \varphi = \frac{k_J J B}{J/\sigma}$

or $R_H = -\frac{1}{e N_A} = -k_J$

donc $\tan \varphi = -R_H J B$ ou $\boxed{\varphi = \arctan(-R_H J B)}$

A.N. $\varphi = 89^\circ$ Les lignes de champ $\vec{E}$ sont presque perpendiculaires aux lignes de courant.

12) Si $y_1 = y_2$, alors $V(P_1) - V(P_2) = V_H$, il n'y a que la tension de Hall.

Si $y_1 \neq y_2$, alors $V(P_1) - V(P_2) = V_H + \delta V_0$ où δV_0 vient de la circulation de $\vec{E}_0$; $|\delta V_0| = E_0 |S|$ (par analogie avec $|V_H| = E_H l$)

il faut que $\frac{\delta V_0}{V_H}$ soit $< 0,01$, c'est-à-dire.

$$\left| \frac{E_0 S}{E_H l} \right| < 0,01 \quad \frac{J/\sigma S}{|R_H| B J l} < 0,01$$

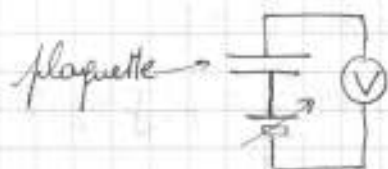
$$S < 0,01 l B R_H \sigma$$

$$S < 0,74 \text{ mm}$$

Il paraît difficile d'atteindre une telle précision.

③

On peut ajouter 1 générateur de tension continue variable, qu'on réglerait pour que $V_{\text{mesuré total}} = 0$ en l'absence de champ $\vec{B}$, ce qui compenserait δV_0 . Au voltmètre, on ne mesurerait plus alors que V_H .



13) En présence d'un champ magnétique $\vec{J} = \sigma \vec{E}_0$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad \text{soit} \quad \vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} + k_e \vec{J} \wedge \vec{B}$$

On veut écrire ça sous la forme $\|\vec{E}\| = \frac{\|\vec{J}\|}{\sigma'}$

$$\text{or } \|\vec{E}\|^2 = \left\| \frac{\vec{J}}{\sigma} \right\|^2 + \|k_e \vec{J} \wedge \vec{B}\|^2 \quad \text{car } \frac{\vec{J}}{\sigma} \text{ et } k_e \vec{J} \wedge \vec{B} \text{ sont perpendiculaires}$$

$$\text{d'où } \|\vec{E}\|^2 = \|\vec{J}\|^2 \left(\frac{1}{\sigma^2} + (k_e \|\vec{B}\|)^2 \right)$$

qui cherche sous la forme $\|\vec{E}\|^2 = \|\vec{J}\|^2 \frac{1}{\sigma'^2}$

$$\text{Par identification: } \sigma'^2 = \sigma^2 \frac{1}{1 + (\sigma k_e B)^2}$$

$$\text{Et finalement } \boxed{\sigma' = \sigma \frac{1}{\sqrt{1 + (\sigma k_e B)^2}}}, \text{ soit le résultat attendu avec } \boxed{\lambda = \sigma k_e = \frac{\sigma}{e N_m}}$$

$$\text{A.N. } \boxed{\sigma' = 2,7 \cdot 10^3 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}}$$

C'est de la magnéto-résistance: en présence de $\vec{B}$, la conductivité diminue / la résistance augmente.

B) Régime dynamique

1) Equation de Maxwell - Gauss (M-G)

$$\text{div } \vec{E} = \rho_{\text{co}} = 0$$

Equation de Maxwell - Faraday (M-F)

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Equation de Maxwell - Thomson (M-T)

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

Equation de Maxwell - Ampere dans l'ARQS (M-A)

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

(Dans l'ARQS, on néglige $\vec{j}_0 = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ devant $\vec{j}$)

2) $\text{div } \vec{j} = 0$ car $\vec{j}$ est suivant $\vec{u}_y$ et ne dépend que de x (et t)

$$\text{rot } \vec{j} = \text{rot}(\sigma(\vec{E} - k_p \vec{j}) \vec{u}_y) \quad \text{or } \vec{j} \wedge \vec{u}_y = j(x,t) b(x,t) \vec{u}_y \wedge \vec{u}_y = j(x,t) b(x,t) \vec{u}_x$$

donc $\vec{j} \wedge \vec{u}_y$ est suivant $\vec{u}_x$ et ne dépend que de x (et t) donc son rotationnel est nul.

$$\text{Ainsi } \text{rot } \vec{j} = \sigma \text{rot } \vec{E} = -\sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{d'après (M-T)}$$

$$\boxed{\text{rot } \vec{j} = -\sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

$$3) \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (\text{M-A}) \quad \text{d'où } \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{vmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{u}_y = \mu_0 j \vec{u}_y$$

$$\text{Ainsi } \boxed{j(x,t) = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial b(x,t)}{\partial x}} \quad (1)$$

$$\text{D'autre part, d'après 2) } \text{rot } \vec{j} = -\sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{d'où } \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ j(x,t) \\ 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial j}{\partial x} \vec{u}_z = -\sigma \frac{\partial b}{\partial t} \vec{u}_z$$

$$\text{d'où } \boxed{\frac{\partial j(x,t)}{\partial x} = -\sigma \frac{\partial b(x,t)}{\partial t}} \quad (2)$$

Pour déterminer l'équation d'onde en j , il faut supprimer b entre les équations (1) et (2):

$$\frac{\partial (1)}{\partial t} : \frac{\partial j}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial^2 b}{\partial x \partial t} \quad \frac{\partial (2)}{\partial x} : \frac{\partial j}{\partial x^2} = -\sigma \frac{\partial^2 b}{\partial x \partial t}$$

Or $\frac{\partial^2 b}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 b}{\partial t \partial x}$ donc

$\boxed{\frac{\partial^2 j}{\partial x^2} = \sigma \gamma_0 \frac{\partial j}{\partial t}}$ C'est l'équation de l'énoncé avec $\boxed{k_D = \sigma \gamma_0}$

C'est une équation de type diffusion (c'est aussi la même que dans l'effet de peau)

4) $\boxed{\frac{d^2 j(x)}{dx^2} = i \omega \sigma \gamma_0 j(x)}$

5) Le plan $(O\vec{u}_y\vec{u}_z)$ est un plan de symétrie pour la plaque et le champ extérieur qui crée $\vec{j}$. Or un champ de symétrie pour $\vec{B}$ est un plan d'antisymétrie pour $\vec{j}$ donc $\vec{j}(-x) = -\vec{j}(x, t)$ (avec $\vec{j}$ suivant $\vec{u}_y$ $\leftarrow \vec{u}_y \rightarrow + (u_y \vec{u}_z)$)

$j(-x, t) = j(-x) \cos(\omega t + \varphi(x)) = -j(x, t) = -j(x) \cos(\omega t + \varphi(x))$

Par identification $j(-x) = -j(x)$ et $\varphi(-x) = \varphi(x)$

Ainsi $j(-x) = -j(x)$

On reporte $j(x) = \underline{A} f(\underline{k}x)$ dans l'équation du 4).

$\underline{A} f''(\underline{k}x) = i \omega \sigma \gamma_0 \underline{A} f(\underline{k}x)$

$f''(\underline{k}x) = \underline{k}^2 f(\underline{k}x)$ car $\underline{k}^2 = \alpha^2 (1 + 2i - 1) = 2\alpha^2 i$
(= $i \omega \sigma \gamma_0$)

Ainsi f est tout simplement une fonction exponentielle

$f(\underline{k}x) = e^{\underline{k}x}$ d'où $e^{-\underline{k}x}$ soit $f(\underline{k}x) = a e^{\underline{k}x} + b e^{-\underline{k}x}$

Or $f(x)$ doit être impaire donc f aussi donc $a = -b$.

et on prendra $a = 1$

ainsi $\boxed{j(x) = \underline{A} \left(e^{\underline{k}x} - e^{-\underline{k}x} \right)}$

6) On va utiliser ② (du 3)) avec $\underline{j}$ et $\underline{b}$

$$\frac{\partial \underline{j}}{\partial x} = -\sigma i \omega \underline{b}(x)$$

$$\underline{A} \underline{k} \left(e^{\underline{k}x} + e^{-\underline{k}x} \right) = -\sigma i \omega \underline{b}(x)$$

$$\text{d'où } \underline{b}(x) = i \frac{\underline{A} \underline{k}}{\sigma \omega} \left(e^{\underline{k}x} + e^{-\underline{k}x} \right)$$

$\underline{b}(x)$ est paire (c'est logique car il est créé par $\underline{j}$ impair)

En l'absence de courants surfaciques (ce qu'on suppose car il y a des courants volumiques), $\underline{B}$ est continu à la traversée d'une interface. donc $\underline{b}(\underline{l}_2^-) = \underline{b}(\underline{l}_2^+)$

et si on néglige $\underline{b}$ induit à l'extérieur de la plaque $\underline{b}(\underline{l}_2^+) = \underline{b}_{\text{ext}}$

donc $\underline{b}(\underline{l}_2^-, t) = \underline{b}_{\text{ext}}(t)$ et de même en $-\underline{l}_2$ $\underline{b}(-\underline{l}_2^+, t) = \underline{b}_{\text{ext}}(t)$

$$\text{Ainsi } \underline{b}(\underline{l}_2) = i \frac{\underline{A} \underline{k}}{\sigma \omega} \left(e^{\underline{k} \underline{l}_2} + e^{-\underline{k} \underline{l}_2} \right) = \underline{b}_{\text{ext}}$$

$$\text{Ainsi } \underline{A} = \frac{\underline{b}_{\text{ext}}}{i \underline{k}} \sigma \omega \left(e^{\underline{k} \underline{l}_2} + e^{-\underline{k} \underline{l}_2} \right)^{-1}$$

$$\text{Finalement } \underline{j}(x) = \frac{\underline{b}_{\text{ext}} \sigma \omega}{i \underline{k}} \left(\frac{e^{\underline{k}x} - e^{-\underline{k}x}}{e^{\underline{k} \underline{l}_2} + e^{-\underline{k} \underline{l}_2}} \right)$$

$$\text{et } \underline{b}(x) = \underline{b}_{\text{ext}} \left(\frac{e^{\underline{k}x} + e^{-\underline{k}x}}{e^{\underline{k} \underline{l}_2} + e^{-\underline{k} \underline{l}_2}} \right)$$

7) La plaque est infinie suivant $\vec{u}_y$ donc invariante par translation suivant $\vec{u}_y$ d'où $\underline{B}_0$ ne dépend pas de y .

Si $z=0$ (ou $\ll h$) $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ est un plan de symétrie des courants donc $\underline{B}_0$ lui est perpendiculaire: $\underline{B}_0$ est suivant $\vec{u}_z$.

(5)

En outre $\text{div } \vec{B}_0 = 0 = \frac{\partial B_0}{\partial z}$ donc $\vec{B}_0$ ne dépend pas de z

et finalement $\vec{B}_0 = B_0(x) \vec{u}_z$ au voisinage de $(0, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$

$x \uparrow$ $\xrightarrow{B_0(x)}$ $(0, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ plan de symétrie des courants
 $\xleftarrow{B_0(-x)}$ donc d'antisymétrie de B_0

donc $B_0(x)$ est impaire et $B_0(0) = 0$

$$\text{ou } \text{rot } \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{J}_0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix} = \mu_0 J_0 \vec{u}_y = -\frac{\partial B_0}{\partial x} \vec{u}_y$$

$$\text{Ainsi } B_0(x) = B_0(0) - \mu_0 J_0 x \quad \text{avec } B_0(0) = 0$$

$$\text{Soit } \boxed{\vec{B}_0(x) = k_B x \vec{u}_z} \quad \text{avec } \boxed{k_B = \mu_0 J_0}$$

$$8) \vec{B} = \left[\mu_0 J_0 x + b_{\text{ext}} \frac{e^{j\omega t} \left(\frac{e^{-kx} - e^{-k/2}}{e^{-k/2} + e^{-k/2}} \right)}{e^{-k/2} + e^{-k/2}} \right] \vec{u}_z$$

$$\vec{J} = \left[J_0 - i \frac{b_{\text{ext}} \sigma \omega}{k} e^{j\omega t} \left(\frac{e^{-kx} - e^{-k/2}}{e^{-k/2} + e^{-k/2}} \right) \right] \vec{u}_y$$

$$\vec{E}_H = \frac{1}{N_m e} (\vec{J} \wedge \vec{B})$$

Attention! en notation réelle!

Mais je n'ai pas le courage de tout écrire en notation réelle!

9) On intègre $\vec{E}_H$ entre $-l/2$ et $l/2$ donc tous les termes impairs donnent une intégrale nulle.

or J_0 est pair et B_0 impair, j est impair et b est pair

donc $J_0 \cdot B_0$ est impair, $j \cdot b$ aussi. Donc que $j \cdot B_0$ est pair, de même que $J_0 \cdot b$.

$$\text{donc } \vec{E}_H = \frac{1}{N_m e} (j \cdot B_0 + J_0 \cdot b) \vec{u}_x$$

$$\text{or } J_0 = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_0}{\partial x} \quad (3) \quad \text{et } j = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial b}{\partial x} \quad (3)$$

Donc $j B_0 + J_0 l = -\frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial}{\partial x} B_0 + \frac{\partial B_0}{\partial x} l \right)$

Ainsi $\boxed{\vec{E}_H = -\frac{1}{N_m e \mu_0} \frac{\partial (l B_0)}{\partial x} \vec{u}_x = \frac{R_H}{\mu_0} \frac{\partial (l B_0)}{\partial x} \vec{u}_x}$ CQFD.

$$V_H = V(P_1) - V(P_2) = \int_{P_2}^{P_1} dV_H = - \int_{P_2}^{P_1} \vec{E}_H dx \vec{u}_x = - \int_{-l/2}^{l/2} E_H dx$$

$$= - \int_{-l/2}^{l/2} \frac{R_H}{\mu_0} \frac{\partial (l B_0)}{\partial x} dx = -\frac{R_H}{\mu_0} \left[(l B_0) \Big|_{-l/2}^{l/2} \right]$$

or $B_0(l/2) = \mu_0 J_0 l/2$ $B_0(-l/2) = \mu_0 J_0 l/2$

$b(l/2) = b_{\text{ext}} \cos \omega t$ $b(-l/2) = b_{\text{ext}} \cos \omega t$

$V_H(t) = \frac{1}{\mu_0 N_m e} b_{\text{ext}} \cos \omega t \mu_0 J_0 l$

$\boxed{V_H(t) = \frac{J_0 l}{N_m e} b_{\text{ext}} \cos \omega t}$

(Oh que j'ai rien fait de ne pas exprimer $b(x, t)$ en notation réelle, ça n'aurait servi à rien)

Les $\vec{j}$ induits n'interviennent pas!

10) $\vec{F}_L = \iiint \vec{J} dV \wedge \vec{B}$ Il n'y a pas moyen que je ne commence

On a trouvé au 9) que $\int_{-l/2}^{l/2} \vec{J} \wedge \vec{B} dx = - \int_{-l/2}^{l/2} \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial (l B_0)}{\partial x} \vec{u}_x = - b_{\text{ext}} \cos \omega t J_0 l \vec{u}_x$

donc $\vec{F}_L = \iint dy dz (-b_{\text{ext}} \cos \omega t J_0 l \vec{u}_x)$

$$= -b_{\text{ext}} J_0 l L h \cos \omega t \vec{u}_x$$

or au A8), on a trouvé $\vec{F}_L \cdot \vec{u}_x \mathcal{G} = V_H$ avec $\mathcal{G} = -\frac{1}{N_m e L h}$

d'où $V_H = \frac{-J_0 l L h b_{\text{ext}} \cos \omega t}{-N_m e L h}$ soit $\boxed{V_H(t) = \frac{J_0 l}{N_m e} b_{\text{ext}} \cos \omega t}$

comme au B.3 (Normal, c'est le même calcul!)