

Proposition de correction - Modélisation X-ENS 2010

J. Dumont, Lycée Chaptal, Paris

I - CONTRÔLE ACTIF DES VIBRATIONS DANS LES MRV

1 Les moteurs à courant continu sont composés d'éléments fragiles, principalement les balais et le collecteur, qui s'usent rapidement à cause des frottements notamment. Par conséquent, et par rapport à une machine à réluctance variable qui n'est composée que d'éléments robustes, elle est donc moins solide.

II - FONCTIONNEMENT DE LA MRV ET OBSERVATION DES PHÉNOMÈNES MIS EN JEUX

2 Le théorème d'Ampère dans un milieu magnétique permet d'écrire avec des notations évidentes que

$$\oint_{C_{\text{mag}}} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = H_{\text{mat}} \ell_m + H_{\text{air}} e(\theta) = nI$$

Or, la conservation du flux magnétique entre le matériau et l'entrefer impose

$$\mu_0 \mu_r H_{\text{mat}} S_S = \mu_0 H_{\text{air}} S_E(\theta)$$

et ainsi

$$nI = H_{\text{mat}} \left(\ell_m + \mu_r \frac{S_S}{S_E(\theta)} e(\theta) \right)$$

En revenant à la définition du flux dans une spire de la bobine, qui est le flux du champ magnétique dans le matériau, on peut écrire

$$\Phi = S_S B_{\text{mat}} = \mu_0 \mu_r S_S H_{\text{mat}}$$

soit finalement

$$\Phi = \frac{\mu_0 S_S nI}{\frac{\ell_m}{\mu_r} + \frac{S_S}{S_E(\theta)} e(\theta)}$$

3 Par identification directe avec la définition proposée, la réluctance vaut

$$\mathbf{R} = \frac{1}{\mu_0 S_S} \left(\frac{\ell_m}{\mu_r} + \frac{S_S}{S_E(\theta)} e(\theta) \right)$$

Celle-ci dépend donc de l'angle θ , modifiable, et justifie l'appellation de « réluctance variable ». De plus, si $LI = n\Phi$ et $\mathbf{R}\Phi = nI$, alors

$$\mathbf{R}LI = n\mathbf{R}\Phi = n^2 I$$

soit

$$\mathbf{R}L = n^2$$

La réluctance $\mathbf{R}$ et l'inductance L évoluent donc de façons inverses, et sont reliées par le seul paramètre n . On en déduit la forme de la fonction L utilisée quelques lignes plus tard

$$L = \frac{\mu_0 n^2 S_S}{\frac{\ell_m}{\mu_r} + \frac{S_S}{S_E(\theta)} e(\theta)}$$

Les comportements suivants en 0 et $\pi/2$ de $e(\theta)$ et $S_E(\theta)$ sont évidents :

$$\begin{cases} e(0) = e_{\min} \\ e(\pi/2) = e_{\max} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} S_E(0) = S_{E,\max} \\ S_E(\pi/2) = S_{E,\min} \end{cases}$$

Les fonctions $e(\theta)$ et $S_E(\theta)$ sont π -périodiques, ce qui conduit aux tableaux de variation suivants

θ	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$e(\theta)$	$e_{\min}$	$e_{\max}$	$e_{\min}$	$e_{\max}$	$e_{\min}$
$S_E(\theta)$	$S_{E,\max}$	$S_{E,\min}$	$S_{E,\max}$	$S_{E,\min}$	$S_{E,\max}$

Ainsi, la fonction $e/S_E(\theta)$ a le même sens de variation que $e(\theta)$ et par conséquent, étant donné l'expression de L , on a le tableau de variation

θ	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$L(\theta)$	$L_{\max}$	$L_{\min}$	$L_{\max}$	$L_{\min}$	$L_{\max}$

pour lequel

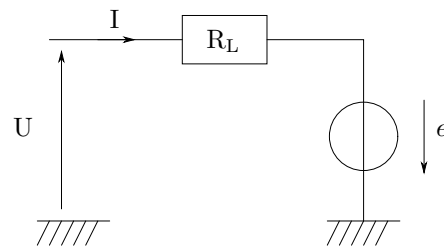
$$L_{\min} = \frac{\mu_0 n^2 S_S}{\frac{\ell_m}{\mu_r} + \frac{S_S}{S_{E,\min}} e_{\max}} \quad \text{et} \quad L_{\max} = \frac{\mu_0 n^2 S_S}{\frac{\ell_m}{\mu_r} + \frac{S_S}{S_{E,\max}} e_{\min}}$$

4 La loi de Faraday donne la valeur de la force électromotrice induite e

$$e = -n \frac{d\Phi}{dt}$$

puisque Φ représente le flux à travers une seule spire. La loi des mailles fournit alors

$$U = R_L I - e = R_L I + n \frac{d\Phi}{dt}$$



5 En utilisant la répartition de la puissance donnée par l'énoncé, on peut écrire

$$P_{\text{elec}} = P_{\text{Joule}} + P_{\text{meca}} + P_{\text{mag}}$$

dont chacun des termes s'exprime aussi comme

$$P_{\text{elec}} = UI \quad P_{\text{Joule}} = R_L I^2 \quad P_{\text{meca}} = C \frac{d\theta}{dt} \quad \text{et} \quad P_{\text{mag}} = \frac{dW_m}{dt}$$

Il y a une petite erreur d'énoncé dans la suite, puisque celui-ci proposait I plutôt que nI , mais cette erreur était sans incidence sur la suite.

6 En multipliant la loi des mailles de la question 4 par I , on obtient

$$UI = R_L I^2 + nI \frac{d\Phi}{dt}$$

Or, d'après la question 5,

$$UI - R_L I^2 = C \frac{d\theta}{dt} + \frac{dW_m}{dt}$$

soit donc

$$\frac{dW_m}{dt} = nI \frac{d\Phi}{dt} - C \frac{d\theta}{dt}$$

(*)

Dans le même temps, W_m est une fonction d'état dépendant de Φ et θ , on peut donc écrire que

$$dW_m = \left(\frac{\partial W_m}{\partial \Phi} \right)_\theta d\Phi + \left(\frac{\partial W_m}{\partial \theta} \right)_\Phi d\theta$$

Par identification entre ce résultat et l'équation (*), on a finalement

$$\boxed{\left(\frac{\partial W_m}{\partial \Phi} \right)_\theta = nI \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial W_m}{\partial \theta} \right)_\Phi = -C}$$

7 On calcule la dérivée partielle précédente pour déterminer le couple en utilisant la relation $LI = n\Phi$

$$\begin{aligned} C &= - \left(\frac{\partial W_m}{\partial \theta} \right)_\Phi \\ &= - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial (LI^2)}{\partial \theta} \right)_\Phi \\ C &= - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial (n^2 \Phi^2 / L)}{\partial \theta} \right)_\Phi \end{aligned}$$

La dérivation se faisant à flux constant, on a par conséquent

$$C = - \frac{n^2 \Phi^2}{2} \left(\frac{\partial (1/L)}{\partial \theta} \right)_\Phi$$

Or, L ne dépend que de θ d'après la question 3, donc

$$C = - \frac{n^2 \Phi^2}{2} \left(\frac{-1}{L^2} \frac{dL(\theta)}{d\theta} \right)$$

et, puisque $LI = n\Phi$,

$$\boxed{C = \frac{1}{2} \frac{dL(\theta)}{d\theta} I^2}$$

L'énoncé est ambigu : il propose $W_m = LI^2(\Phi)/2$ ce qui peut laisser penser que le courant ne dépend que de Φ . La dérivation partielle par rapport à θ à Φ constant, donc dans ce cas à I constant, conduit à

$$C = -\frac{1}{2} \frac{dL(\theta)}{d\theta} I^2$$

On trouve l'opposé de notre résultat, et cela conduirait à un couple moyen négatif dans la question suivante.

En notant $\langle \cdot \rangle$ l'opérateur valeur moyenne et puisque d'après la géométrie du système, le comportement de l'inductance entre 0 et $\pi/2$ est « l'opposé » de celui rencontré entre $\pi/2$ et π , le couple moyen du rotor $\overline{C}$ vaut à courant constant,

$$\overline{C} = \frac{1}{2} I^2 \left\langle \frac{dL}{d\theta} \right\rangle = 0$$

8 D'après le tableau de variation établi à la question 3, la dérivée de l'inductance est positive pour les intervalles $[\pi/2; \pi]$ et $[3\pi/2; 2\pi]$. Ainsi,

$$\text{Il faut injecter un courant lorsque } \theta \in [\pi/2; \pi] \cup [3\pi/2; 2\pi]$$

On peut alors calculer le couple moyen

$$\begin{aligned} \overline{C} &= \frac{1}{2} \left\langle I^2 \frac{dL}{d\theta} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I^2 \frac{dL}{d\theta} d\theta \\ \overline{C} &= \frac{I_{\max}^2}{4\pi} \left[\int_{\pi/2}^{\pi} dL + \int_{3\pi/2}^{2\pi} dL \right] \end{aligned}$$

et, d'après le tableau de variation,

$$\overline{C} = \frac{I_{\max}^2}{2\pi} (L_{\max} - L_{\min})$$

Remarquons également que l'expression générale de W_m n'a servi à rien !

9 L'équation de Maxwell-Ampère dans un milieu magnétique s'écrit dans le cadre de l'ARQS et en notant $\vec{j}$ le vecteur densité volumique de courants,

$$\vec{\text{rot}} \vec{H} = \vec{j}$$

En utilisant le formulaire, on peut évaluer le premier terme proposé selon

$$\vec{j} \wedge \vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{H} \wedge \mu \vec{H} = \mu [(\vec{H} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{H} - \frac{1}{2} \vec{\text{grad}} |\vec{H}|^2]$$

et ainsi

$$\vec{f} = \mu [(\vec{H} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{H} - \frac{1}{2} \vec{\text{grad}} |\vec{H}|^2] - \frac{|\vec{H}|^2}{2} \vec{\text{grad}} \mu$$

qui se simplifie grâce au formulaire en

$$\vec{f} = \mu (\vec{H} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{H} - \frac{1}{2} \vec{\text{grad}} (\mu |\vec{H}|^2)$$

10 L'équation de Maxwell-flux est

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{B} = 0}$$

autrement dit

$$\operatorname{div} (\mu \vec{H}) = 0$$

et enfin

$$\frac{\partial(\mu H_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu H_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\mu H_z)}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

L'énoncé propose la formule

$$\mu (\vec{H} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{H} = \begin{pmatrix} \mu (\vec{H} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) H_x \\ \mu (\vec{H} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) H_y \\ \mu (\vec{H} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) H_z \end{pmatrix}$$

Considérons la composante selon x qui est

$$\begin{aligned} \mu (\vec{H} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) H_x &= \mu \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial H_x}{\partial x} \\ \frac{\partial H_x}{\partial y} \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} \end{pmatrix} \\ &= (\mu H_x) \frac{\partial H_x}{\partial x} + (\mu H_y) \frac{\partial H_x}{\partial y} + (\mu H_z) \frac{\partial H_x}{\partial z} \end{aligned} \quad (2)$$

Par ailleurs, on remarque que

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (\mu H_x \vec{H}) &= \frac{\partial(\mu H_x H_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu H_x H_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\mu H_x H_z)}{\partial z} \\ &= H_x \frac{\partial(\mu H_x)}{\partial x} + (\mu H_x) \frac{\partial H_x}{\partial x} + H_x \frac{\partial(\mu H_y)}{\partial y} + (\mu H_y) \frac{\partial H_x}{\partial y} \\ &\quad + H_x \frac{\partial(\mu H_z)}{\partial z} + (\mu H_z) \frac{\partial H_x}{\partial z} \end{aligned}$$

soit

$$\operatorname{div} (\mu H_x \vec{H}) = H_x \operatorname{div} (\mu \vec{H}) + (\mu H_x) \frac{\partial H_x}{\partial x} + (\mu H_y) \frac{\partial H_x}{\partial y} + (\mu H_z) \frac{\partial H_x}{\partial z}$$

On reconnaît alors le terme (1) qui est nul et le terme (2), ce qui conduit à

$$\boxed{\operatorname{div} (\mu H_x \vec{H}) = \mu (\vec{H} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) H_x}$$

La même opération menée sur les deux autres termes conduit au résultat demandé.

$$\boxed{\mu (\vec{H} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{H} = \begin{pmatrix} \operatorname{div} (\mu H_x \vec{H}) \\ \operatorname{div} (\mu H_y \vec{H}) \\ \operatorname{div} (\mu H_z \vec{H}) \end{pmatrix}}$$

11 Calculons la composante de la force $\vec{F}$ selon $\vec{x}$:

$$\begin{aligned} dF_x &= \vec{T}^x \cdot dS \vec{n} \\ &= dS \left[\mu H_x \vec{H} \cdot \vec{n} - \frac{\mu}{2} |\vec{H}|^2 \vec{x} \cdot \vec{n} \right] \\ \text{par conséquent} \quad dF_x &= dS \left[\mu H_x H_n - \frac{\mu}{2} |\vec{H}|^2 n_x \right] \end{aligned}$$

Par symétrie des indices,

$$dF_y = dS \left[\mu H_y H_n - \frac{\mu}{2} |\vec{H}|^2 n_y \right] \quad \text{et} \quad dF_z = dS \left[\mu H_z H_n - \frac{\mu}{2} |\vec{H}|^2 n_z \right]$$

On reconnaît ainsi

$$d\vec{F} = dS \left[\mu H_n \vec{H} - \frac{\mu}{2} |\vec{H}|^2 \vec{n} \right]$$

Le vecteur $\vec{H}$ n'ayant pas de composante selon $\vec{n} \wedge \vec{t}$, on déduit que

$$\boxed{d\vec{F} \text{ n'a pas de composante selon } \vec{n} \wedge \vec{t} .}$$

et aussi

$$\boxed{dF_n = \frac{1}{2} \mu (H_n^2 - H_t^2) dS \quad \text{et} \quad dF_t = \mu H_n H_t dS}$$

12 Le vecteur $\vec{n}$ proposé est orienté depuis le milieu « air » vers le milieu « fer », les relations de passage permettent donc d'écrire

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_{\text{fer}} - \vec{B}_{\text{air}}) = 0$$

ainsi que

$$\vec{n} \wedge (\vec{H}_{\text{fer}} - \vec{H}_{\text{air}}) = \vec{j}_s$$

où $\vec{j}_s$ est le vecteur densité surfacique de courant. La première relation traduit la continuité de la composante normale du champ magnétique, ce qui fournit

$$\boxed{B_{n,\text{fer}} = B_{n,\text{air}} = B_n}$$

L'énoncé propose de négliger la densité surfacique de courant, on a alors également continuité de la composante tangentielle de l'excitation magnétique, soit

$$\boxed{H_{t,\text{fer}} = H_{t,\text{air}} = H_t}$$

13 La force totale surfacique subie par l'interface est, d'après la question 14,

$$\begin{aligned} d\vec{F}_{\text{totale}} &= d\vec{F}_{\text{air}} + d\vec{F}_{\text{fer}} \\ &= \left[\frac{\mu_{\text{air}}}{2} (H_{n,\text{air}}^2 - H_{t,\text{air}}^2) - \frac{\mu_{\text{fer}}}{2} (H_{n,\text{fer}}^2 - H_{t,\text{fer}}^2) \right] (-\vec{n}) \\ &\quad + [\mu_{\text{air}} H_{n,\text{air}} H_{t,\text{air}} - \mu_{\text{fer}} H_{n,\text{fer}} H_{t,\text{fer}}] (-\vec{t}) \end{aligned}$$

Or, la continuité de la composante tangentielle de l'excitation magnétique établie à la question précédente permet de dire que $H_{t,\text{fer}} = H_{t,\text{air}}$. De plus, la continuité de la composante normale du champ magnétique fournit $B_{n,\text{fer}} = B_{n,\text{air}}$, c'est-à-dire $\mu_{\text{fer}} H_{n,\text{fer}} = \mu_{\text{air}} H_{n,\text{air}}$. Ainsi, le terme de la seconde ligne est nul.

$$\boxed{\text{La force appliquée à l'interface est normale à celle-ci.}}$$

De plus, on peut réécrire le terme normal grâce aux mêmes relations comme

$$\vec{dF}_{\text{totale}} = -p_n \vec{n} \quad \text{avec} \quad p_n = \frac{1}{2} \left[B_n^2 \left(\frac{1}{\mu_{\text{air}}} - \frac{1}{\mu_{\text{fer}}} \right) - H_t^2 (\mu_{\text{air}} - \mu_{\text{fer}}) \right]$$

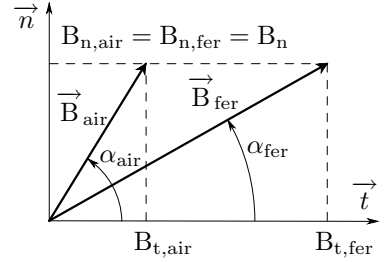
La force surfacique est donc orientée du matériau magnétique vers l'air et s'apparente à une pression p_n .

14 Puisque $\mu_{\text{air}} \ll \mu_{\text{fer}}$, on peut simplifier l'expression précédente de la pression en

$$p_n \simeq \frac{1}{2} \left[\frac{B_n^2}{\mu_{\text{air}}} + \mu_{\text{fer}} H_t^2 \right]$$

On ne peut alors plus rien dire car nous n'avons pas d'information supplémentaire sur les composantes respectives des champs dans l'air et le matériau. Considérons en effet les angles d'incidence α_{air} et α_{fer} du champ magnétique respectivement côté air et côté fer, comme définis sur le dessin suivant. On peut écrire que

$$\begin{aligned} \tan \alpha_{\text{air}} &= \frac{B_{t,\text{air}}}{B_n} \\ &= \frac{\mu_{\text{air}} H_t}{B_n} \\ &= \frac{\mu_{\text{air}}}{\mu_{\text{fer}}} \frac{\mu_{\text{fer}} H_t}{B_n} \\ \tan \alpha_{\text{air}} &= \frac{1}{\mu_r} \tan \alpha_{\text{fer}} \end{aligned}$$



Ainsi,

$$\mu_{\text{air}}^2 = \frac{B_n^2}{\mu_r^2} \tan^2 \alpha_{\text{fer}}$$

et finalement

$$\frac{B_n^2}{\mu_{\text{air}} \mu_r H_t^2} = \frac{\mu_r}{\tan^2 \alpha_{\text{fer}}}$$

Le résultat de l'énoncé n'est donc valable que si le second terme de l'égalité est très grand devant 1. Or, même si la perméabilité relative du ferromagnétique est élevée, rien ne permet de conclure que la tangente n'est pas trop élevée. Si « négliger » un terme devant un autre correspond à un facteur 100 par exemple, un petit calcul montre que cette approximation n'est plus valable dès lors que α_{fer} dépasse 66° , et 82° pour un facteur 10. Les cartes de champs données à la figure 15 du sujet montrent des cas où justement l'angle interne est proche de ces deux valeurs, mais dans ce cas les dents du rotor ne sont plus vraiment en face des dents du stator et le modèle précédent est sans doute trop rustre.

2 ANALYSE DES VIBRATIONS MÉCANIQUES

15 La ligne neutre ne se déformant pas, on peut écrire que les chemins élémentaires sont égaux, autrement dit $ds = ds'$, ce qui conduit à

$$R d\theta = r d\Theta = (R + \delta R) d(\theta + \delta\theta)$$

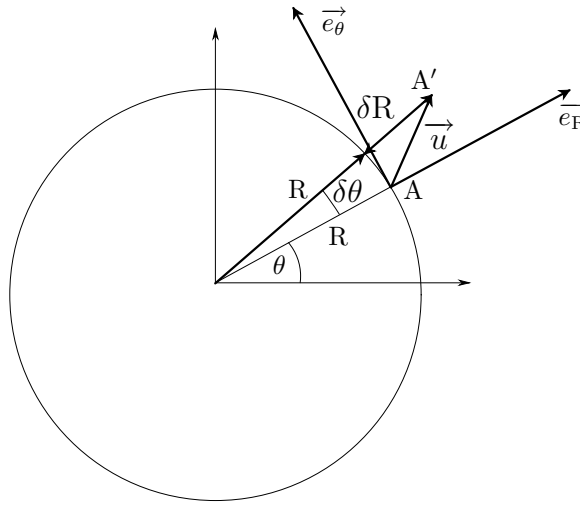
soit, au premier ordre,

$$R d\theta \simeq R d\theta + \delta R d\theta + R d(\delta\theta)$$

Par identification, on peut donc conclure que

$$\delta R d\theta + R d(\delta\theta) = 0$$

16 Le point A de coordonnées polaires (R, θ) se déplace radialement (*ie* selon $\vec{e}_R$) de la quantité δR , et orthoradialement (*ie* selon $\vec{e}_\theta$) de l'arc $R\delta\theta$ au premier ordre.



On obtient donc par identification avec le vecteur déplacement $\vec{u}$ donné page 11 les relations

$$u_R = \delta R \quad \text{et} \quad u_\theta = R \delta\theta$$

La relation obtenue à la question 15 conduit alors à

$$u_R d\theta + R d(\delta\theta) = 0$$

$$u_R d\theta + d(R \delta\theta) = 0$$

$$u_R d\theta + du_\theta = 0$$

R étant constant

17 Les déformations sont périodiques et au plus de période 2π , de moyenne nulle autour de la ligne neutre (ce qui justifie, même si l'énoncé le précise, la nullité du terme $n = 0$). Il est par conséquent légitime de décomposer en série de Fourier les déformations radiales u_R mais également les déformations orthoradiales u_θ . Étant donné la série proposée par le sujet pour u_R ,

$$u_R(\theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n(t) \cos(n\theta) + B_n(t) \sin(n\theta)]$$

la question précédente fait apparaître u_θ comme l'opposée de la primitive de u_R , c'est-à-dire, en prenant la constante d'intégration nulle en accord avec le texte,

$$u_\theta(\theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{A_n(t)}{n} \sin(n\theta) + \frac{B_n(t)}{n} \cos(n\theta) \right]$$

18 La puissance élémentaire dP_{ext} des efforts extérieurs au point A est égale au comoment du torseur cinématique par le torseur d'actions mécaniques, soit

$$dP_{\text{ext},A} = \{dT_{\text{ext}}\}_A \odot \{V\}_A$$

et en tout

$$P_{\text{ext}} = \int_{A \text{ sur la ligne neutre}} \{dT_{\text{ext}}\}_A \odot \{V\}_A$$

Les notations de l'énoncé permettent donc de réécrire cette quantité (on sous-entend toujours que l'intégration se fait sur la ligne neutre, pour plus de lisibilité)

$$\begin{aligned} P_{\text{ext}} &= \int d\vec{F}(\theta, t) \cdot \vec{v} \\ &= \int [f_R \dot{u}_R + f_\theta \dot{u}_\theta] ds \\ P_{\text{ext}} &= \int_0^{2\pi} [f_R \dot{u}_R + f_\theta \dot{u}_\theta] R d\theta \end{aligned}$$

Or, d'après la question 17, on a les deux relations

$$\dot{u}_R = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\dot{A}_n \cos(n\theta) + \dot{B}_n \sin(n\theta) \right] \quad \text{et} \quad \dot{u}_\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\dot{A}_n \frac{\sin(n\theta)}{n} + \dot{B}_n \frac{\cos(n\theta)}{n} \right]$$

En posant

$$\begin{cases} F_{A_n}(t) = \int_0^{2\pi} \left[f_R(\theta, t) \cos(n\theta) - \frac{f_\theta(\theta, t)}{n} \sin(n\theta) \right] R d\theta \\ F_{B_n}(t) = \int_0^{2\pi} \left[f_R(\theta, t) \sin(n\theta) + \frac{f_\theta(\theta, t)}{n} \cos(n\theta) \right] R d\theta \end{cases}$$

on obtient

$$P_{\text{ext}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[F_{A_n}(t) \dot{A}_n(t) + F_{B_n}(t) \dot{B}_n(t) \right]$$

19 Lorsque l'on néglige l'énergie cinétique de rotation des sections devant celle de leur translation, l'énergie cinétique dE_c d'une section droite de couronne de masse dm vaut

$$dE_c = \frac{1}{2} v^2 dm = \frac{1}{2} \left[(\dot{u}_R)^2 + (\dot{u}_\theta)^2 \right] \rho R d\theta$$

où v est la norme de la vitesse définie dans le torseur cinématique par l'énoncé. L'énergie cinétique totale se calcule alors en intégrant l'ensemble des sections droites :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[(\dot{u}_R)^2 + (\dot{u}_\theta)^2 \right] \rho R d\theta$$

ou encore

$$E_c = \frac{\rho R}{2} \int_0^{2\pi} (\dot{u}_R)^2 d\theta + \frac{\rho R}{2} \int_0^{2\pi} (\dot{u}_\theta)^2 d\theta$$

Or, on a obtenu les expressions de $\dot{u}_R$ et $\dot{u}_\theta$ à la question 18. D'après la question 17,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (\dot{u}_R)^2 d\theta &= \int_0^{2\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dot{A}_n \cos(n\theta) + \dot{B}_n \sin(n\theta) \right) \right]^2 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\dot{A}_i \dot{A}_j \cos(i\theta) \cos(j\theta) + \dot{B}_i \dot{B}_j \sin(i\theta) \sin(j\theta) \right] d\theta \\ &\quad + 2 \int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\dot{A}_i \dot{B}_j \cos(i\theta) \sin(j\theta) \right] d\theta \end{aligned}$$

En intervertissant les sommations et l'intégrale, et en utilisant le formulaire, il ne reste que certains termes pour lesquels $i = j$, et la première intégrale se restreint alors à

$$\frac{\rho R}{2} \int_0^{2\pi} (\dot{u}_R)^2 d\theta = \frac{\rho \pi R}{2} \sum_{i=1}^{\infty} (\dot{A}_i^2 + \dot{B}_i^2)$$

La seconde intégrale se traite pareillement, mais fait apparaître en plus un facteur $1/i^2$. On a donc de même

$$\frac{\rho R}{2} \int_0^{2\pi} (\dot{u}_\theta)^2 d\theta = \frac{\rho \pi R}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} (\dot{A}_i^2 + \dot{B}_i^2)$$

Finalement, l'énergie cinétique s'écrit, en prenant comme indice de sommation n ,

$$E_c = \frac{\rho \pi R}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n^2} \right) (\dot{A}_n^2 + \dot{B}_n^2) \right]$$

20 Dans le référentiel du laboratoire, supposé galiléen durant la période de fonctionnement du moteur, la dérivée de l'énergie cinétique de la couronne est égale à la somme de la puissance des actions mécaniques extérieures à la couronne déterminée à la question 18 et de la puissance des efforts intérieurs à la couronne. Ainsi, on peut écrire que

$$\dot{E}_c(t) = P_{\text{ext}}(t) + P_{\text{int}}(t)$$

Remarquons que

$$\dot{E}_c(t) = \rho R \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) (\ddot{A}_n(t) \dot{A}_n(t) + \ddot{B}_n(t) \dot{B}_n(t))$$

et

$$P_{\text{int}} = -\dot{E}_p = -R C_p \pi \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - 1)^2 (A_n(t) \dot{A}_n(t) + B_n(t) \dot{B}_n(t))$$

On étudie à n fixé l'équation portant sur A_n . D'après les deux questions précédentes, la n^{e} composante des deux séries entières se réécrit comme

$$\rho R \pi \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) \ddot{A}_n(t) \dot{A}_n(t) = -R C_p \pi (n^2 - 1)^2 A_n(t) \dot{A}_n(t) + F_{A_n} \dot{A}_n(t)$$

On peut simplifier par la dérivée première de $A_n(t)$ car, si celle-ci était identiquement nulle, on serait dans le cas particulier où $A_n(t)$ est une constante. En réorganisant les termes, on a finalement

$$\rho R \pi \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) \ddot{A}_n(t) + R C_p \pi (n^2 - 1)^2 A_n(t) = F_{A_n}(t)$$

L'équation établie ici est donc bien l'équation (**eq1**) proposée par le texte ; l'équation (**eq2**) s'obtient de la même façon :

$$\rho R \pi \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) \ddot{B}_n(t) + R C_p \pi (n^2 - 1)^2 B_n(t) = F_{B_n}(t)$$

21 En injectant la forme de solution proposée dans (**eq1**) sans second membre, on trouve la relation

$$-\omega_n^2 \rho R \pi \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) + R C_p \pi (n^2 - 1)^2 = 0$$

soit

$$\omega_n = \sqrt{\frac{C_p}{\rho(n^2 + 1)}} (n^2 - 1) n$$

22 Pour $n = 1$, on trouve

$$\begin{cases} u_{R,1}(\theta, t) = A_1(t) \cos(\theta) + B_1(t) \sin(\theta) \\ u_{\theta,1}(\theta, t) = -A_1(t) \sin(\theta) + B_1(t) \cos(\theta) \end{cases}$$

Ainsi
$$\vec{u}_1(\theta, t) = A_1(t) [\cos(\theta) \vec{e}_R - \sin(\theta) \vec{e}_\theta] + B_1(t) [\sin(\theta) \vec{e}_R + \cos(\theta) \vec{e}_\theta]$$

On reconnaît entre crochets les expressions des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$, ce qui fournit

$$\vec{u}_1(\theta, t) = A_1(t) \vec{x} + B_1(t) \vec{y}$$

Le déplacement est donc une translation, indépendante de la position du point. Par conséquent,

Le mouvement correspondant au mode $n = 1$ est celui d'un solide indéformable.

23 Le calcul numérique conduit à

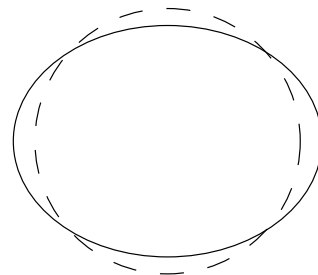
$$f_2 = 3,654 \text{ Hz} \quad f_3 = 10,33 \text{ Hz} \quad f_4 = 19,82 \text{ Hz} \quad f_5 = 32,05 \text{ Hz}$$

Il y a une excellente coïncidence sur les modes 2 et 3. Néanmoins, la qualité de la modélisation se détériore aux plus grands ordres. On remarque également que ces modes de vibrations propres correspondent à des fréquences audibles par l'oreille humaine, c'est précisément cela que l'on va vouloir combattre dans la suite. Ce modèle fonctionne donc bien pour approcher les petits modes, mais les modes plus élevés sont mal évalués. On peut émettre l'hypothèse que l'influence des dents statoriques, ignorées dans le modèle et présentes sur le stator réel, contribuent à expliquer ces écarts sur les modes élevés.

24 Les conditions proposées fournissent pour le mode 2

$$u_{R,2}(\theta, t) = u_{R,2}(\theta) = u_0 \cos(2\theta)$$

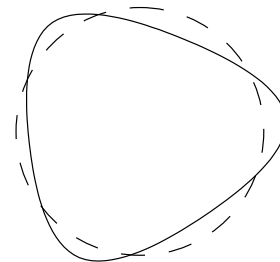
Le déplacement radial du mode 2 atteint son maximum en $0[\pi]$, son minimum en $\pi/2[\pi]$, et s'annule en $\pi/4[\pi/2]$. On obtient l'allure de la couronne cylindrique ci-contre, avec en tirets le cercle statorique non déformé.



De même, pour le mode 3,

$$u_{R,3}(\theta, t) = u_{R,3}(\theta) = u_0 \cos(3\theta)$$

Le déplacement radial du mode 3 atteint son maximum en $0[2\pi/3]$, son minimum en $\pi/3[2\pi/3]$, et s'annule en $\pi/6[\pi/3]$. On obtient l'allure de la couronne cylindrique ci-contre, avec en tirets le cercle statorique non déformé.



On constate une excellente coïncidence avec les déformations de la couronne statorique obtenues par la méthode des éléments finis.

25 Le comportement des solutions des équations différentielles en régime permanent correspond à celui des solutions particulières de chaque équation. Ainsi, $B_n(t)$ est nul puisque c'est la solution d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants sans second membre et que les conditions initiales sont nulles.

$$B_n(t) = 0$$

Cherchons la solution particulière de la première équation différentielle sous la forme du second membre, en utilisant la notation complexe. Notant $\underline{A}_n$ l'amplitude complexe de $A_n(t)$, l'équation

$$\rho R \pi \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \ddot{A}_n(t) + R C_p \pi (n^2 - 1)^2 A_n(t) = f_0 \sin(\omega t) R$$

devient
$$\left[-\omega^2 \rho R \pi \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) + R C_p \pi (n^2 - 1)^2\right] \underline{A}_n = f_0 R e^{j\pi/2}$$

ou encore, avec la question 23,

$$\rho \pi \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) (\omega_n^2 - \omega^2) \underline{A}_n = f_0 e^{j\pi/2}$$

c'est-à-dire
$$\underline{A}_n = \frac{f_0}{\rho \pi (1 + 1/n^2) (\omega_n^2 - \omega^2)} e^{j\pi/2}$$

L'amplitude et l'argument φ de ce complexe correspondent respectivement à l'amplitude et la phase à l'origine de $A_n(t)$. Or, ce complexe est un imaginaire pur, sa phase vaut donc $\pi/2$ s'il est de partie imaginaire positive ou $-\pi/2$ (ce qui correspond à un coefficient multiplicateur -1 supplémentaire) si la partie imaginaire est négative. Par conséquent, une forme permet de tenir compte de ces deux possibilités de façon unique :

$$A_n(t) = \frac{f_0}{\rho \pi (1 + 1/n^2) (\omega_n^2 - \omega^2)} \sin(\omega t)$$

Si $\omega \rightarrow \omega_n$, l'amplitude tend vers l'infini et on est en présence d'un **phénomène de résonance**.

Les formules que l'on demande d'admettre sont en fait faciles à retrouver à partir de la question 18 et de la formule donnée au bas de la page 16 du sujet.

26 En utilisant la formule donnée au bas de la page 16 du sujet et en supposant que la densité d'efforts tangentiels est encore nulle (ce que l'énoncé semble sous-entendre)

$$F_{A_n}(t) = \int_0^{2\pi} \left[f_R(\theta, t) \cos(n\theta) - \frac{f_\theta(\theta, t)}{n} \sin(n\theta) \right] R d\theta$$

soit ici
$$F_{A_n}(t) = \int_0^{2\pi} f_0 \sin(\omega t) [\delta(\theta) + \delta(\theta - \pi)] \cos(n\theta) R d\theta$$

En conclusion,
$$F_{A_n}(t) = f_0 \sin(\omega t) [1 + \cos(n\pi)] R$$

Le même calcul que celui de la question précédente conduit cette fois-ci à

$$A_n(t) = \frac{f_0 [1 + (-1)^n]}{\rho \pi (1 + 1/n^2) (\omega_n^2 - \omega^2)} \sin(\omega t)$$

Ainsi, si n est impair, l'amplitude est nulle. Par conséquent,

Seuls les modes pairs sont excités.

Dans ce dernier cas, l'amplitude vaut

$$|\underline{A}_n| = \frac{2 f_0}{\rho \pi (1 + 1/n^2) |\omega_n^2 - \omega^2|}$$

L'amplitude est alors le double de celle obtenue avec une seule dent.

III - COMPENSATION ACTIVE PAR ACTIONNEURS PIÉZOÉLECTRIQUES

27 Remarquons tout d'abord que le volume élémentaire $d\tau$ vaut $e \ell_0 dz$. D'une part, par définition, le travail δW_m de la force mécanique $\vec{F}_m$ est

$$\delta W_m = \vec{F}_m \cdot d\vec{\ell} = \sigma e dz d\ell$$

et puisque par ailleurs $d\lambda = d\ell/\ell_0$,

$$\delta W_m = \sigma e \ell_0 d\lambda dz$$

D'autre part, l'énergie volumique fournie par un champ électromagnétique à des porteurs de charges s'écrit

$$\frac{\delta W_e}{d\tau} = \vec{j}_D \cdot \vec{E} dt$$

ce qui fournit

$$\delta W_e = \vec{j}_D \cdot \vec{E} d\tau dt = E dD e \ell_0 dz$$

28 Notons δw_m , δw_e et δq les grandeurs correspondant respectivement au travail mécanique volumique élémentaire, au travail électrique volumique élémentaire et au transfert thermique volumique élémentaire. On a donc, par définition,

$$\delta w_m d\tau = \delta W_m \quad \delta w_e d\tau = \delta W_e \quad \delta q d\tau = \delta Q$$

Le premier principe permet alors d'écrire que la variation élémentaire d'énergie interne est égale à la somme des travaux et du transfert thermique élémentaires durant la transformation :

$$du = \delta w_m + \delta w_e + \delta q$$

Puisque $d\tau = e \ell_0 dz$,

$$du = \sigma d\lambda + E dD + \delta q$$

Or, pour une transformation réversible, le second principe précise que

$$ds = \frac{\delta q}{T}$$

On peut alors éliminer le terme de transfert thermique volumique en combinant les deux équations et parvenir à

$$du = \sigma d\lambda + E dD + T ds$$

29 Le calcul de dg donne

$$dg = du - T ds - s dT - E dD - D dE$$

qui, d'après la question 28, se simplifie en

$$dg = \sigma d\lambda - s dT - D dE$$

30 La fonction dg étant une différentielle totale exacte, ses dérivées partielles croisées sont égales. En particulier, puisqu'on a par identification

$$\sigma = \left(\frac{\partial g}{\partial \lambda} \right)_{T,E} \quad \text{et} \quad -D = \left(\frac{\partial g}{\partial E} \right)_{\lambda,T}$$

on peut écrire

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial E} \right)_{\lambda, T} = - \left(\frac{\partial D}{\partial \lambda} \right)_{T, E}$$

qui est bien la relation de Maxwell.

Dès lors, la vérification des lois (1) et (2) est immédiate, puisque la dérivée partielle de σ par rapport à E à λ constant conduit à $-\alpha Y$, et la dérivation partielle de D par rapport à λ à E constant est αY , ce qui montre que la relation de Maxwell est bien satisfaite.

31 Pour un champ E constant et une différence de potentiel V sur une longueur e , on a la relation

$$E = \frac{V}{e}$$

De plus, en l'absence de force, σ est nulle, ce qui grâce à la relation (1) conduit à

$$\lambda = \alpha E = \alpha \frac{V}{e}$$

c'est-à-dire

$$V = \frac{e \lambda}{\alpha} = 250 \text{ V}$$

La tension statique nécessaire est très élevée mais un système adapté permet d'atteindre une telle valeur.

32 D'après la figure 12, la déformation $\lambda(y)$ est linéaire, et on peut écrire

$$\lambda(y) = \lambda_i \frac{y}{h/2}$$

Ainsi,

$$\sigma_s(y) = Y_s \lambda_i \frac{2y}{h} \quad \text{et} \quad \sigma_p(y) = Y_p \left(\lambda_i \frac{2y}{h} - \alpha \frac{V}{e} \right)$$

33 La composante selon $\vec{z}$ du moment élémentaire en A de la densité de force $\vec{df}_s$ créée par un point M d'ordonnée y du plan de coupe est

$$dM_s = \vec{z} \cdot (\overrightarrow{AM} \wedge d\vec{f}_s) = -\sigma_s(y) y dy$$

soit en tout

$$M_s = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_s(y) y dy = - \int_{-h/2}^{h/2} Y_s \lambda_i \frac{2y^2}{h} dy$$

autrement dit

$$M_s = - \frac{Y_s \lambda_i h^2}{6}$$

De même,

$$M_p = - \int_{h/2}^{h/2+e} \sigma_p(y) y dy = - \int_{h/2}^{h/2+e} Y_p \left(\lambda_i \frac{2y^2}{h} - \alpha \frac{Vy}{e} \right) dy$$

conduit à

$$M_p = - \frac{2Y_p \lambda_i}{h} \left[\frac{y^3}{3} \right]_{h/2}^{h/2+e} + \frac{\alpha V Y_p}{e} \left[\frac{y^2}{2} \right]_{h/2}^{h/2+e}$$

Finalement, en développant les puissances et en simplifiant les termes d'ordre trois,

$$M_p = -\frac{2Y_p \lambda_i}{3h} \left[e^3 + \frac{3h^2 e}{4} + \frac{3he^2}{2} \right] + \frac{\alpha V Y_p (h+e)}{2}$$

34 Le torseur d'action mécanique global est nul, en particulier le moment total en A est nul. En sommant les deux moments précédents, on a donc $M_s + M_p = 0$ c'est-à-dire

$$-\frac{Y_s \lambda_i h^2}{6} - \frac{2Y_p \lambda_i}{3h} \left[e^3 + \frac{3h^2 e}{4} + \frac{3he^2}{2} \right] + \frac{\alpha V Y_p (h+e)}{2} = 0$$

On peut alors exprimer λ_i selon

$$\lambda_i = \frac{Y_p \alpha \frac{V}{2} (h+e)}{\frac{Y_s h^2}{6} + Y_p \frac{2e}{3h} \left[e^2 + \frac{3h^2}{4} + \frac{3he}{2} \right]}$$

qui est l'expression demandée. La continuité des contraintes imposerait

$$\sigma_s \left(\frac{h}{2} \right) = \sigma_p \left(\frac{h}{2} \right)$$

autrement dit

$$Y_s \lambda_i = Y_p \left[\lambda_i - \alpha \frac{V}{e} \right]$$

soit

$$\lambda_i = \frac{Y_p \alpha V/e}{Y_p - Y_s}$$

qui est une expression différente de celle obtenue plus haut : la continuité n'est donc pas assurée au passage de l'interface entre la lame et le stator.

35 En réutilisant l'expression de M_s obtenue à la question 33 et en substituant λ_i par sa valeur de la question précédente, on a

$$M_s = -\frac{Y_s Y_p \alpha \frac{V}{2} h^2 (h+e)}{Y_s h^2 + 4 Y_p \frac{e}{h} \left[e^2 + \frac{3h^2}{4} + \frac{3he}{2} \right]}$$

qui correspond à l'expression proposée avec

$$f(e) = -\frac{Y_s Y_p \alpha \frac{e}{2} h^2 (h+e)}{Y_s h^2 + 4 Y_p \frac{e}{h} \left[e^2 + \frac{3h^2}{4} + \frac{3he}{2} \right]}$$

On peut se demander pourquoi $f(e)$ ne fait pas intervenir le e au dénominateur. L'intérêt apparaît à la question 38, V/e s'interprète alors comme le champ électrique et les courbes expérimentales donnent M_s en fonction de ce champ.

36 Pour commencer, écrivons

$$\dot{u}_R(\theta, t) = A'(t) \cos(2\theta) \quad \text{et} \quad \frac{d\dot{u}_R(\theta, t)}{d\theta} = -2A'(t) \sin(2\theta)$$

La densité linéique de moments restreint l'intégrale proposée à

$$P_{\text{ext}} = \frac{2 M_s A'(t)}{R} [\sin(2\theta_2) - \sin(2\theta_1)]$$

Par identification avec la forme $P_{\text{ext}} = F(t) A'(t)$, on a

$$F(t) = \frac{2 M_s}{R} [\sin(2\theta_2) - \sin(2\theta_1)]$$

Or, d'après la figure 14,

$$\theta_0 = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}$$

mais aussi

$$\sin \beta = \frac{\ell_p}{2R}$$

ce qui permet de calculer successivement

$$\begin{aligned} F(t) \frac{2 M_s}{R} [\sin(2\theta_2) - \sin(2\theta_1)] &= \frac{2 M_s}{R} \left[2 \sin\left(\frac{2\theta_2 - 2\theta_1}{2}\right) \cos\left(\frac{2\theta_1 + 2\theta_2}{2}\right) \right] \\ &= \frac{4 M_s}{R} \sin(2\beta) \cos(2\theta_0) = \frac{4 M_s}{R} \cos(2\theta_0) (2 \sin(\beta) \cos(\beta)) \end{aligned}$$

soit enfin

$$F(t) = \frac{4 M_s}{R^2} \cos(2\theta_0) \ell_p \sqrt{1 - \left(\frac{\ell_p}{2R}\right)^2}$$

37 On a vu à la question 24 que pour le mode 2, l'amplitude était optimale pour $\theta = 0 [\pi/2]$: on détecte alors un ventre positif ou négatif de vibration. Il suffit donc au plus de 4 capteurs, ou au minimum de 2, le choix étant sans doute financier. Il ne faut surtout pas mettre les capteurs en $\theta = \pi/4 [\pi/2]$ puisqu'alors la lame serait sur un nœud et ne détecterait rien ! Remarquons également que pour les angles retenus, l'expression de $F(t)$ est elle aussi optimale.

38 Notons avant tout que le cahier des charges impose une épaisseur comprise entre 0,1 mm et 0,4 mm. La courbe de la figure 16 correspond, puisque E est fixé, à la fonction $f(e)$ déterminée à la question 35. Pour maximiser l'effort, il faut maximiser $F(t)$ donc le moment M_s . D'après la figure, il faut choisir une épaisseur d'environ 2 mm, ce qui est beaucoup trop élevé, la valeur de 0,4 mm étant alors pour ce critère la meilleure valeur possible acceptable. La seconde courbe donne $V(e)$ à moment fixé, soit $f(e)/e$. On demande d'utiliser la plus petite tension possible, c'est-à-dire plutôt 0,1 mm cette fois-ci. Finalement, le compromis se situe entre le choix d'un effort élevé et d'une faible alimentation, ce compromis conduisant à une valeur de l'épaisseur comprise entre 0,1 mm et 0,4 mm. Une valeur médiane, comme 0,3 mm par exemple, est donc sans doute une bonne solution.

39 L'ajout de masse nécessite un collage et un ajout de matière, donc un surcoût. L'opération de rabotage de la pièce est moins coûteuse. Cette seconde solution, toutefois, fragilise l'ensemble et le rend sans doute plus sensible aux vibrations. Les modes calculés auparavant sont influencés par ce rabotage, qu'il faut de ce fait minimiser en choisissant un méplat de faible largeur ℓ_p . Cette dernière raison incite donc plutôt à procéder par rabotage puisque la fragilité devrait finalement peu augmenter.

Toutefois, choisir un méplat peu large agit défavorablement sur $F(t)$ d'après la question 36. Par ailleurs, la contrainte de dimensions impose que ℓ_p soit petite devant R et ne dépasse pas 4 mm, l'influence de la longueur du méplat sur $F(t)$ est donc quasiment proportionnelle.

Il faut par conséquent un compromis, cette fois-ci entre la force désirée et l'influence du méplat sur le calcul des modes. Il y a trop peu d'informations sur la perturbation des modes pour conclure : par défaut le choix d'un méplat de 4 mm est donc le meilleur.

4 COMMANDE DU CONTRÔLE ACTIF

40 Dans le domaine de Laplace, l'équation différentielle se réécrit

$$(p^2 + 2\xi_0 \omega_0 p + \omega_0^2) A = KV$$

soit

$$H(p) = \frac{A(p)}{V(p)} = \frac{K}{p^2 + 2\xi_0 \omega_0 p + \omega_0^2}$$

De plus, $A_{cc}(p) = p^2 A(p)$, donc

$$\frac{A_{cc}(p)}{V(p)} = \frac{K p^2}{p^2 + 2\xi_0 \omega_0 p + \omega_0^2}$$

Le gain aux hautes fréquences est donc équivalent à K , or la lecture du graphique donne

$$20 \log \frac{A_{cc}(p)}{V(p)} \simeq 20 \log K = -3 \text{ dB}$$

soit

$$K = 0,7 \text{ m.s}^{-2}.\text{V}^{-1}$$

La résonance est fortement prononcée sur le diagramme de Bode (l'intersection des asymptotes s'effectue à 0 dB alors que la valeur maximale est de +30 dB!), on peut en conclure que le système est très peu amorti et par conséquent la pulsation de résonance est proche de la pulsation propre. On évalue

$$f_0 = 6,3 \text{ kHz} \quad \text{soit} \quad \omega_0 = 40.10^3 \text{ rad.s}^{-1}$$

L'amortissement est alors correctement approché par la relation $G_{\max} = K/2\xi_0$, ce qui conduit à

$$20 \log \left(\frac{K}{2\xi_0} \right) = 30 \text{ dB}$$

soit

$$\xi_0 = 0,011$$

| Comme dans presque tous les sujets de SI, les unités sont mentionnées de façon exotique...

La comparaison théorie-pratique de la figure 22 montre que les limites du modèle sont concentrées aux hautes fréquences (au-delà de 10 kHz environ), où tant la phase que le gain réels s'écartent notablement des courbes théoriques.

41 Calculons successivement

$$\begin{aligned} H_{bf}(p) &= \frac{A(p)}{V_c(p)} = \frac{H_s(p)V(p)}{V_c(p)} = \frac{H_s(p)[V_c(p) + A(p)H_f(p)]}{V_c(p)} \\ &= H_s(p) \left[1 + \frac{A(p)}{V_c(p)} H_f(p) \right] = H_s(p) [1 + H_{bf}(p) H_f(p)] \end{aligned}$$

Ainsi,

$$H_{bf}(p) [1 - H_s(p) H_f(p)] = H_s(p)$$

et enfin

$$H_{bf}(p) = \frac{H_s(p)}{1 - H_s(p) H_f(p)}$$

42 La stabilité dépend de la valeur des parties réelles des racines du dénominateur, ici $1 - H_s(p) H_f(p)$. Il faut donc étudier la quantité $H_s(p) H_f(p)$ par rapport à 1, point critique, et non (-1) comme traditionnellement lors de l'emploi d'un comparateur. Deux critères de stabilité peuvent alors être choisis :

- **en gain**, il faut que le gain en décibels de $H_s(p) H_f(p)$ lorsque la phase est de 180° soit inférieur à 0 dB ; l'écart constitue la « **marge de gain** » ;
- **en phase**, il faut que la phase de $H_s(p) H_f(p)$ lorsque le gain en décibels s'annule soit inférieure à 180° ; l'écart constitue la « **marge de phase** ».

Ici,

$$H_s(p) H_f(p) = K K_f \frac{\omega_f^2}{p^2 + 2\xi_f \omega_f p + \omega_f^2} \frac{p^2 + \omega_1^2}{p^2 + \omega_0^2}$$

Les premier et dernier termes sont des réels positifs, l'argument est donc de 180° si le terme central est lui aussi réel, ce qui n'est vrai que si $p = 0$, car c'est le seul moyen d'annuler la partie imaginaire. On a alors

$$H_s(0) H_f(0) = K K_f \left(\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2} \right) = g r_{zp}^2$$

La marge de gain est donc $M_g = 0 - 20 \log [H_s(0) H_f(0)]$ soit

$$M_g = 20 \log \left(\frac{1}{g r_{zp}^2} \right)$$

43 En utilisant l'expression de $H_{bf}(p)$ obtenue à la question 41 et en explicitant $H_s(p)$ et $H_f(p)$, on a

$$H_{bf}(p) = \frac{K(p^2 + \omega_1^2)}{p^2 + \omega_0^2 - g(p^2 + \omega_1^2)} \frac{\omega_f^2}{p^2 + 2\xi_f \omega_f p + \omega_f^2}$$

soit

$$H_{bf}(p) = \frac{K(p^2 + \omega_1^2)(p^2 + 2\xi_f \omega_f p + \omega_f^2)}{(p^2 + \omega_0^2)(p^2 + 2\xi_f \omega_f p + \omega_f^2) - g(p^2 + \omega_1^2)\omega_f^2}$$

Finalement,

$$N(p) = K(p^2 + \omega_1^2)(p^2 + 2\xi_f \omega_f p + \omega_f^2)$$

En développant le dénominateur, on peut écrire

$$D(p) = p^4 + 2\xi_f \omega_f p^3 + [\omega_0^2 + \omega_f^2 - g\omega_f^2] p^2 + 2\xi_f \omega_f \omega_0^2 p + \omega_0^2 \omega_f^2 - g\omega_1^2 \omega_f^2$$

et $D(p)$ est de la forme voulue avec

$$C_0 = \omega_f^2 (\omega_0^2 - g\omega_1^2) \quad C_1 = 2\omega_0^2 \xi_f \omega_f \quad C_2 = \omega_0^2 + \omega_f^2 (1 - g) \quad C_3 = 2\xi_f \omega_f$$

44 Considérons par exemple le polynôme $p^2 + 2\xi_{bf}\omega_{bf1} p + \omega_{bf1}^2$. Le discriminant de celui-ci vaut

$$\Delta = 4\xi_{bf}^2 \omega_{bf1}^2 - 4\omega_{bf1}^2 = 4\omega_{bf1}^2 (\xi_{bf}^2 - 1)$$

qui est négatif, puisque l'amortissement est supposé inférieur à 1. On a donc deux racines complexes conjuguées et si on ne retient que celle à partie imaginaire positive, il reste le pôle

$$p = -\xi_{bf} \omega_{bf1} + j \omega_{bf1} \sqrt{1 - \xi_{bf}^2}$$

Ainsi, dans le plan complexe, l'abscisse est $-\xi_{bf} \omega_{bf1}$ et l'ordonnée $\omega_{bf1} \sqrt{1 - \xi_{bf}^2}$. Par symétrie d'indice, le second pôle à partie imaginaire positive, obtenue avec l'autre polynôme de degré deux, a pour abscisse $-\xi_{bf} \omega_{bf2}$ et pour

ordonnée $\omega_{\text{bf}2} \sqrt{1 - \xi_{\text{bf}}^2}$. Les coordonnées ne diffèrent que par le facteur ω_{bf} , les points sont donc homothétiques, ce qui explique le dessin et justifie l'existence du coefficient $\alpha \geq 1$ tel que $\omega_{\text{bf}2} = \alpha \omega_{\text{bf}1}$.

L'énoncé autorise $\alpha = 1$, donc $\omega_{\text{bf}1} = \omega_{\text{bf}2}$, alors qu'il l'exclut quelques lignes plus haut. Il est toutefois fondamental plus loin que cette valeur soit possible.

45 On compare la fonction de transfert $H_{\text{bf}}(p)$ désirée et celle trouvée à la question 43. Le développement du dénominateur de la fonction voulue est de la forme

$$p^4 + C'_3 p^3 + C'_2 p^2 + C'_1 p + C'_0$$

avec

$$\begin{cases} C'_0 = \omega_{\text{bf}1}^2 \omega_{\text{bf}2}^2 = \alpha^2 \omega_{\text{bf}1}^4 \\ C'_1 = 2 \xi_{\text{bf}} [\omega_{\text{bf}1} \omega_{\text{bf}2}^2 + \omega_{\text{bf}2} \omega_{\text{bf}1}^2] = 2 \alpha (\alpha + 1) \xi_{\text{bf}} \omega_{\text{bf}1}^3 \\ C'_2 = \omega_{\text{bf}1}^2 + \omega_{\text{bf}2}^2 + 4 \xi_{\text{bf}} \omega_{\text{bf}1} \omega_{\text{bf}2} = \omega_{\text{bf}1}^2 (1 + \alpha^2 + 4 \alpha \xi_{\text{bf}}^2) \\ C'_3 = 2 \xi_{\text{bf}} (\omega_{\text{bf}1} + \omega_{\text{bf}2}) = 2 \xi_{\text{bf}} \omega_{\text{bf}1} (1 + \alpha) \end{cases}$$

Par identification, il faut donc $C_0 = C'_0$, $C_1 = C'_1$, $C_2 = C'_2$ et $C_3 = C'_3$. Or, on peut remarquer que

$$\frac{C_1}{C_3} = \omega_0^2 = \frac{C'_1}{C'_3} = \alpha \omega_{\text{bf}1}^2$$

soit

$$\boxed{\omega_{\text{bf}1} = \frac{\omega_0}{\sqrt{\alpha}}} \quad (\text{eq1})$$

Puis, par l'identification $C_3 = C'_3$,

$$\xi_f \omega_f = \xi_{\text{bf}} \omega_{\text{bf}1} (1 + \alpha) = \xi_{\text{bf}} (1 + \alpha) \frac{\omega_0}{\sqrt{\alpha}}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\frac{\xi_f \omega_f}{\omega_0} = \xi_{\text{bf}} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \sqrt{\alpha} \right)} \quad (\text{eq2})$$

En évaluant C_0 et C'_0 ,

$$C_0 = \omega_f^2 (\omega_0^2 - g \omega_1^2) = \omega_f^2 \omega_0^2 (1 - r_{\text{zp}}^2 g)$$

et, grâce à (eq1),

$$C'_0 = \omega_{\text{bf}1}^4 \alpha^2 = \frac{\omega_0^4}{\alpha^2} \alpha^2 = \omega_0^4$$

soit, avec $C_0 = C'_0$,

$$\boxed{\omega_f^2 (1 - r_{\text{zp}}^2 g) = \omega_0^2} \quad (\text{eq3})$$

Enfin, on utilise C_2 et C'_2 en notant que

$$\frac{C_2}{\omega_0^2} = 1 + \frac{\omega_f^2}{\omega_0^2} (1 - g) = \frac{C'_2}{\omega_0^2} = \underbrace{\frac{\omega_{\text{bf}1}^2}{\omega_0^2}}_{1/\alpha \text{ d'après (eq1)}} (1 + \alpha^2 + 4 \alpha \xi_{\text{bf}}^2) = \frac{1}{\alpha} + \alpha + 4 \xi_{\text{bf}}^2$$

ce qui donne

$$\boxed{1 + \frac{\omega_f^2}{\omega_0^2} (1 - g) = \frac{1}{\alpha} + \alpha + 4 \xi_{\text{bf}}^2} \quad (\text{eq4})$$

46 L'équation (eq2) donne immédiatement

$$\omega_f = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - g r_{zp}^2}} \quad (*)$$

Or, l'équation (eq4) montre de son côté que $4 \xi_{bf}^2 = 1 + \underbrace{\frac{\omega_f^2}{\omega_0^2} (1 - g)}_{=C^{te}} - \frac{1}{\alpha} - \alpha$

$$\xi_{bf} \text{ est maximal lorsque } \alpha + \frac{1}{\alpha} \text{ est minimal, ie lorsque } \alpha = 1.$$

L'équation (eq1) donne alors $\omega_{bf1} = \omega_0$, et (eq4) conduit à $\xi_{bf}^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{\omega_f}{\omega_0} \right)^2 (1 - g) - \frac{1}{4}$

soit
$$\xi_{bf} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\omega_f}{\omega_0} \right)^2 (1 - g) - 1}$$

Puisqu'on a aussi la relation (*), on obtient en tout
$$\xi_{bf} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1 - g}{1 - g r_{zp}^2} - 1}$$

Enfin, (eq2) permet d'écrire directement que
$$2 \xi_{bf} \frac{\omega_0}{\omega_f} = \xi_f$$

47 On connaît ω_0 , ω_1 et K , et on désire déterminer ω_f , K_f et ξ_f . On peut proposer le protocole suivant :

1. La connaissance de ω_0 et ω_1 donne $r_{zp} = \frac{\omega_1}{\omega_0}$.
2. On fixe une marge de gain. La question 42 permet de constater que cela fixe g . Ainsi,

$$K_f = \frac{g}{K}$$

3. D'après la question 46, on a alors successivement

$$\omega_f = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - g r_{zp}^2}} \quad \xi_{bf} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1 - g}{1 - g r_{zp}^2} - 1} \quad \xi_f = 2 \xi_{bf} \frac{\omega_0}{\omega_f}$$

48 Numériquement, en appliquant le protocole proposé à la question précédente, on trouve successivement les valeurs

$$r_{zp} = 1,813 \quad g = 0,13 \quad \omega_f = 2\pi 8800 \text{ rad.s}^{-1} = 55.10^3 \text{ rad.s}^{-1}$$

et

$$\frac{\omega_f}{\omega_0} = 1,33$$

Ainsi, on a $\xi_{bf} = 0,367$ ce qui conduit à

$$\xi_f = 0,55 \quad \text{et} \quad K_f = 0,19$$

On a bien obtenu ce que l'on désirait : l'amortissement est bien plus fort (0,55 pour 0,01 auparavant), et le suivi est de qualité. Le second mode qui « résonnait » à 25dB est atténué à 7dB environ, tandis que le mode suivant reste inchangé. On peut donc espérer utiliser une mise en cascade de correcteurs pour annuler chaque mode indépendamment et obtenir un amortissement des vibrations, ce qui conduit à limiter le bruit audible lors du fonctionnement de la MRV. Le cahier des charges proposé au début du sujet a bien été rempli.