

Lecteurs optiques numériques

Solution proposée par JR Seigne MP,
avec la collaboration de M Libourel Sciences de l'Ingénieur MP*,
Clemenceau Nantes

A. Aspects mécaniques d'un lecteur CD

Caractéristiques cinématiques des éléments d'un lecteur

1. Il faut envisager une spirale linéaire d'équation $r = r_0 + \frac{p}{2\pi}\theta$ en utilisant les coordonnées polaires traditionnelles et p le pas de la spirale. Pour un angle $d\theta$, la distance parcourue est $ds = r d\theta$. La longueur totale de la spirale est donc $L = \int_{\theta=0}^{\theta_f} r d\theta$. On choisit $\theta = 0$ lorsque $r = r_0$, l'angle total parcouru est θ_f tel que $r_1 = r_0 + \frac{p}{2\pi}\theta_f$. La longueur de la spirale est donc $L = r_0\theta_f + \frac{p}{2\pi}\frac{\theta_f^2}{2}$. En utilisant l'expression de θ_f définie avant, on arrive à : $L = \pi \frac{r_1^2 - r_0^2}{p}$ et on trouve $L = 5,38$ km.

2. La vitesse de défilement de chaque portion du parcours est constante, on en déduit que la durée totale de lecture est $T = \frac{L}{V}$. On trouve une durée de 1 heure et 15 minutes, ce qui est conforme à ce que l'on observe lorsqu'on utilise un CD.

3. Sur une portion élémentaire de spirale, on a $ds = r d\theta$ et donc puisque $V = \frac{ds}{dt}$, une vitesse linéaire reliée à la vitesse rotation par l'expression classique $V = r\omega(r)$. La vitesse de rotation $\omega(r) = \frac{V}{r}$ décroît en $1/r$ entre r_0 et r_1 , voir le graphique de la figure 1. On trouve numériquement $\omega_0 = \frac{V}{r_0} = 48,0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ce qui fait 460 tours par minute et $\omega_1 = \frac{V}{r_1} = 20,7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, c'est-à-dire 200 tours par minute.

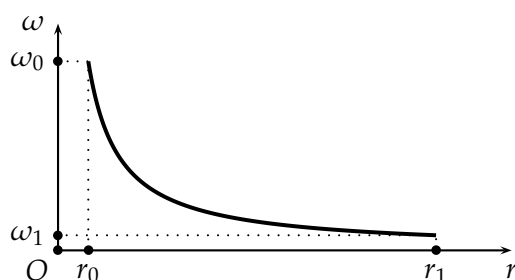


FIG. 1 – Vitesse de rotation du CD

4. On a $\dot{u}(r) = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$. On trouve $\frac{p}{2\pi} \frac{V}{r}$. L'application numérique conduit à $\dot{u}_0 = \frac{p}{2\pi} \frac{V}{r_0} = 12,2 \text{ } \mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\dot{u}_1 = \frac{p}{2\pi} \frac{V}{r_1} = 5,3 \text{ } \mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Une solution technologique pour le déplacement du spot laser

5. Les liaisons en A et B sont des liaisons de type sphère-cylindre, la liaison en C est une liaison de type sphère-plan de normale Oz. Le graphe de liaisons est représenté sur la figure 2.

6. La liaison est finalement de type glissière. Le torseur cinématique en A possède une résultante nulle $\Omega = \mathbf{0}$ et le moment suivant : $\mathbf{V}_A = \dot{u}\mathbf{e}_x$. Le chariot support de la lentille ne possède qu'un seul degré de liberté en translation.

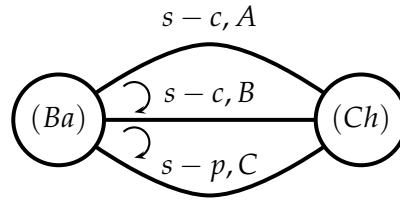


FIG. 2 – Graphe de liaisons

7. Le degré d'hyperstatisme se détermine par la formule $h = m_c + 6\gamma - I_c$. m_c représente les mouvements cinématiques possibles, ici $m_c = 1$ puisque, comme nous venons de le voir il n'y a qu'un seul degré de liberté. γ représente le nombre de cycles indépendants que l'on peut voir dans le graphe de liaisons, ici, on a $\gamma = 2$. Enfin, I_c représente le nombre d'inconnues cinématiques au départ. Pour les points A et B, on a à chaque fois 4 inconnues et pour le point C, il y en a 5. En tout, on a donc $I_c = 13$. Le calcul conduit à : $h = 0$. Le modèle proposé des liaisons du chariot sur le bâti est donc isostatique.

Dynamique du déplacement radial du chariot

8. K_t étant la rigidité en torsion, encore appelée constante de torsion en physique, c'est la différence des angles de rotation entre le bas de l'axe et le haut de l'axe qui va provoquer l'existence du couple de torsion. En haut de l'axe, on aura $C_1 = K_t(\theta_m - \theta_1)$.

9. Le théorème du moment cinétique scalaire projeté sur l'axe de rotation appliqué au rotor du moteur dans le référentiel galiléen du bâti donne : $I_m \ddot{\theta}_m = C_m - K_t(\theta_m - \theta_1)$ puisque le rotor du moteur subit le couple moteur et le couple de rappel de torsion exercé par l'axe de transmission.

10. On applique la relation de la dynamique toujours dans le référentiel galiléen du bâti au chariot support de la lentille de masse M . Les seules forces mentionnées sont le poids perpendiculaire au déplacement et la force F_p . Aucun frottement n'est mentionné, on supposera donc que la réaction de ce qui soutient le chariot est elle-aussi perpendiculaire au déplacement. En projection sur la droite du déplacement, la relation de la dynamique est donc : $M\ddot{u} = F_p$.

11. On a $M\ddot{u} = \frac{C_1}{K_e} = \frac{K_t}{K_e}(\theta_m - \theta_1)$, on utilise aussi $\theta_1 = \frac{u}{K_e}$ et l'équation devient $M\ddot{u} - \frac{K_t}{K_e}\theta_m + \frac{K_t}{K_e^2}u = 0$. À partir du théorème du moment cinétique sur l'axe, on a $I_m \ddot{\theta}_m = C_m - K_t(\theta_m - \frac{u}{K_e})$. Il suffit de réécrire un peu cette équation pour conclure à $I_m \ddot{\theta}_m + K_t\theta_m - \frac{K_t}{K_e}u = C_m$.

12. À partir de ces deux équations, on peut écrire la forme matricielle suivante : $[M]\ddot{X} + [K]X = F$ avec les matrices suivantes :

$$[M] = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \quad [K] = \begin{bmatrix} K_t & -\frac{K_t}{K_e} \\ -\frac{K_t}{K_e} & \frac{K_t}{K_e^2} \end{bmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} C_m \\ 0 \end{pmatrix}$$

Toutes les valeurs numériques sont fournies à l'exception de $\frac{K_t}{K_e} = 1,96 \times 10^4$ SI et $\frac{K_t}{K_e^2} = 4,9 \times 10^8$ SI.

13. En régime harmonique de pulsation ω avec $C_m = 0$, on obtient l'écriture suivante :

$$\begin{bmatrix} K_t - I_m\omega^2 & -\frac{K_t}{K_e} \\ -\frac{K_t}{K_e} & \frac{K_t}{K_e^2} - M\omega^2 \end{bmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce système possède une solution non nulle lorsque le déterminant de la matrice est nul. L'équation est donc $(K_t - I_m\omega^2)(\frac{K_t}{K_e^2} - M\omega^2) - \frac{K_t^2}{K_e^2} = 0$. On obtient l'équation suivante $(MK_t + I_m\frac{K_t}{K_e^2})\omega^2 = MI_m\omega^4$. Cette

équation possède comme solution $\omega_1 = 0$ et $\omega_2 = \sqrt{\frac{K_t}{I_m} + \frac{K_t}{MK_e^2}}$. Les fréquences propres à déterminer sont donc $f_1 = 0$ et $f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = 158$ kHz. Dans cette question, l'énoncé nous invitait à trouver numériquement deux fréquences propres significatives, c'est-à-dire a priori non nulle. La modélisation du problème ne fait intervenir qu'un seul élément exerçant un rappel linéaire, à savoir la torsion de l'arbre de transmission,

il ne peut pas y avoir deux fréquences propres. On peut aussi faire remarquer que l'inertie de l'arbre de transmission n'est pas évoquée (pas de moment d'inertie) et qu'il aurait été préférable de modéliser la torsion en décrivant l'arbre de transmission comme constitué de deux parties parfaitement rigides reliées entre elles par un ressort de torsion en spirale. Comme on l'a montré, une recherche littérale de la fréquence propre est tout à fait possible.

Système de suivi de la piste spirale

14. On calcule le moment de la force f_r par rapport au point de rotation correspondant au premier amincissement de la pièce liée au chariot. Ce moment est, dans l'approximation des petits angles, $f_r \ell_r$. Ce moment correspond à celui lié à l'élasticité de la pièce amincie $c\alpha_r$ puisque l'on est au repos. On écrit donc $c\alpha_r = f_r \ell_r$ et comme $\alpha_r \simeq \frac{x_r}{\ell_r}$, on peut conclure que $f_r = \frac{c}{\ell_r^2} x_r$.

15. Pour un ressort, on aurait une force de la forme $f_r = k_r x_r$ (en norme), ainsi on peut faire une analogie avec un système masse-ressort de constante de raideur : $k_r = \frac{c}{\ell_r^2}$. Le support de lentille est maintenu avec deux fois deux ressorts en parallèles. On peut considérer que l'on a une association en série de deux ressorts de raideur équivalente $k_r/2$ et qu'il y a deux systèmes précédents en parallèles de raideur équivalente $\frac{k_r}{2} + \frac{k_r}{2} = k_r$. On peut traiter la suite du problème avec une seule force de rappel de forme $-k_r x_r$.

16. Les forces appliquées sont le frottement $-\mu \dot{x}_r$, la force de rappel du ressort $-k_r x_r$ et la force f_r . La relation de la dynamique appliquée au support de masse m dans le référentiel du bâti galiléen est donc : $m\ddot{x}_r = -\mu \dot{x}_r - k_r x_r + f_r$ qui se réécrit $m\ddot{x}_r + \mu \dot{x}_r + k_r x_r = f_r$. On passe en transformée de LAPLACE et on écrit que $(mp^2 + \mu p + k_r)X_r = F_r$. On obtient l'expression de la fonction de transfert : $H_r(p) = \frac{1}{mp^2 + \mu p + k_r}$.

17. Le champ magnétique $\mathbf{B}$ étant uniforme, le calcul de la force de LAPLACE est donc simplifié. Il ne faut pas oublier que cette force est une force qui va s'opposer à la cause qui lui a donné naissance (loi de LENZ). L'intensité du courant étant i , la longueur de fil étant ℓ , on en déduit que la force de LAPLACE est $f_r(t) = -i\ell B$.

18. Il faut appliquer la loi des mailles dans le circuit proposé. On a donc $u_b = Ri + L \frac{di}{dt} - e_m$. En utilisant le gain du transformateur K_b , on a $u_b = K_b u$. La relation différentielle est donc : $Ri + L \frac{di}{dt} - e_m = K_b u$.

19. On écrit l'équation électrique en transformée de LAPLACE $(Lp + R)I - B\ell p X_r = K_b U$ et donc $I = \frac{K_b U + B\ell p X_r}{Lp + R}$. On injecte cette expression dans l'équation mécanique :

$$[(mp^2 + \mu p + k_r)(Lp + R) + B^2 \ell^2 p] X_r = -B\ell K_b U.$$

20. Le coefficient d'autoinductance étant très faible, on néglige son influence. Par conséquent, en factorisant par le produit mR , on arrive à la forme : $\frac{X_r(p)}{U(p)} = \frac{-\frac{B\ell K_b}{mR}}{p^2 + (\frac{\mu}{m} + \frac{B^2 \ell^2}{mR})p + \frac{k_r}{m}}$.

21. La fonction obtenue à la question précédente devient $\frac{X_r(p)}{U(p)} = \frac{H_0}{ap^2 + bp + 1}$ avec $H_0 = -11,3 \text{ m} \cdot \text{V}^{-1}$, $a = 10^{-5} \text{ s}^2$ et $b = 6 \times 10^{-5} \text{ s}$. L'ensemble des coefficients du polynôme de degré 2 en p étant de signe positif, le système est forcément stable.

Asservissements du suivi de la piste spirale ou de focalisation

22. On a $Y = H\varepsilon$ et $\varepsilon = X - Y$, on en déduit que $\frac{Y}{X} = \frac{H(p)}{1+H(p)}$. On en déduit immédiatement le transfert de l'erreur $\frac{\varepsilon}{X} = \frac{1}{1+H(p)}$. Pour être stable, la fonction de transfert en boucle fermée doit posséder des pôles dont les parties réelles sont négatives. D'autre part, la robustesse du système sera assurée si la fonction de transfert en boucle ouverte est telle que lorsque $\varphi = -180^\circ$ alors $|\underline{H}| < 1$ et lorsque $|\underline{H}| = 1$ alors $\varphi > -180^\circ$.

23. On a $\Delta a = a_+ - a_-$. Cela correspond en fait au secteur du disque inférieur qui chevauche la piste. On ne connaît pas la relation entre h et R_s mais on voit sur l'énoncé que $2R_s > h$. Si c'est le cas, alors il existe une plage de valeurs de ζ_r pour laquelle ni a_+ , ni a_- ne chevauchent la piste. Si $\zeta_r \leq R_s - \frac{h}{2}$ alors $\Delta a = 0$. Le système ne détecterait l'erreur de position qu'une fois passé ce seuil. Étudions la situation correspondant au schéma de l'énoncé. On se réfère à la figure 3 où $y = \zeta_r - (R_s - \frac{h}{2})$.

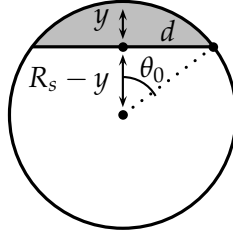


FIG. 3 – Principe du tracking

La surface peut être calculée de deux manières. On a $\Delta a = \pi R_s^2 - S_{2(\pi-\theta_0)} - (R_s - y)d$ avec $S_{2(\pi-\theta_0)} = (\pi - \theta_0)R_s^2$ et $d = \sqrt{R_s^2 - (R_s - y)^2}$. Après calcul, on trouve que $\Delta a = \theta_0 R_s^2 - (R_s - y)^2 \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta_0} - 1}$ avec $\cos \theta_0 = \frac{R_s - y}{R_s}$. Cette expression peut encore être écrite selon $\Delta a = \theta_0 R_s^2 - (R_s - y) \sqrt{R_s^2 - (R_s - y)^2}$. On peut aussi poser l'intégrale de surface selon $\Delta a = 2 \int_0^{\theta_0} \left(\int_{\frac{R_s - y}{\cos \theta}}^{R_s} r dr \right) d\theta$. On trouve $\Delta a = \theta_0 R_s^2 - (R_s - y)^2 \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \theta_0 R_s^2 - (R_s - y)^2 \tan \theta_0$. Avec l'expression de la tangente, on retrouve l'expression précédente. Comme l'erreur ξ_r est petite, l'angle θ_0 sera lui aussi petit. On peut effectuer un développement limité et écrire que $\sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta_0} - 1} \simeq \theta_0$ en utilisant $\cos \theta_0 = 1 - \frac{\theta_0^2}{2}$. On a donc $\Delta a = \theta_0 [R_s^2 - (R_s - y)^2] = \theta_0 (2R_s - y)y$ et comme $y \ll R_s$, on se contentera de $\Delta a = 2R_s \theta_0 y$. Comme $\cos \theta_0 = \frac{R_s - y}{R_s} = 1 - \frac{y}{R_s}$, on voit que $\theta_0^2 = \frac{2y}{R_s}$. Par conséquent, on a $\theta_0 = \sqrt{2} \sqrt{\frac{y}{R_s}}$. L'expression de la surface devient $\Delta a = 2\sqrt{2} \sqrt{R_s y^3}$. Or, comme nous l'avons vu, on a $y = \xi_r - (R_s - \frac{h}{2})$. Cela permet d'écrire que $\Delta a = 2\sqrt{2} \sqrt{R_s \left(\xi_r - (R_s - \frac{h}{2}) \right)^3}$. En supposant que $R_s = \frac{h}{2}$, on arrive alors à $\Delta a = 2\sqrt{2} \sqrt{R_s \xi_r^3}$. La surface perçue n'évolue pas de façon linéaire avec ξ_r et donc la tension $u(t) = K_c \Delta a$ évoluera de façon non linéaire.

24. Puisque le système de détection d'erreur fonctionne dans sa zone linéaire uniquement, on aura

$$H_1 = \frac{5}{20 \times 10^{-6}} = 2,5 \times 10^5 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}.$$

25. On étudie en régime harmonique et on pose logiquement $p = j\omega$. Pour l'étude du gain et de la phase dans le diagramme de BODE, on effectue à chaque fois la différence entre les diagrammes de 2 fonctions de transfert du premier ordre de pulsation de coupure $\omega_{ca} = \frac{1}{k\tau}$ pour le numérateur et $\omega_{cb} = \frac{k}{\tau}$ pour le dénominateur. Leur position respective dépend de la comparaison de k avec 1. On a noté $H_a = 1 + j\frac{\omega}{\omega_{ca}}$ et $H_b = 1 + j\frac{\omega}{\omega_{cb}}$. Ainsi $G_2 = G_a - G_b$ et $\varphi_2 = \varphi_a - \varphi_b$. Les courbes sont représentées sur les figures 4 et 5.

Pour la courbe de phase, on note que l'on a $\varphi_2 = \arctan \frac{\omega}{\omega_{ca}} - \arctan \frac{\omega}{\omega_{cb}}$. Le diagramme pour $k < 1$ consiste à avoir un minimum de phase à la place d'avoir un maximum. La recherche du maximum de phase est sans doute plus simple en écrivant la fonction de transfert selon $H_2 = \frac{1}{1 + \frac{\omega^2 \tau^2}{k^2}} ((1 + j\omega k \tau)(1 - j\frac{\omega \tau}{k})) =$

$$\frac{1}{1 + \frac{\omega^2 \tau^2}{k^2}} (1 + \omega^2 \tau^2 + j\omega \tau (k - \frac{1}{k})). \text{ On a donc } \tan \varphi_2 = \frac{\omega \tau (k - \frac{1}{k})}{1 + \omega^2 \tau^2} = f(\omega). \text{ La dérivée est } \frac{df}{d\omega} = \frac{\tau (k - \frac{1}{k}) (1 - \omega^2 \tau^2)}{(1 + \omega^2 \tau^2)^2},$$

elle s'annule en $\omega = \frac{1}{\tau}$. On a ensuite $\tan \varphi_{max} = \frac{1}{2} (k - \frac{1}{k})$.

26. La fonction de transfert H_3 correspond à ce que l'on a vu dans la partie précédente. On peut ainsi écrire que $H_3 = \frac{X_r(p)}{U(p)} = \frac{H_0}{ap^2 + bp + 1}$. Le schéma complet de la régulation est donné à la figure 6.

On considère la fonction de transfert en boucle ouverte $\underline{H} = \underline{H}_1 \underline{H}_2 \underline{H}_3 = \frac{H_0 H_1}{(1 - a\omega^2) + j b \omega} \frac{1 + j k \omega \tau}{1 + j \omega \tau / k}$. On cherche en fait une pulsation correspondant au maximum de la marge de phase $\omega = 1/\tau$ telle que la phase φ soit $\varphi = -180 + 85 = -95^\circ$ et telle qu'en même temps $|\underline{H}| = 1$. La recherche est fastidieuse sur le plan du calcul. Mais il est raisonnable de faire le calcul pour ω élevée de telle sorte que $\underline{H}_1$ puisse être assimilée à la contribution de son terme d'ordre 2. On écrit donc que $\underline{H} = \frac{-H_0 H_1}{a\omega^2} \frac{1 + j k \omega \tau}{1 + j \omega \tau / k}$. Comme $-H_0 H_1 > 0$, la phase est celle de $\underline{H}_2$. On a montré que pour $\omega = 1/\tau$, on avait $\tan \varphi = \frac{1}{2} (k - \frac{1}{k})$. Avec $\varphi = -95^\circ$, on trouve $k = 22,9$. Or, $|\underline{H}_2| = \sqrt{\frac{1 + k^2}{1 + 1/k^2}} = k$ lorsque $\omega = 1/\tau$. Ainsi la recherche de τ s'effectue en écrivant que $1 = \frac{|H_0| H_1}{a\omega^2} k$. Avec les valeurs numériques déterminées avant, on arrive à $\omega = 2,5 \times 10^6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$,

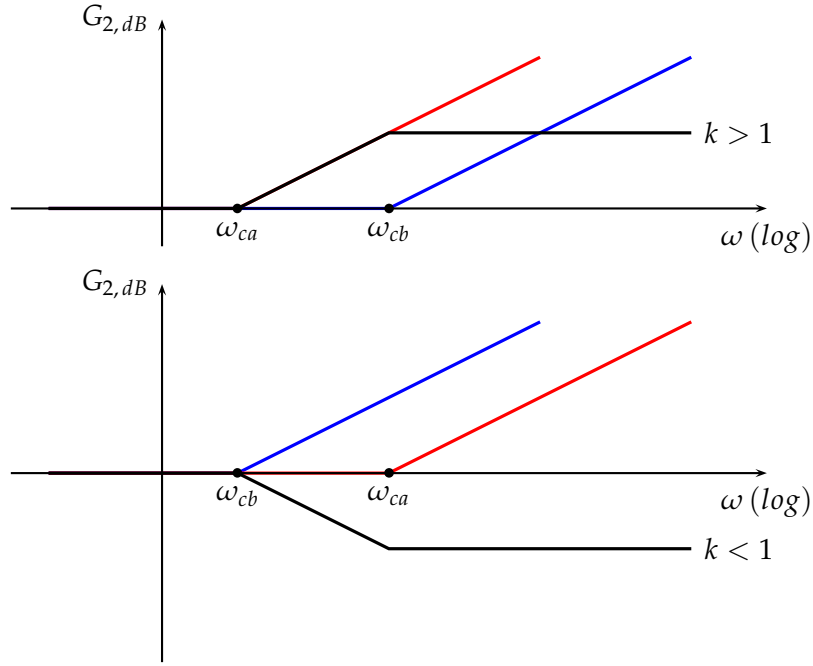


FIG. 4 – Gain asymptotique de l'amplificateur à marge de phase

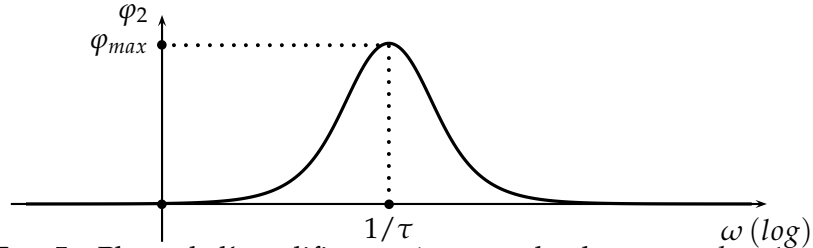


FIG. 5 – Phase de l'amplificateur à marge de phase pour $k > 1$

cela correspond à une fréquence de 400 kHz. On constate que l'hypothèse effectuée avant était justifiée car $1 \ll a\omega^2 = 6 \times 10^7$, $a\omega^2 \gg \omega b = 150$. On peut donc conclure que : $\tau = \frac{1}{\omega} = 4 \times 10^{-7} \text{ s}$.

B. Aspect de la partie optique d'un lecteur CD

Isolateur optique

1. On commence par projeter le champ électrique dans la nouvelle base proposée : $\mathbf{E} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \exp i(\omega t - k_0 z) \mathbf{e}_L + \frac{E_0}{\sqrt{2}} \exp i(\omega t - k_0 z) \mathbf{e}_R$. Si l'on considère maintenant une abscisse z située au-delà de la lame, il faut prendre en compte le fait que la traversée pour chaque composante correspond à un chemin optique supplémentaire de la forme $\delta = (n_{L,R} - 1)d$. On a donc un champ électrique de la forme $\mathbf{E} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \exp i(\omega t - k_0(z + (n_L - 1)d)) \mathbf{e}_L + \frac{E_0}{\sqrt{2}} \exp i(\omega t - k_0(z + (n_R - 1)d)) \mathbf{e}_R$. On en déduit que $\frac{E_R}{E_L} = \exp i k_0(n_L - n_R)d$.

2. Le déphasage est $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}(n_L - n_R)d = 28,53 \times \pi$. On peut dire de façon approchée que $\varphi \simeq 14 \times (2\pi) + \frac{\pi}{2}$. Finalement, on a : $\frac{E_R}{E_L} \simeq i \frac{\pi}{2}$. Le qualificatif de quart-onde vient du fait que le déphasage de $\pi/2$ représente un quart de période donc un quart de longueur d'onde.

3. On revient en notation réelle, après la lame, on a donc $\mathbf{E}_L = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos(\omega t - k_0 z_0) \mathbf{e}_L$ et $\mathbf{E}_R = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos(\omega t - k_0 z_0 + \frac{\pi}{2}) \mathbf{e}_R = -\frac{E_0}{\sqrt{2}} \sin(\omega t - k_0 z_0) \mathbf{e}_R$. Le vecteur champ électrique constitué par ces deux composantes perpendiculaires voit son extrémité décrire un cercle de rayon $E_0/2$ dans le sens inverse du sens trigonométrique. On parle de polarisation circulaire droite.

4. On sait que la composante tangentielle d'un champ électrique est continue à la traversée d'une surface de séparation entre deux milieux. La surface du CD est considérée comme la surface d'un conducteur

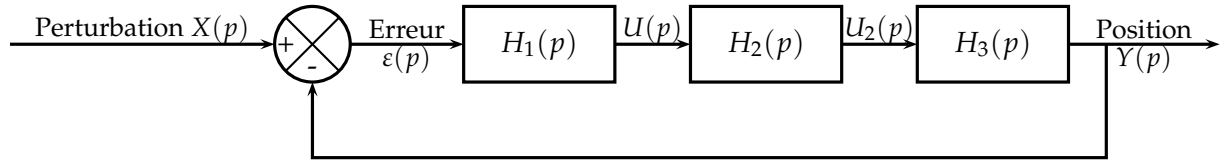


FIG. 6 – Schéma complet de la régulation

parfait du fait de sa très grande conductivité. Le champ électrique est donc nul à l'intérieur du conducteur. Par continuité, le champ électrique à la limite extérieure à la surface doit être nul. Le champ électrique qui se présente sur cette surface est intégralement tangent puisqu'il appartient au plan $(CD)xy$, on a donc $\mathbf{E}_{inc} + \mathbf{E}_{ref} = \mathbf{0}$. Le champ réfléchi est changé de signe par rapport au champ électrique incident, cela correspond à un déphasage de π . Les deux composantes étant affectées par le changement de signe, leur déphasage reste toujours de $\pi/2$. Si l'on passe en notation réelle et que l'on change l'origine des dates, on peut écrire que la forme des composantes du champ électrique après la réflexion est de la forme $\mathbf{E}_L = -\frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos(\omega t + k_0 z) \mathbf{e}_L$ et $\mathbf{E}_R = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \sin(\omega t + k_0 z) \mathbf{e}_R$.

5. Après la seconde traversée de la lame, on a un nouveau déphasage de $\pi/2$ affectant la composante sur $\mathbf{e}_R$. Sans se préoccuper à nouveau de l'origine des dates, les expressions des champs deviennent $\mathbf{E}_L = -\frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos(\omega t + k_0 z) \mathbf{e}_L$ et $\mathbf{E}_R = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \sin(\omega t + k_0 z + \frac{\pi}{2}) \mathbf{e}_R = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos(\omega t + k_0 z) \mathbf{e}_R$. Le champ électrique total est $\mathbf{E} = \mathbf{E}_R + \mathbf{E}_L = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos(\omega t + k_0 z) (\mathbf{e}_R - \mathbf{e}_L)$. Or $\mathbf{e}_R - \mathbf{e}_L = \sqrt{2} \mathbf{e}_y$. Le champ électrique total est donc après la sortie de la lame $\mathbf{E} = E_0 \cos(\omega t + k_0 z) \mathbf{e}_y$. Il est de polarisation rectiligne mais de direction Oy maintenant. Le cube séparateur CS va donc le dévier de 90° et l'envoyer comme indiqué dans l'énoncé vers le photodétecteur PD.

Focalisation

6. a est le diaphragme limitant l'extension spatiale du faisceau lumineux. Les rayons diffractés, inclinés d'angles compris entre $-\alpha$ et $+\alpha$ par rapport à l'axe optique, vont former dans le plan focal image de la lentille L_2 , une tache de diamètre $\phi_D = 2\alpha f_2$, c'est-à-dire $\phi_D = \frac{1,22\lambda_0}{a} f_2$.

7. On trouve $\phi_D = 1,9 \mu\text{m}$. Compte tenu du fait que $a = 1,25 \text{ mm}$ et $f_2 = 2,5 \text{ mm} = 2a$, on ne se situe pas dans les conditions de GAUSS car a n'est pas petit devant f_2 .

8. Le rayon le plus incliné vient du bord du faisceau, l'angle u de l'ouverture numérique est donc défini par $\sin u = \frac{a}{\sqrt{a^2 + f_2^2}}$. On est dans l'air donc $n = 1$, on trouve $(NA) = \sin u = 0,45$ et par conséquent

$\phi_{NP} = \frac{1,22\lambda_0}{(NA)} = 2,1 \mu\text{m}$. Ce diamètre est un peu plus grand que le précédent, on voit donc que le facteur limitant la focalisation du faisceau n'est pas dû à la diffraction mais dû au fait qu'on travaille en optique non paraxiale, en clair loin de l'axe optique.

9. Le dioptré plan va provoquer un décalage longitudinal de la position de focalisation. Malgré les observations précédentes, l'énoncé nous invite à travailler dans les conditions de GAUSS pour faciliter les calculs. Par exemple, la loi de DESCARTES $\sin i_1 = n \sin i_2$ va devenir $i_1 \simeq n i_2$. La construction est réalisée sur le schéma de la figure 7. On voit sur cette figure que $h_1 = i_1 z_2$ et $h_2 = i_2 e$ avec $a = h_1 + h_2 = i_1 z_2 + i_2 e$. On constate aussi que $a = f_2 i_1$ et en tenant de la loi de la réfraction $i_1 = n i_2$, on trouve que $z_2 = f_2 - \frac{e}{n}$. Numériquement, cela donne $z_2 = 1,73 \text{ mm}$. On peut aussi déterminer le décalage longitudinal $F_2 G_2 = \Delta z = z_2 + e - f_2 = e(1 - \frac{1}{n})$, on a $\Delta z = 1,09 \text{ mm}$.

10. Lorsqu'on passe dans le diélectrique, l'ouverture numérique ne change pas puisque $(NA) = n \sin i_2 = \sin i_1$ par la loi de DESCARTES. On a toujours $(NA) = 0,45$ comme dans l'air. Par contre, on doit utiliser la longueur d'onde dans le milieu $\lambda = \lambda_0/n$. On trouve donc que $\phi'_{NP} = \frac{1,22\lambda_0}{n \times 0,45} = \frac{\phi_{NP}}{n}$. On trouve que le diamètre du spot sur le CD sera finalement : $\phi = 1,4 \mu\text{m}$. Le grandissement transversal d'un dioptré plan est de 1. Pour le démontrer, il suffit de considérer un objet $\overline{AB}$ disposé parallèlement au dioptré

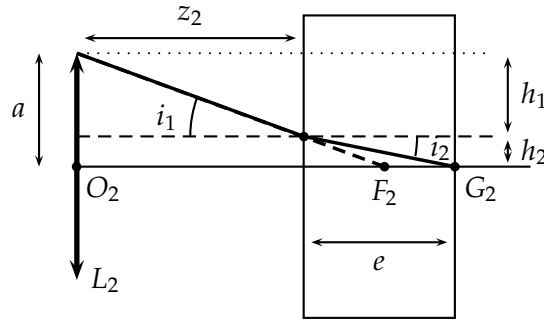


FIG. 7 – Position du CD par rapport à la lentille L_2

plan et de voir que le rayon normal au dioptre passant par B n'est pas dévié. L'image de B (dans les conditions de GAUSS pour assurer le stigmatisme) sera forcément sur le support du rayon évoqué avant. La taille de l'image sera donc égale à la taille de l'objet. On peut aussi s'en convaincre en plaçant l'objet sur le dioptre. Cet objet va donc être confondu avec son image. La diminution de la taille du faisceau au niveau de sa focalisation a pourtant diminué d'après le calcul basé sur l'ouverture numérique. Cela peut sembler paradoxal. On peut l'expliquer en indiquant que les rayons extrêmes dans le diélectrique sont moins inclinés que dans l'air et, donc, qu'on se situe un peu plus près des conditions de GAUSS qui donneraient une taille de faisceau uniquement limitée par la diffraction. On a donc une tache de focalisation plus petite.

Détection optique des défauts de focalisation

11. En fait, un rayon parallèle à Oz et contenu dans le plan Oxz voit finalement une lame de verre à faces parallèles. Les rayons ne sont pas déviés. Par contre, les rayons parallèles à Oz et contenus dans le plan Oyz voient tout d'abord un dioptre plan à l'entrée dans la lentille cylindrique et ensuite un dioptre sphérique convexe à la sortie. Pour eux, tout se passe comme s'ils traversaient une lentille plan-convexe. Le tracé des rayons est représenté sur la figure 8.

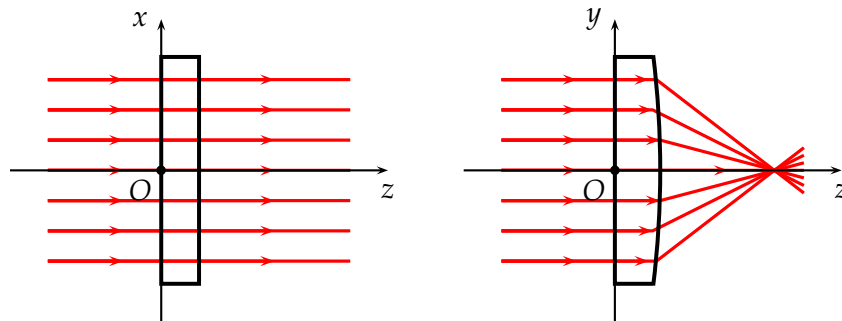


FIG. 8 – Traversée de la lentille cylindrique

12. La lentille convergente qui précède la lentille cylindrique fait arriver sur cette dernière des rayons convergents. Puisque les rayons parallèles à Oz et contenus dans le plan Oxz voient une lame à faces parallèles, l'orientation des rayons n'est pas changée par la traversée de la lame. Ils sont juste translatés comme on peut le comprendre sur le schéma de la figure 7. La lentille cylindrique ne fait que reculer un peu le point de focalisation (de la distance $\Delta z = e(1 - \frac{1}{n})$) si l'on est dans les conditions de GAUSS). On peut prolonger la réponse, en indiquant que les rayons du plan Oyz arrivant déjà convergents sur un dispositif qui est de part leur situation plan-convexe vont être encore plus rapidement focalisés. Leur point de focalisation va être encore plus près de la lentille cylindrique qu'avant.

13. Les rayons lumineux sortant de la lentille cylindrique vont mettre en évidence deux lieux de focalisation : le plus proche de lentille par l'effet décrit pour les rayons du plan Oyz et plus loin par l'effet de lame à faces parallèles pour les rayons du plan Oxz . La situation est présentée sur le schéma de la figure 9 où l'on voit les deux traits focaux évoqués par l'énoncé.

14. Comme on l'a vu à la question précédente, les rayons du plan Oxz et parallèles à Oz vont converger



15. Sur la figure 10, on peut voir les traits focaux ramenés dans le même plan.


$$d_{mc} = 2a \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2}.$$

19. On sait qu'avec un miroir plan, lorsque un objet s'approche d'une distance z d'un miroir plan, son image se rapproche de $2z$ du fait de la symétrie plane. Il en est exactement de même lorsqu'on s'éloigne du

miroir. Dans ces conditions, le point source du faisceau réfléchi s'est rapproché de 2δ . On étudie la formule du grandissement axial g vu avant pour conclure que l'image se déplace de $\delta' = g2\delta$ et donc que $\delta' = 2G^2\delta$.

On peut conclure que : $\delta' = 2\frac{f_1^2}{f_2^2}\delta$.

20. À l'aide des valeurs numériques fournies, on trouve que $R_c = 133 \text{ mm}$, $\Delta_1 = 198 \text{ }\mu\text{m}$, $\Delta_2 = 191 \text{ }\mu\text{m}$ et $d_{mc} = 97 \text{ }\mu\text{m}$.

21. Le grandissement transversal du système est $G = \frac{f_1}{f_2} = 7$. À partir d'une tache de diamètre $\phi = 1,4 \text{ }\mu\text{m}$, on obtiendrait une tache image de $G\phi \simeq 10 \text{ }\mu\text{m}$. Cette valeur est nettement inférieure au diamètre du cercle de confusion. Le fait que la source en F_2 ne soit pas ponctuelle n'a pas d'importance.

22. Le fait de s'approcher de la lentille fait que $d\overline{OA} = \delta > 0$. Comme g est positif, le déplacement δ' axial sera lui aussi positif et, par conséquent, l'image se décale au-delà du photodétecteur. Le point C_2 se rapproche du photodétecteur. Ainsi la taille de la tache image se réduit sur la direction Oy alors qu'elle augmente sur l'axe Ox . Si le CD s'éloigne, c'est le contraire, on inverse les rôles des axes Ox et Oy . On a ainsi le moyen comprendre si le CD se rapproche ou s'éloigne. La symétrie sphérique des lentilles traditionnelles ne pouvait permettre de faire le distinguo entre l'avant et l'arrière alors que la rupture de symétrie axiale de la lentille cylindrique va permettre de gérer l'asservissement de la position du CD. La situation des taches images est présentée de façon simplifiée sur le schéma de la figure 11.

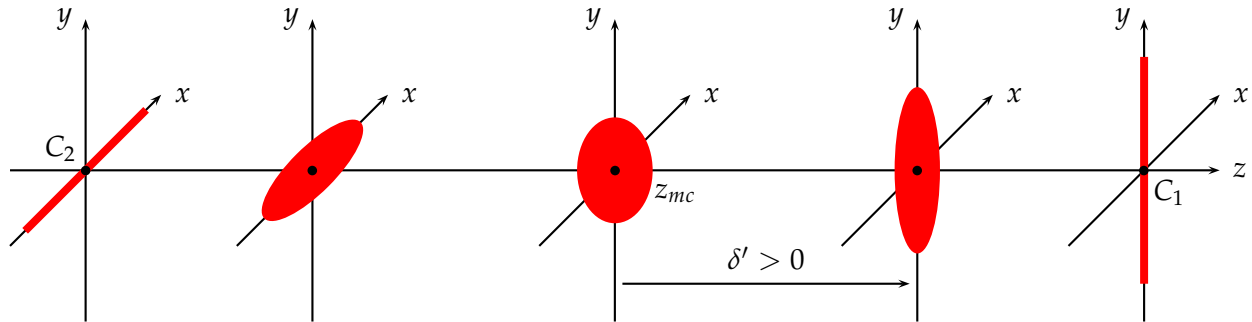


FIG. 11 – Évolution imagée de la tache reçue sur le détecteur en fonction de la position du CD

23. On doit avoir $\delta'_1 = R_1 - z_{mc} = R_1 \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2}$. On en déduit que $\delta_1 = \frac{R_1}{2G^2} \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2}$. On trouve que $\delta_1 = 2,0 \text{ }\mu\text{m}$. Pour le second déplacement, on a $\delta'_2 = R_2 - z_{mc} = -R_2 \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2}$. L'application numérique conduit à une valeur très voisine de la précédente puisque $\delta_2 = 2,1 \text{ }\mu\text{m}$.

24. Dans cette question, on utilisera les connaissances du cours sur la diffraction à l'infini sous incidence normale même si ce n'est pas le cas ici puisqu'on nous dit que le réseau est placé à la sortie de la diode laser. Le faisceau entrant dans le réseau est donc divergent. Quoiqu'il en soit, nous pratiquerons la loi de BRAGG avec une incidence nulle. Si θ est l'angle de sortie de la lumière parallèle, alors $\delta = a \sin \theta = p\lambda$ pour un ordre p entier. Comme $p = \pm 1$, on aura $\sin \theta = \pm \frac{\lambda}{a} = \pm n\lambda$ où $n = 10^4 \text{ m}^{-1}$ est le nombre de traits par mètre. On trouve que $\sin \theta = \pm 7,8 \times 10^{-3}$. Ainsi les angles sont $\theta = \pm 7,8 \times 10^{-3} = \pm 0,45^\circ$. Les ordres ± 1 vont focaliser dans le plan focal image de la lentille L_2 , ils seront séparés du maximum d'ordre 0 par la distance $\pm f_2 \theta \simeq 20 \text{ }\mu\text{m}$. Leur image sur le photodétecteur sera affectée du grandissement transversal étudié avant, à savoir $G = \frac{f_1}{f_2} = 7$. Les spots secondaires sont distants du spot primaire d'environ $140 \text{ }\mu\text{m}$.

25. On a vu avant que la tache image sur le détecteur était de $97 \text{ }\mu\text{m}$, cela correspond plutôt bien aux dimensions de la zone centrale rectangulaire qui est de $100 \text{ }\mu\text{m} \times 200 \text{ }\mu\text{m}$. Pour les taches secondaires, on va avoir une tache de taille quasiment identique à la tache primaire la surface des grands rectangles secondaires du détecteur est bien adaptée puisqu'elle fait $120 \text{ }\mu\text{m} \times 200 \text{ }\mu\text{m}$. Enfin, elles sont positionnées par rapport à la partie centrale correctement puisque de centre à centre il y a $140 \text{ }\mu\text{m}$ ce qui correspond quasiment au calcul effectué à la question précédente.