

X-ESM 2010.

Réponse optique de nature ondes électromagnétiques

1/19

1) Résonance optique d'un atome métallique.

2.1) La bande est uniformément chargée. Tout point $(P, \vec{u}_P, \vec{u}_S)$ et $(Q, \vec{u}_Q, \vec{u}_Q)$ est un point de symétrie :

$$\vec{E} = E_r(r, \theta, \varphi) \vec{u}_r$$

$\vec{E}$ est invariant par rotation d'angle θ et φ puisque la bande l'est.

$$\vec{E}_+ = E_+(r) \vec{u}_r$$

D'après le théorème de Gauss, sur une surface de Gauss sphère de rayon r :

$$\iint \vec{E}_+ \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$E_+ r 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$\text{si } r \leq a \quad Q_{int} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

$$E_+ = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

Avec $\rho = Ne$

$$E_+ = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r^2}$$

si $r \geq a$

Pour $\rho = -\rho$ alors :

$$E_- = -E_+$$

2/19

2.2)

Chaque bande met le champ $E_S \vec{u}_S$ met une force de type :

$$\vec{F} = Q E_S \vec{u}_S$$

Pour la bande chargée $Q > 0$ } Les u se déplacent donc l'une par rapport à l'autre selon $\vec{u}_S$.
 charge $Q < 0$ }

2.2.1) Dans ce cas :

$$\vec{E}_+ = \frac{Ne}{3\epsilon_0} \vec{u}_H$$

$$\vec{E}_- = -\frac{Ne}{3\epsilon_0} \vec{u}_H$$

$$\vec{E}_S = \frac{Ne}{3\epsilon_0} \vec{u}_S$$

$$\vec{E}_S = \frac{Ne}{3\epsilon_0} \vec{u}_S$$

Une élection de conduction aussi alors :

$$\vec{F} = -e \vec{E}_S \quad \text{not :}$$

$$\vec{F} = -\frac{Ne^2}{3\epsilon_0} \vec{u}_S$$

2.2.2) La force totale est alors :

$$\vec{F} = -e \left(\frac{Ne}{3\epsilon_0} \vec{u}_S + E_S \right) \vec{u}_S$$

$$\vec{F}_S = -\frac{3\epsilon_0 E_S}{Ne} \vec{u}_S$$

($\vec{F}_S = 0$ sur la position d'équilibre)

Le déplacement est indépendant de la position de l'élection. Il est bien uniforme.

À l'équilibre $\vec{F} = \vec{0}$ or $\vec{F} = -e\vec{E}_{tot}$ donc $\boxed{\vec{E}_{tot} = \vec{0}}$ 3/19

I14) A.N $\vec{s} = 6,6 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ or $a \approx 10^{-10} \text{ m}$ donc $a \gg s$. L'hypothèse est vérifiée.

I25) $\vec{D} = q N^P \vec{a}$ avec N barycentre des charges négatives P barycentre des charges positives
 q charge de P
 $q = \frac{4}{3} \pi a^3 N_e$ pour la boule lorsque de rayon a et $N^P = -s$.

$\vec{p}_0 = \frac{4}{3} \pi a^3 N_e \frac{3 \epsilon_0 \vec{E}}{N_e}$ or $\boxed{\vec{p}_0 = 4 \pi a^3 \epsilon_0 \vec{E}}$

En en déduit: $\boxed{\alpha_0 = 4 \pi a^3}$

I33) L'expression de la force exercée sur un électron vitale:

$\vec{F} = -\frac{Ne^2}{3\epsilon_0} \vec{s}(t) + -e\vec{E}$ (force magnétique négligée, c'est non négligeable)

D'après la relation fondamentale de la dynamique appliquée en référentiel galiléen:

$-\frac{Ne^2}{3\epsilon_0} \vec{s} - e \vec{E}_0 = m \omega^2 \vec{s} \quad \left(a = \frac{d^2 \vec{s}}{dt^2} \right)$
 $m \left(\omega_p^2 - \omega^2 \right) \vec{s} = -e \vec{E}_0$

$\vec{s} = \frac{-e \vec{E}_0}{m \left(\omega_p^2 - \omega^2 \right)}$ or $\boxed{\vec{s} = \frac{e \vec{E}_0}{m \left(\omega^2 - \omega_p^2 \right)}}$ 4/19

En notation réelle:

$\frac{d^2 \vec{s}}{dt^2} + \frac{1}{2} \omega_p^2 \vec{s} = -\frac{e \vec{E}}{m}$ donc $\boxed{\frac{\omega_p}{\sqrt{2}} = \omega_0}$

I32) $\vec{s}(t) = \frac{e \vec{E}_0}{m \left(\omega^2 - \frac{\omega_p^2}{2} \right)} \cos \omega t \vec{u}_s$

Pour $\omega \rightarrow \omega_p$ $\|\vec{s}\|$ diverge, le système entre en résonance.

I33) L'application numérique donne pour le sodium:

$\omega_p = 5,1 \cdot 10^{15} \text{ rad.s}^{-1}$

ω_p correspond à $\lambda_{\omega_p} = 384 \text{ nm}$ il s'agit de l'ultra violet proche.

On trouve $\frac{\omega_p}{\omega_0} \approx \omega_0$. Dans un milieu plus précis, il faut prendre en compte l'amortissement qui décale la pulsation de résonance.

I44)

Dans le domaine visible $\lambda \approx 500 \text{ nm} \gg a$. La particule ne voit donc que la variation spatiale de l'onde.

I44) il s'agit de résoudre l'équation obtenue en 31:

$\left[\frac{d^2 \vec{s}}{dt^2} + \omega_0^2 \vec{s} + \gamma \dot{\vec{s}} = -\frac{e \vec{E}_0}{m} \right]$

Ex 43 note.

En passant à la notation complexe:

$$-\omega^2 \delta_0 + \omega_0^2 \delta_0 + j\omega \gamma \delta_0 = -\frac{e E_0}{m}$$

$$\delta_0 = \frac{-\frac{e}{m} E_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\gamma \omega}$$

not $|\delta_0| = \frac{\frac{e}{m} E_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}}$

$|\delta_0|$ est maximal pour $\gamma^2 = 2(\omega_0^2 - \omega^2)$ (dénomination minimum)

Soit en remplaçant:

$$|\delta_0|_{\max} = \frac{\frac{e}{m} E_0}{\sqrt{\frac{\gamma^4}{4} + \gamma^2 \omega_0^2 - \frac{\gamma^4}{4}}} = \frac{e E_0}{m \gamma \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}}$$

Avec $\gamma \ll \omega_0$ alors

$$|\delta_0|_{\max} \approx \frac{e E_0}{m \gamma \omega_0}$$

Ex 43 L'intensité est la moyenne du carré de l'amplitude.

$$\langle \vec{H} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \epsilon_0 (\vec{E} \cdot \vec{B}^*) \quad \text{or} \quad \vec{B}^* = \frac{\vec{A} \omega_0 n \epsilon_0}{c} \quad (\text{onde plane})$$

$$\langle \vec{H} \rangle = \frac{\epsilon_0^2}{2\mu_0 c} \quad \text{or} \quad \frac{1}{\mu_0 c} = c^2$$

$$I_0 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 c$$

on en déduit

$$E_0 = \sqrt{\frac{2 I_0}{\epsilon_0 c}}$$

A.N
 $E_0 = 87.10^4 \text{ V.m}^{-1}$

5/19

on en déduit:

$$|\delta|_{\max} \approx 1.0.10^{-11} \text{ m}$$

on vérifie toujours $|\delta| \ll a$.

Ex 44 le champ interne s'écrit:

$$\vec{E}_{-m} = \frac{Ne}{3\epsilon_0} \vec{r} + \vec{E}_0 \quad (122)$$

$$\vec{E}_{-m} = \int \frac{-Ne^2}{3\epsilon_0 m} \vec{E}_0 \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\gamma \omega} + \vec{E}_0 \left] \vec{u}_3 \right] = \frac{-\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\gamma \omega} + 1 \left] \vec{E}_0 \vec{u}_3 \right]$$

$$\vec{E}_{int} = \frac{\gamma \omega_0 - \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\gamma \omega} \vec{E}_0 \vec{u}_3$$

$$|E_{int}| = \frac{\sqrt{\omega^4 + \gamma^2 \omega^2}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}} E_0$$

Pour $\omega \approx \omega_0$

$$|E_{int}| \approx \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2} E_0$$

maximal en ω_0 d'après le calcul qui précède. Donc E_{int} prend une valeur en amplitude autour de ω_0 .

Pour $\omega \ll \omega_0$ on a :

$$|E_{int}| \approx E_0 \cdot \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \quad \text{avec} \quad \omega \rightarrow 0 \quad E_{int} \approx 0$$

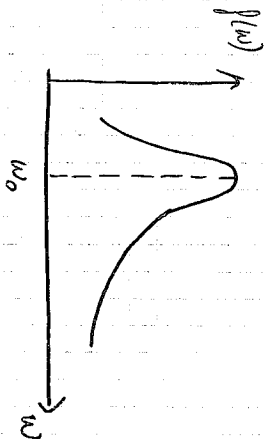
6/19

Le système arrive à suivre les variations du champ et à s'y adapter
 afin qu'il soit nul à l'intérieur de la particule métallique : le champ
 en ne pénètre pas dans la conductrice (effet de peau).

7/9

IS1) Au voisinage de ω_0 :

$$\rho(\omega) = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}}$$



$$\rho(\omega_0) = \frac{\omega_0^2}{\gamma}$$

Dans le cas du sodium

$$\rho(\omega_0) = 1.6 \cdot 10^{21}$$

IS

IS1 d'après la question IS à remplacer $\vec{E}$ par $\vec{E}(t)$

$$\vec{p} = -\frac{Ne}{3} \alpha_0 \vec{E}$$

$$\vec{p} = -\frac{Ne^2}{3m} \alpha_0 \vec{E}_0 \vec{u}_y$$

$$\vec{p} = \frac{\epsilon_0 \alpha_0 \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \vec{E}_0 \vec{u}_y \quad \text{d'après IS1} \quad \epsilon_0 \vec{u}_y = \vec{E}_0(0)$$

sat avec

$$\vec{p} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \vec{E}_0(0)$$

8/9

IS2) d'après la formule donnée en introduction, le champ est pile
 droite où:

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2 \cos\theta}{r^3} \left[\frac{p(t-\frac{r}{c})}{r^3} + \frac{j\omega \vec{p}(t-\frac{r}{c})}{r^2 c} \right]$$

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2 \cos\theta}{r^3} \left[\frac{p(t)}{r^3} + \frac{j\omega \vec{p}(t)}{r^2 c} \right]$$

or $r \ll \lambda$ donc $\frac{1}{r^3} \gg \frac{1}{r^2 \lambda}$

$$E_r = \frac{2 \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} p(t)$$

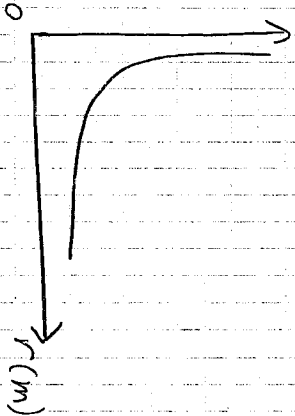
$$E_\theta = \frac{\sin\theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{p(t)}{r^3}$$

De même

le champ est analogue au champ d'un dipôle statique $r \ll \lambda$ comparé
 à la zone statique.

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \frac{j\omega^2}{c^2} \epsilon_0 \vec{u}_y + \vec{E}_0 \vec{u}_y$$

$$\frac{\|\vec{E}(0)\|}{E_0} = \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{r^2} \frac{\omega_0^2}{\gamma^2}}$$



II rayonnement et absorption.

2/18

II.1)

II.1.1) calcul effectué en II.1.3 :

$$\boxed{I_0 = \frac{1}{2} \epsilon_0 c |E_0|^2}$$

II.1.2) la puissance moyenne rayonnée est :

$$P_{\text{ray}} = \frac{\dot{p}^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

$$\langle P_{\text{ray}} \rangle = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} \langle \ddot{p}^2 \rangle \approx \dot{p} = \beta \cdot \frac{-\omega_0^2 \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \vec{E}_0(\omega)$$

$$\langle \dot{p}^2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \cdot \frac{-\omega_0^2 \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} E_0^2 \quad \langle \dot{p}^2 \rangle = \frac{1}{2} P_0 (\ddot{p} \ddot{p}^*)$$

$$\langle P_{\text{ray}} \rangle = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{\omega_0^4} E_0^2 \quad \frac{E_0^2}{2} \quad \langle \cos^2(\omega t - \frac{\gamma}{2}) \rangle = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{P_d = \langle P_{\text{ray}} \rangle = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\omega_0^4 \omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} I_0}$$

II.1.3)

$$P_d = \frac{8\pi a^6 \omega_0^4 \omega^4}{3c^4 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} I_0$$

On suppose $\omega_0 \approx \omega$ (faible déviation de l'oscillation) puissance c'est la que P on aura le maximum de sensibilité?

10/19

$$P_d = \frac{8\pi a^6}{3c^4} \omega_0^4 I_0$$

dans le demi-espace $y > 0$ alors on mesure

$$P'_d = \frac{1}{2} \frac{4\pi a^6}{3c^4} \omega_0^4 I_0 \quad P'_d = 10^{-9} \text{ W au niveau de détection}$$

$$\boxed{a = \left(\frac{3c^4 P'_d}{4\pi \omega_0^4 I_0} \right)^{1/6}}$$

A.N

$$a = 5 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

II.2)

II.2.1) Pour un électron $\vec{F}_f = -m\gamma \vec{v}$ soit $\dot{p}_a = -m\gamma \dot{\delta}^2$

puissance reçue

$$P_d^{(H)} = \frac{4}{3} \pi a^3 N m \gamma \dot{\delta}^2 \quad \text{pour les électrons de la bande}$$

$$P_a = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi a^3 N m \gamma \dot{\delta}^2$$

$$= \frac{a^3}{6} N m \gamma \cdot \frac{e^2 \epsilon_0^2 \omega^2}{m^2 \omega^2} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$$

$$= \frac{2}{3} \pi a^3 \gamma \cdot \epsilon_0 \frac{3 \omega_0^2 \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} E_0^2$$

11/13

$$P_a = \frac{4}{3} \pi a^3 \gamma \cdot \frac{I_0}{c} \frac{3 \omega_0^2 \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$$

$$P_a = \frac{4 \pi a^3 \gamma I_0}{c} \frac{\omega_0^2 \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$$

II21] Le rapport vaut alors:

$$\frac{P_d}{P_a} = \frac{2 a^3}{3 c^3 \gamma} \omega_0^2 \omega^2$$

À la résonance: $\frac{P_d}{P_a} < 1$ donne: $\frac{2 a^3}{3 c^3 \gamma} \omega_0^4 < 1$

$$a < \left(\frac{3 c^3 \gamma}{2 \omega_0^4} \right)^{1/3}$$

A.N $a <$

II23] la variation relative est

$$f = \frac{P_0 - (P_0 - P_a)}{P_0}$$

$$\frac{P_a}{P_0} \rightarrow 0 \quad P_0 - P_a$$

$$f = \frac{P_a}{P_0}$$

$$L_a = \frac{4 \pi a^3 \gamma I_0}{c} \frac{\omega_0^2}{\gamma^2} \quad \bar{a} \text{ la résonance} \quad I_0 = \frac{P_0}{\pi a^2}$$

$$P_a = \frac{4 a \omega_0^2 P_0}{\gamma c}$$

12/19

$$f = \frac{4 \cdot a \omega_0^2}{\gamma c}$$

A.N

$$a > \frac{4 \gamma c}{4 \omega_0^2}$$

$$a >$$

§53

II31] $\left\| \vec{E}(\omega_0) \right\| = \sqrt{1 + \frac{\omega_0^2}{\gamma^2 \gamma}} \quad \text{à } r = R_a \text{ et devant.}$

$$\approx 1 + \frac{\omega_0^2}{\gamma^2 \gamma}$$

Donc à cette distance, seul le champ externe est venant à 6% près. Ce qui n'est correct comme approximation.

En mesurant la répartition isotrope, il faut qu'à la limite:

$$\frac{1}{\sqrt{N_M}} = 8a$$

$$N_M = \frac{1}{8 a^3}$$

Ainsi mesurer de voir: une particule occupée un volume de $\frac{4}{3} \pi (8a)^3$ donc

$$N_M = \frac{3}{4 \pi} \cdot \frac{1}{(8a)^3}$$

On retrouve l'ordre de grandeur est le même.

A.N $N_M = 16 \cdot 10^{21} \text{ m}^{-3} \quad (4 \cdot 10^{21} \text{ m}^{-3})$

II 31)
$$g = N_p \cdot \frac{4}{3} \pi a^3$$

$N_p = N_n$ alors

$g =$

II 32) l'énergie des photons est identiques:

$$\vec{p} = N_p \vec{p} = \frac{3g}{8} \vec{p}$$

Avec l'expression de $\vec{p}$ ci-dessus on a II 31 :

$$\vec{p} = \frac{3 \epsilon_0 g \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \gamma \omega} \cdot \epsilon_0 \vec{u}_0$$

$\vec{p} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$ et $\chi = (1 + \chi) \epsilon_0$ avec $\omega_p^2 = \frac{3g}{8} \omega_0^2$

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon_0 \left[1 + \frac{g \omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \gamma \omega} \right]$$

la diffusion

$$\tilde{n}^2 = \epsilon_r = 1 + \frac{g \omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \gamma \omega}$$

$$\tilde{n}^2 = 1 + \frac{g \omega_p^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma \omega)^2} - j \frac{g \omega_p^2 \gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma \omega)^2}$$

$g \ll 1$ et si on voit près de la résonance $\omega_0 \approx \omega$

Avec
$$\frac{g \omega_p^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma \omega)^2} \ll 1 \quad n' \approx 1$$

pour $n'' \ll n' \ll 1$ alors

$$\tilde{n} \approx 1 + \frac{g \omega_p^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{2 [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma \omega)^2]} - j \frac{g \omega_p^2 \gamma \omega}{2 [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma \omega)^2]}$$

II 33) le vecteur d'onde est

$$\vec{k} = \tilde{n} k_0 \vec{u}_x \quad k_0 = \frac{\omega}{c}$$

le champ est de la forme $\vec{E} = E \exp(i \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \vec{u}_y$, l'intensité sera

on a $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_x = I_0 \exp(-n'' k_0 x)$ après moyennage temporel.

$$I(L) = I_0 (\exp(-n'' k_0 L))$$

$\alpha = n'' k_0$ not

$$\alpha = \frac{B \omega^2 \gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$$

$$B = \frac{g \omega_p^2}{c}$$

$\alpha^{-1} = 9.6 \mu m$ à la résonance.

III Extension du modèle.

15/19

III 11

En reprenant le résultat de II 21,

$$\vec{E}_g = \frac{Ne}{3\epsilon} \vec{g}$$

III 12 Le moment dipolaire associé à un électron est

$$\vec{\mu} = +e(-\vec{r}) = -e\vec{r} \quad \text{soit}$$

$$\vec{\mu} = -Ne\vec{g}$$

$$\vec{\mu} = -3\epsilon\vec{E}_g$$

III 13 Le champ total est:

$$\vec{E}_{\text{int}} = \vec{E}_g + \vec{E}_d$$

$$\vec{E}_{\text{int}} = \vec{E}_g - \frac{\vec{\mu}}{3\epsilon}$$

III 14 Par définition de χ_{mat} :

$$\vec{P} = \epsilon \chi_{\text{mat}} \vec{E}_{\text{int}}$$

$$\vec{E}_g = \left(\chi_{\text{mat}} + 1 \right) \frac{1}{3} \vec{E}_{\text{int}} \quad \text{soit} \quad \frac{\epsilon \chi_{\text{mat}}}{\epsilon} = 1 + \chi_{\text{mat}}$$

$$\vec{E}_g = \left(\frac{\epsilon_{\text{mat}} + 2\epsilon}{3\epsilon} \right) \vec{E}_{\text{int}}$$

$$\vec{E}_{\text{int}} = \frac{3\epsilon}{\epsilon_g + \epsilon_{\text{mat}}} \vec{E}_g$$

III 15

III 21 D'après la loi d'Ohm locale:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}_{\text{int}}$$

D'autre part:

$$\vec{j} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

En régime harmonique, on se dit donc:

$$\vec{P} = \frac{\sigma}{j\omega} \vec{E}_{\text{int}}$$

D'où:

$$\chi_{\text{mat}} = \frac{\sigma}{j\epsilon\omega}$$

$$\epsilon_{\text{mat}} = \epsilon_g + \frac{\sigma}{j\omega}$$

III 22 Dans une référence terrestre galiléenne, l'électron subit:

$$\vec{F} = -m\gamma \vec{v}$$

$$\vec{F}_e = -e \vec{E}_{\text{int}}$$

Soit:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -m\gamma \vec{v} - e \vec{E}_{\text{int}}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \gamma \vec{v} = -\frac{e}{m} \vec{E}_{\text{int}}$$

$$(\gamma + \gamma) \vec{v} = -\frac{e}{m} \vec{E}_{\text{int}}$$

$$\vec{v} = \frac{-\frac{e}{m}}{\gamma + \gamma\omega} \vec{E}_{\text{int}}$$

$$\vec{j} = -Ne \vec{v} = \frac{Ne^2}{\gamma + \gamma\omega} \vec{E}_{\text{int}}$$

16/19

13/19

$$\vec{J} = \frac{\epsilon_0 \omega p^2}{\gamma + i\nu} \vec{E}_{int}$$

$$\vec{\sigma} = \frac{\epsilon_0 \omega p^2}{\gamma + i\nu} \vec{E}_0$$

III.12)

$$\frac{E_{int}}{\epsilon_0} = 1 + \frac{\sigma}{j\epsilon_0 \omega} = 1 + \frac{\omega p^2}{j\omega \gamma - \omega^2} = \frac{\omega p^2 - \omega^2 + j\omega \gamma}{j\omega \gamma - \omega^2}$$

$$\vec{E}_{int} = \frac{j}{\epsilon_0 \gamma + \omega^2} \vec{E}_0$$

$$\vec{E}_{int} = \frac{j\omega \gamma - \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega \gamma} \vec{E}_0$$

identités identiques à celles obtenues en I.4.4.

III.3) En effectuant les remplacements suivants

$$\epsilon_0 \rightarrow \epsilon_{ext} \text{ dans } \vec{E}_{int}$$

$$\chi_{met} \rightarrow \chi_{met} + \chi_b$$

III.3.1) D'après le texte:

$$E_{met} = \epsilon_0 \left(1 + \frac{\sigma}{j\epsilon_0 \omega} + \chi_b \right)$$

$$E_{met} + E_{ext} = \epsilon_0 \left(1 + \frac{\sigma}{j\epsilon_0 \omega} + \chi_b \right) + E_{ext}$$

$$E_{met} + E_{ext} = \epsilon_0 \left(1 + \chi_b + \frac{-\omega p^2 (\omega^2 + j\omega \gamma)}{\omega^4 + \gamma^2 \omega^2} \right) + E_{ext}$$

14/19

$$E_{met} + E_{ext} = \epsilon_0 \left(1 + \chi_b \right) + E_{ext} - \frac{\epsilon_0 \omega p^2 \omega^2}{\omega^4 + \gamma^2 \omega^2} - \frac{\epsilon_0 j \omega p^2 \gamma}{\omega^4 + \gamma^2 \omega^2}$$

est réel, milieu transparent.

$$\gamma \ll \omega, \omega$$

$$\gamma^2 \omega^2 \ll \omega^4$$

$$E_{met} + E_{ext} \approx \epsilon_0 (1 + \chi_b) + E_{ext} - \epsilon_0 \frac{\omega p^2}{\omega^2} - j \frac{\epsilon_0 \omega p^2 \gamma}{\omega^3}$$

Or plus $\frac{\gamma}{\omega} \ll 1 \Rightarrow \frac{\omega p^2}{\omega^2} \frac{\gamma}{\omega} \ll \frac{\omega p^2}{\omega^2}$. En première approximation, on peut donc

considérer cette expression comme réelle.

$$E_{met} + E_{ext} \approx \epsilon_0 (1 + \chi_b) + E_{ext} - \epsilon_0 \frac{\omega p^2}{\omega^2}$$

III.3.2)

$$\vec{E}_{int} = \frac{j E_{ext}}{\epsilon_0 \gamma + \omega^2}$$

$$\vec{E}_{int} = \frac{j E_{ext}}{\epsilon_0 (1 + \chi_b) + E_{ext} - \epsilon_0 \frac{\omega p^2}{\omega^2}}$$

$$\vec{E}_{int} = \frac{j E_{ext} \omega^2}{\epsilon_0 (1 + \chi_b) + E_{ext} - \epsilon_0 \frac{\omega p^2}{\omega^2}}$$

assumons pour:

$$\omega = \frac{\sqrt{\epsilon_0} \omega p}{\sqrt{\epsilon_0 (1 + \chi_b) + E_{ext}}}$$

si on considère $\chi_b \approx 0$

$$\text{III 33)} \quad n_{\text{cat}} = \sqrt{\epsilon_{\text{cat}}} \quad \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$$

19/19

$$w_R = 4 \cdot 10^{15} \text{ rad.s}^{-1}$$

$\lambda_R = 400 \text{ nm}$. Le vélocité absolue, il n'est du bleu + jaune (c'est à dire du violet).

Le milieu appaait violet si on suppose une bande de longueur d'onde de λ_R large autour de λ_R .

III 34)

$$\frac{\Delta w_R}{w_R} = \frac{\Delta \epsilon_{\text{cat}}}{\epsilon (1 + \chi_R) + \epsilon_{\text{cat}}} = - \frac{\Delta \lambda_R}{\lambda_R}$$

D'où

$$\Delta \left(\frac{\epsilon_{\text{cat}}}{\epsilon} \right) \approx 2 \cdot 10^{-3}$$

On a donc accès à une variation très faible de l'indice du milieu et donc à ses propriétés (variation de concentration...)