

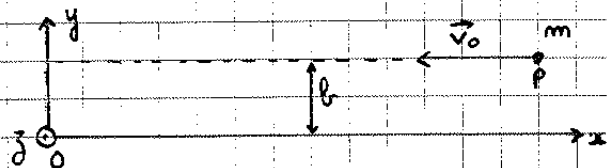
I Génèse des planètes telluriques

I.1 Accrétion de petits corps par une planète en formation

I.1.1 $\vec{L} = \vec{OP} \wedge m \vec{v}_p$

$$= \begin{vmatrix} +\infty & -v_0 \\ b & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= m v_0 b \vec{u}_z$$



On retrouve bien: $b = \frac{\|\vec{L}\|}{m v_0}$ b est le paramètre d'impact.

I.1.2 La trajectoire est une conique. Puisque la particule vient de l'infini, la trajectoire est une parabole ou une hyperbole.

Conservation de l'énergie mécanique: $E = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m [\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2] - \frac{G M m}{r}$

Conservation du moment cinétique: $m r^2 \dot{\theta} = m b v_0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} v_0^2 = \frac{1}{2} \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{b^2 v_0^2}{r^2} - \frac{G M}{r}$$

A la distance minimale d'approche: $\dot{r} = 0 \Rightarrow v_0^2 = \frac{b^2 v_0^2}{r_{\min}^2} - \frac{2 G M}{r_{\min}}$

d'où: $b = r_{\min} \left(1 + \frac{2 G M}{v_0^2 r_{\min}} \right)^{1/2}$

I.1.3 La vitesse de libération correspond à la trajectoire parabolique, donc à l'énergie mécanique nulle:

$$E = \frac{1}{2} m v_l^2 - \frac{G M m}{R} = 0 \Rightarrow v_l = \sqrt{\frac{2 G M}{R}}$$

$r_{\min}$ vérifie: $r_{\min}^2 + \frac{2 G M}{v_0^2} r_{\min} - b^2 = 0$ ou $r_{\min}^2 + \frac{v_l^2 R}{v_0^2} r_{\min} - b^2 = 0$

de solution: $r_{\min} = \frac{1}{2} \left[-R \frac{v_l^2}{v_0^2} + \sqrt{\left(R \frac{v_l^2}{v_0^2} \right)^2 + 4 b^2} \right]$

La particule heurte la planète si: $r_{\min} < R$

$$\Rightarrow \sqrt{\left(R \frac{v_l^2}{v_0^2} \right)^2 + 4 b^2} < 2 R + R \frac{v_l^2}{v_0^2}$$

$$\Rightarrow \left(R \frac{v_l^2}{v_0^2} \right)^2 + 4 b^2 < 4 R^2 + 4 R^2 \frac{v_l^2}{v_0^2} + \left(R \frac{v_l^2}{v_0^2} \right)^2$$

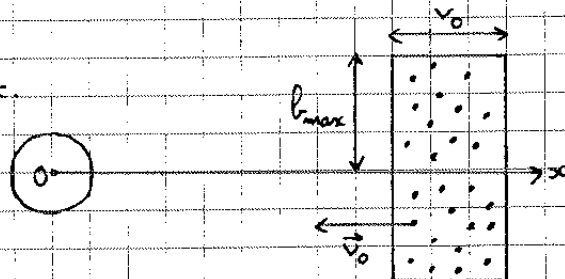
d'où: $b^2 < R^2 \left(1 + \frac{v_l^2}{v_0^2} \right)$

I.1.4 Les particules qui vont heurter la planète par sec.

sont contenues dans le cylindre de rayon $b_{\max} = R \left(1 + \frac{v_l^2}{v_0^2} \right)^{1/2}$ et de hauteur v_0

Leur nombre est: $N = n \cdot \pi b_{\max}^2 \cdot v_0$

donc: $N = n \pi R^2 v_0 \left(1 + \frac{2 G M}{R v_0^2} \right)$



I.1.5 Augmentation de masse de la planète: $dM = \rho \cdot 4\pi R^2 dR = N \cdot m \cdot dt$

d'où: $\frac{dR}{dt} = \frac{N m}{4\pi R^2 \rho}$ soit: $\frac{dR}{dt} = \frac{m \cdot m \cdot v_0}{4\rho} \left(1 + \frac{2GM}{R v_0^2}\right)$

Si $v_0 \gg v_e$: $\frac{dR}{dt} \approx \frac{m m v_0}{4\rho}$
 Si $v_0 \ll v_e$: $\frac{dR}{dt} = \frac{m m G M}{2\rho R v_0}$ } Dans les deux cas, R croît fortement au cours du temps.

focalisation gravitationnelle: les particules "convergent" sur la planète par attraction gravitationnelle

accrétion galopante: plus dR/dt est grand, plus la masse M de la planète augmente. On plus la masse M est grande, plus dR/dt est grand d'après la formule encadrée.
 → effet "boule de neige", donc phénomène "galopant"

I.1.6 $M_1 > M_2$ initialement $\Rightarrow \left(\frac{dR}{dt}\right)_1 > \left(\frac{dR}{dt}\right)_2 \Rightarrow M_1$ croît plus vite que M_2

donc $\frac{M_1}{M_2}$ augmente au cours du temps. Les grosses planètes sont favorisées.

I.2 Chauffage par collision

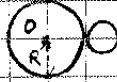
I.2.1 Bilan d'énergie interne pour Mars: $MC \Delta T = E_c$

Calcul de E_c : état initial



astéroïde à l'infini
avec une vitesse nulle
 $E = 0$

état final:



$$E = 0 = E_c - \frac{GMm}{R+r} \Rightarrow E_c = \frac{GMm}{R+r}$$

donc: $\Delta T = \frac{\frac{GMm}{R+r}}{MC} = \frac{G \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{C(R+r)}$ avec: $R = \frac{2GM}{v_e^2} = 3.2 \cdot 10^6 \text{ m}$

A.N. $\Delta T = 200 \text{ K}$

I.2.2 D'après l'étude précédente, l'énergie cinétique des particules qui entrent en collision avec la planète est convertie en énergie interne, d'où une élévation de la température de la planète.
 Le rayonnement en surface permet d'évacuer une partie de l'énergie interne.

I.3 Différenciation planétaire

I.3.1 Par invariances et symétries: $\vec{g} = -g(r) \vec{e}_r$ ($g(r)$ défini > 0 par l'énormé)

Théorème de Gauss à la sphère de rayon $r \leq R$: $-4\pi r^2 \cdot g(r) = -4\pi G M_{\text{int}}$

donc: $g(r) = \frac{G M_{\text{int}}}{r^2} = \frac{G \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_m}{r^2} = \frac{4}{3}\pi G \rho_m r$

et on a: $g_0 = \frac{4}{3}\pi G \rho_m R$

donc: $g(r) = g_0 \frac{r}{R}$

I.3.2 $\vec{F}$ = poids + poussée d'Archimède = $-\rho_z V g(n) \vec{u}_n + \rho_m V g(n) \vec{u}_n$

donc: $\vec{F} = (\rho_m - \rho_z) V g_0 \frac{n}{R} \vec{u}_n$

$\vec{F} = -\text{grad} E_p \Rightarrow (\rho_m - \rho_z) V g_0 \frac{n}{R} = -\frac{dE_p}{dn} \Rightarrow E_p = -(\rho_m - \rho_z) \frac{V g_0}{2R} n^2 + \text{constante}$

donc: $\Delta E_p = E_p(n=0) - E_p(n=R) \Rightarrow \Delta E_p = (\rho_m - \rho_z) \frac{V g_0 R}{2}$

A.N: $\rho_m = 5 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$; $V = \frac{M_{Fe}}{\rho_z} = 7 \cdot 10^{-6} \text{ kg}$; $\Delta E_p = -800 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$

C'est comparable à une enthalpie de réaction chimique. Par exemple $\Delta H \approx -400 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ pour la réaction $C + O_2 \rightarrow CO_2$

I.3.3 La masse du noyau est égale au tiers de celle de la Terre, donc: $M_{\text{noyau}} = \frac{1}{2} M_{\text{noyau}}$

$\Rightarrow \frac{4}{3} \pi R_N^3 \rho_2 = \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi (R^3 - R_N^3) \rho_1$

$\Rightarrow (\rho_2 + \frac{\rho_1}{2}) R_N^3 = \frac{\rho_1}{2} R^3$

$\Rightarrow R_N = R \left(\frac{\rho_1}{\rho_1 + 2\rho_2} \right)^{1/3}$ A.N: $R_N = 3000 \text{ km}$

La pression est plus élevée dans le noyau, donc la température est aussi élevée.

II. Refroidissement par conduction

II.1 équation de la diffusion thermique: $\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$

II.2 $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{df}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{3}{4\sqrt{\kappa t^{3/2}}} \frac{df}{d\xi}$
 $\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{df}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{1}{2\sqrt{\kappa t}} \frac{df}{d\xi}$ puis $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{4\kappa t} \frac{d^2 f}{d\xi^2}$

donc: $\frac{3}{4\sqrt{\kappa t^{3/2}}} \frac{df}{d\xi} = \frac{\kappa}{4\kappa t} \frac{d^2 f}{d\xi^2} \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{\kappa t}} \frac{df}{d\xi} = \frac{d^2 f}{d\xi^2} \Rightarrow \boxed{-2\xi \frac{df}{d\xi} = \frac{d^2 f}{d\xi^2}}$

On a: $\frac{df}{d\xi} = A e^{-\xi^2}$ et $\frac{d^2 f}{d\xi^2} = -2\xi A e^{-\xi^2} = -2\xi \frac{df}{d\xi}$

$f(\xi) = A \int_0^\xi e^{-s^2} ds + B$ est donc une solution de l'équation différentielle en $f(\xi)$.

II.3 $T(z=0, t) = T_s = f(0) = B$ donc: $\boxed{B = T_s}$

$T(z, t=0) = T_c = f(+\infty) = A \int_0^{+\infty} \exp(-s^2) ds + B = A \frac{\sqrt{\pi}}{2} + T_s$ donc: $\boxed{A = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (T_c - T_s)}$

II.4 $\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{2\sqrt{\kappa t}} A e^{-\xi^2}$ donc $\boxed{\frac{\partial T}{\partial z}(z=0) = \frac{T_c - T_s}{\sqrt{\pi \kappa t}}}$

II.5 Avec un gradient géothermique de 30 K.km^{-1} , on atteint la température de 4000 K à une profondeur d'environ 120 km . C'est faible devant le rayon de la Terre 6000 km , donc on peut négliger la courbure de la Terre pour cette étude.

On a: $\sqrt{\pi K t} = \frac{T_c - T_s}{\frac{\partial T}{\partial z}(z=0)}$ donc l'âge de la Terre est: $t = \frac{1}{\pi K} \left(\frac{T_c - T_s}{\frac{\partial T}{\partial z}(z=0)} \right)^2$

A.N: $t \approx \frac{1}{\pi \cdot 10^{-6}} \left(\frac{4000}{\left(\frac{30}{1000}\right)} \right)^2 \sim 5,6 \cdot 10^{15} \text{ s}$ soit $t \approx 2 \cdot 10^8 \text{ années}$

Résultat non satisfaisant car trop inférieur à la valeur admise de $4,5 \cdot 10^9 \text{ années}$

III. Refroidissement par convection

III.1 Chauffage par le bas

III.1.1 Si $\vec{v}' = \vec{0}$, il reste: $\vec{0} = \vec{\text{grad}} P_0(z) - \rho_0(z) \vec{g}$ équation de la statique des fluides

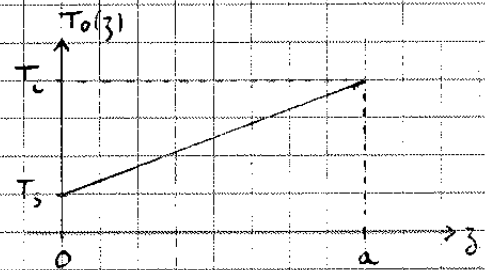
$0 = \Delta T_0(z)$ équation de Laplace

Il va donc exister un champ de pression et un champ de température en régime stationnaire.

$\Delta T_0(z) = 0 \Rightarrow \frac{d^2 T_0(z)}{dz^2} = 0 \Rightarrow T_0(z) = Az + B$

Conditions aux limites: $T_0(0) = T_s = B$
 $T_0(a) = T_c = Aa + B$

donc: $T_0(z) = \frac{T_c - T_s}{a} z + T_s$



III.1.2 Equation de Navier-Stokes: $\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} = \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + \underbrace{(\vec{v}' \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v}'}_{\text{ordre 2}} \sim \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t}$

$\frac{1}{\rho} \vec{\text{grad}} P = \frac{\vec{\text{grad}}(P_0 + P_1)}{\rho_0 + \rho_1} = \frac{\vec{\text{grad}} P_0 + \vec{\text{grad}} P_1}{\rho_0 (1 + \frac{\rho_1}{\rho_0})}$

$\sim \frac{1}{\rho_0} \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_0} \right) (\vec{\text{grad}} P_0 + \vec{\text{grad}} P_1)$

$= \underbrace{\frac{\vec{\text{grad}} P_0}{\rho_0}}_{=\vec{g}} + \frac{\vec{\text{grad}} P_1}{\rho_0} - \frac{\rho_1}{\rho_0} \underbrace{\frac{\vec{\text{grad}} P_0}{\rho_0}}_{=\vec{g}} - \underbrace{\frac{\rho_1}{\rho_0^2} \vec{\text{grad}} P_1}_{\text{ordre 2} \rightarrow \text{négligeable}}$

il reste: $\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} = \vec{g} - \frac{\vec{\text{grad}} P_1}{\rho_0} + \frac{\rho_1}{\rho_0} \vec{g} + \vec{g} + \nu \Delta \vec{v}'$

et on a: $\alpha = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT} = \frac{1}{\rho_0 + \rho_1} \frac{\rho_1}{T_1} \approx - \frac{\rho_1}{\rho_0 T_1} \Rightarrow \frac{\rho_1}{\rho_0} = -\alpha T_1$

on a donc bien: $\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} = - \frac{1}{\rho_0} \vec{\text{grad}} P_1 - \alpha T_1 \vec{g} + \nu \Delta \vec{v}'$

Equation de la diffusion thermique: $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T_1}{\partial t} + \underbrace{(\vec{v}' \cdot \vec{\text{grad}})}_{\text{ordre 2}} (T_0 + T_1) \sim \frac{\partial T_1}{\partial t} + (\vec{v}' \cdot \vec{\text{grad}}) T_0$

et $(\vec{v} \cdot \vec{grad}) T_0 = v_z \frac{dT_0(z)}{dz} = v_z \frac{T_c - T_s}{a}$ donc: $\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T_1}{\partial t} + v_z \frac{T_c - T_s}{a}$

on a aussi: $\Delta T = \Delta T_0(z) + \Delta T_1 = \Delta T_1$ car $\Delta T_0(z) = 0$ d'après III-1.1

il reste: $\frac{\partial T_1}{\partial t} = K \Delta T_1 - \beta v_z$ avec: $\beta = \frac{T_c - T_s}{a}$

Les termes de diffusion thermique et de viscosité ($\nabla \Delta \vec{v}$ et $K \Delta T_1$) ont un effet stabilisant par homogénéisation. Ils vont s'opposer à la convection. Les termes issus des dérivées convectives $- \alpha \vec{g} \cdot T_1$ et $-\beta v_z$ vont favoriser la convection.

III-1.3 On a: $0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_1}{\partial x}$ (Navier-Stokes projeté selon Ox)

$\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_1}{\partial z} - \alpha g T_1 + \nu \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}$ (Navier-Stokes projeté selon Oz)

$\frac{\partial T_1}{\partial t} = -\beta v_z + K \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}$

En notation complexe ($\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow \lambda$ et $\frac{\partial}{\partial x} \leftrightarrow ik$) et en simplifiant par $e^{(\lambda t + ikx)}$, ces trois équations donnent:

$C = 0$
 $\lambda A = -\alpha g B - k^2 \nu A$
 $\lambda B = -\beta A - k^2 K B$ $\Rightarrow \begin{cases} (\lambda + k^2 \nu) A + \alpha g B = 0 \\ \beta A + (\lambda + k^2 K) B = 0 \end{cases}$

Pour que ce système admette une solution $(A, B) \neq (0, 0)$, il faut que son déterminant soit nul, d'où:

$$(\lambda + k^2 \nu)(\lambda + k^2 K) - \alpha \beta g = 0$$

III-1.4 $\lambda^2 + \lambda(K + \nu) \frac{\pi^2}{a^2} - \alpha \beta g + \frac{\pi^4}{a^4} \nu K = 0$ en remplaçant k par $\frac{\pi}{a}$

les solutions sont: $\lambda = \frac{1}{2} \left[-(K + \nu) \frac{\pi^2}{a^2} \pm \sqrt{(K + \nu)^2 \frac{\pi^4}{a^4} - 4 \left(\frac{\pi^4}{a^4} \nu K - \alpha \beta g \right)} \right]$

La solution statique est instable si T_1 croît au cours du temps, soit: $\lambda > 0$

$$\Rightarrow -(K + \nu) \frac{\pi^2}{a^2} + \sqrt{(K + \nu)^2 \frac{\pi^4}{a^4} - 4 \left(\frac{\pi^4}{a^4} \nu K - \alpha \beta g \right)} > 0$$

$$\Rightarrow (K + \nu)^2 \frac{\pi^4}{a^4} - 4 \left(\frac{\pi^4}{a^4} \nu K - \alpha \beta g \right) > (K + \nu)^2 \frac{\pi^4}{a^4}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^4}{a^4} \nu K - \alpha \beta g < 0 \quad \text{d'où} \quad Ra = \frac{\alpha \beta g a^4}{\nu K} > Ra_{\text{critique}} = \pi^4$$

III-1.5 Pour l'eau: $\nu \approx 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \ll \nu_{\text{manteau}}$

A.N: $Ra = 10^8 > \pi^4$. C'est instable donc la convection est possible.

La grande étendue du système ($a = 3 \cdot 10^6 \text{ m}$) compense sa grande viscosité.

III-2 Chauffage interne

III-2.1 Avec le terme de production mécanique H, on a: $\frac{DT}{Dt} = K \Delta T + \frac{H}{C}$

En régime stationnaire: $\frac{d^2 T_0(z)}{dz^2} = -\frac{H}{\kappa C}$

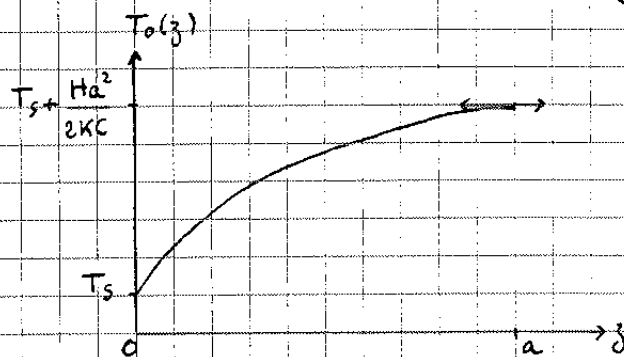
solution: $T_0(z) = -\frac{H}{2\kappa C} z^2 + Az + B$

conditions aux limites: $T_0(0) = B = T_s$

$$j_{\text{th}}(a) = 0 = -\lambda \frac{dT_0(a)}{dz}$$

$$\Rightarrow -\frac{H}{\kappa C} a + A = 0$$

donc: $T_0(z) = \frac{H}{\kappa C} \left(az - \frac{z^2}{2} \right) + T_s$



III.2.2 Le seul terme qui change dans les équations du III.1.2 est $(\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) T_0 = v_z \frac{dT_0(z)}{dz}$

on a: $\frac{dT_0(z)}{dz} = \frac{H}{\kappa C} (a - z)$ donc: $B(z) = \frac{H}{\kappa C} (a - z)$ et $B\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{Ha}{2\kappa C}$

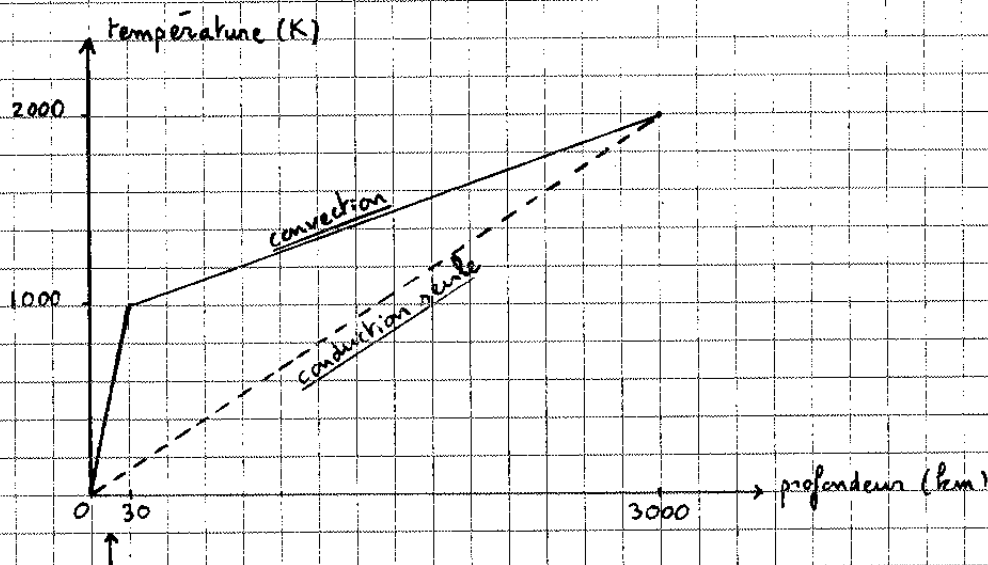
III.2.3 A.N. $R_a = 2 \cdot 10^9 > R_{\text{critique}}$ Donc le chauffage interne suffit à produire de la convection.

III.2.4 La chaleur produite par radioactivité a été importante pendant le premier milliard d'années de la formation de la Terre, donc la convection a également été importante.

III.3 Épilogue

III.3.1 La radioactivité est répartie dans tout le volume du manteau terrestre. La quantité de chaleur produite sera beaucoup plus importante que celle provenant du noyau. Le chauffage interne l'emporte sur le chauffage par le bas.

III.3.2



le gradient géothermique $\frac{dT}{dz}(a)$ est plus important lorsqu'il y a de la convection dans le manteau.