

Auteurs : Jean-Baptiste Paire
Jean-Marc Vince

Horloge atomique

I – Ralentissement des atomes par laser

I.A.1) On écrit $p = \frac{h}{\lambda}$ ou $h = \lambda p$ ce qui donne l'unité SI de h : $\text{kg.m}^2.\text{s}^{-1}$ (ou J.s)

I.A.2) Le système est isolé, sa quantité de mouvement se conserve au cours de l'absorption

$$\vec{p}_{\text{avant}} + \frac{h}{\lambda} \vec{u} = \vec{p}_{\text{après}}$$

I.A.3) À chaque absorption d'un photon, la quantité de mouvement de l'atome augmente donc de $\frac{h}{\lambda} \vec{u}$ sans qu'il y ait de variation de la quantité de mouvement lors de la désexcitation au bout de τ . Au total pendant une durée $\delta t \gg \tau$, il y aura en moyenne $\frac{\delta t}{\tau}$ absorptions donc la variation totale de quantité de mouvement de l'atome sera :

$$\delta \vec{p} = \frac{h}{\lambda} \frac{\delta t}{\tau} \vec{u}$$

I.A.4) La force moyenne exercée par le laser sur l'atome s'obtient avec

$$\vec{F} = \frac{\delta \vec{p}}{\delta t} = \frac{h}{\lambda \tau} \vec{u}$$

I.A.5) En écrivant $\vec{F} = m \vec{a}$, on obtient $a = \frac{h}{\lambda \tau m} = \frac{h \mathcal{N}_A}{\lambda \tau M}$.

Cela donne une valeur numérique $a = 10^4 \text{ m.s}^{-2}$ soit $\frac{a}{g} = 10^3$, on pourra négliger l'accélération de la pesanteur dans la suite.

I.B.1) Pour un mouvement rectiligne uniformément accéléré, on obtient avec les conditions initiales données :

$$v(t) = v_0 - at \quad \text{et} \quad x(t) = -\frac{a}{2}t^2 + v_0 t$$

I.B.2) On cherche T tel que $v(T) = 0$ soit $T = \frac{v_0}{a}$ et alors $L = x(T) = \frac{v_0^2}{2a}$

I.B.3) On écrit, avec l'hypothèse du gaz parfait pour les atomes sortant du four (en notant T' la température) :

$$\frac{1}{2} m v^{*2} = \frac{3}{2} k_B T'$$

soit

$$v^* = \sqrt{\frac{3k_B T'}{m}} = \sqrt{\frac{3k_B \mathcal{N}_A T'}{M}}$$

AN : pour Rb : $v^* = 336 \text{ m.s}^{-1}$ et pour Cs : $v^* = 271 \text{ m.s}^{-1}$

I.B.4) Pour v_0 de l'ordre de 300 m.s^{-1} , et avec $a = 10^5 \text{ m.s}^{-2}$, on trouve $T = 3.10^{-3} \text{ s}$ et $L = 0,5 \text{ m}$.

I.C.1)

On écrit la loi de composition : $x = x' + vt$ ou $x' = x - vt$.

I.C.2) $\phi = \omega t + kx = 2\pi\left(ft + \frac{x}{\lambda}\right)$

I.C.3) On écrit l'invariance de ϕ par changement de référentiel ce qui donne pour tout couple (x, t) :

$$\phi = 2\pi\left(ft + \frac{x}{\lambda}\right) = 2\pi\left(f't' + \frac{x'}{\lambda'}\right)$$

soit en utilisant la loi du I.C.1)

$$ft + \frac{x}{\lambda} = f't + \frac{x}{\lambda'} - \frac{v}{\lambda'}t \quad \forall (x, t)$$

ce qui donne

$$\lambda' = \lambda \quad \text{et} \quad f = f' - \frac{v}{\lambda'}$$

I.C.4) Si $v > 0$, alors $f' > f$ et $T' < T$ ce qui était prévisible car $\mathcal{R}'$ se rapproche de la source au cours de son mouvement donc la période des ondes reçues est plus faible que celle des ondes émises.

I.C.5) La vitesse de propagation de l'onde est $-c\vec{e}_x$ dans $\mathcal{R}$, alors dans le cadre de la relativité galiléenne elle vaut $-(c+v)\vec{e}_x$ dans $\mathcal{R}'$. Ainsi on peut écrire les deux relations entre longueur d'onde, fréquence et vitesse de propagation dans les deux référentiels :

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad \text{et} \quad \lambda' = \frac{c+v}{f'}$$

En utilisant la relation $\lambda = \lambda'$ établie au I.C.3), on en déduit

$$f = \frac{c}{c+v}f' = \frac{1}{1+\frac{v}{c}}f'$$

C'est le décalage de fréquence de l'effet Doppler.

I.C.6) En effectuant un développement limité à l'ordre 1 en $\frac{v}{c}$ de $(1 - \frac{v}{c})^{1/2}$ et de $(1 + \frac{v}{c})^{1/2}$, on obtient avec la formule proposée :

$$f = f'\left(1 - \frac{1}{2}\frac{v}{c} + o\left(\frac{v}{c}\right)\right)\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v}{c} + o\left(\frac{v}{c}\right)\right)$$

soit encore

$$f \simeq f'\left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

ou encore

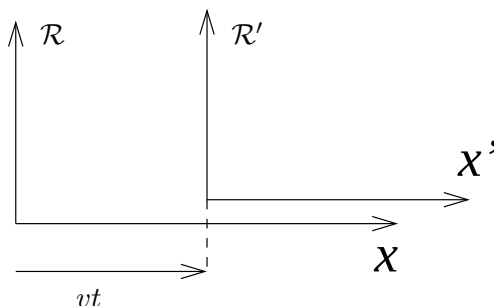
$$f \simeq f' \frac{1}{1 + \frac{v}{c}}$$

qui est bien le résultat de la question précédente.

I.D.1) On a donc pour $v \ll c$, $f \simeq f'(1 - \frac{v}{c})$ avec $f' = f_0$ et $v = v_0 - at$ c'est à dire $v = v_0(1 - \frac{t}{T})$ d'après I.B.1). L'application de la relation précédente entre f et f' donne alors bien

$$f(t) = f_0 + f_0 \frac{v_0}{c} \left(\frac{t}{T} - 1\right)$$

I.D.2) Si $f(t)$ varie plus rapidement, les photons ne vont alors pas être absorbés car alors $f' \neq f_0$ dès que $t \neq 0$. Le ralentissement sera moins efficace mais quand même possible à cause de l'élargissement du spectre dû à la température non nulle. Le même phénomène se passera si $f(t)$ varie moins rapidement que ce qui est



prévu par la loi établie ici.

I.D.3) On écrit $\Delta f = f_{\max} - f_{\min} = f(T) - f(0) = f_0 \frac{v_0}{c}$ soit

$$\boxed{\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{v_0}{c} = 10^{-6}}$$

De plus $f = \frac{c}{\lambda}$, donc au voisinage de $\lambda = \lambda_0$, $\Delta f = -\frac{c}{\lambda_0^2} \Delta \lambda$. Ce qui donne

$$\frac{\Delta f}{f_0} = -\frac{\Delta \lambda}{\lambda_0}$$

donc en valeur absolue

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} = 10^{-6}$$

I.D.4) La longueur d'onde indiquée se situe dans l'infrarouge proche. Les valeurs numériques obtenues sont les suivantes :

$$\underline{f_0 = \frac{c}{\lambda_0} = 3,85 \cdot 10^{14} \text{ Hz}} \quad ; \quad \underline{\Delta f = 3,85 \cdot 10^8 \text{ Hz}} \quad ; \quad \underline{E_0 = hf_0 = 2,55 \cdot 10^{-9} \text{ J} = 1,59 \text{ eV}}$$

I.D.5) On définit le facteur de qualité par $Q = \frac{f_0}{\delta f}$ ce qui donne $\underline{Q = 6,5 \cdot 10^7}$ valeur très élevée. On en déduit de même, à l'aide de la question I.D.3),

$$\boxed{\delta \lambda = \frac{\lambda_0}{Q} = 10^{-14} \text{ m}}$$

II – Les alcalins

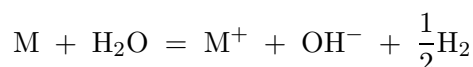
II.A.1) Le lithium Li et le sodium Na

II.A.2) Dans les conditions standard, H n'est pas un métal et se trouve sous forme gazeuse H_2 .

II.A.3) La première ionisation est aisée car les alcalins possèdent 1 seul électron sur leur couche externe, en le perdant ils acquièrent la structure du gaz rare le plus proche. Pour la deuxième ionisation, celle-ci éloigne de la structure de gaz rare, elle est donc plus difficile à réaliser et nécessite plus d'énergie.

II.A.4) Comme on vient de le voir, l'ion le plus stable est l'ion M^+ . Les alcalins vont alors former des liaisons ioniques dans les cristaux et des liaisons donneur-accepteur puisque c'est aussi un acide au sens de Lewis.

II.A.5) La réaction d'oxydo-réduction dont il est question ici est :



II.B.1)

La coordination de la structure cubique centrée vaut 8.

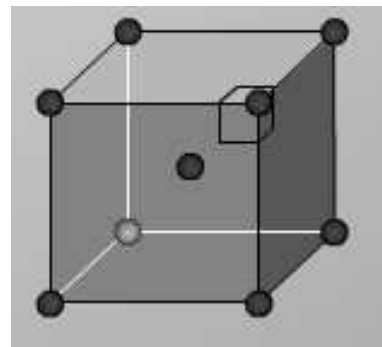
Le contact entre deux atomes s'effectue sur la grande diagonale du cube d'arête a : $4r = a\sqrt{3}$. La compacité est le rapport du volume occupé par les atomes d'une maille (ici 2 atomes = $1 + 8 \cdot \frac{1}{8}$) sur le volume de la maille.

$$C = \frac{2 \cdot \frac{4\pi}{3} r^3}{a^3} = \frac{\pi \sqrt{3}}{8} = 0,68$$

C n'est pas maximale, on trouve une compacité plus élevée en structure hexagonale compacte ou cubique face centrée.

II.B.2) On calcule la masse volumique du césium :

$$\mu_{\text{Cs}} = \frac{2 \frac{M_{\text{Cs}}}{N_A}}{a_{\text{Cs}}^3}$$



soit

$$a_{\text{Cs}} = \left(\frac{2M_{\text{Cs}}}{\mu_{\text{Cs}} \mathcal{N}_{\text{A}}} \right)^{1/3}$$

d'où

$$r_{\text{Cs}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{2M_{\text{Cs}}}{\mu_{\text{Cs}} \mathcal{N}_{\text{A}}} \right)^{1/3}$$

On trouve alors

$$a_{\text{Cs}} = 618 \text{ pm} \quad \text{et} \quad r_{\text{Cs}} = 268 \text{ pm}$$

II.B.3) Pour le rubidium, on trouve $r_{\text{Rb}} = 248 \text{ pm}$ soit une valeur inférieure à celle du césium ce qui est cohérent avec la position relative des éléments dans le tableau périodique dans la même colonne, le rubidium étant au dessus du césium.

II.C.1) Par définition de l'activité : $\mu_s = \mu_s^o + RT \ln a_s$. À l'équilibre entre les deux phases $\mu_{s_{\text{aq}}} = \mu_{s_{\text{org}}}$. Cela donne alors

$$\mu_{s_{\text{aq}}}^o + RT \ln a_{s_{\text{aq}}} = \mu_{s_{\text{org}}}^o + RT \ln a_{s_{\text{org}}}$$

Or $K_{\text{ex}} = \frac{a_{s_{\text{org}}}}{a_{s_{\text{aq}}}}$ d'où

$$K_{\text{ex}} = \exp \left(\frac{\mu_{s_{\text{aq}}}^o - \mu_{s_{\text{org}}}^o}{RT} \right)$$

II.C.2) N = nombre de mole de S en phase organique et $\alpha N = N_0 - N$ = nombre de moles S en phase aqueuse. Alors en assimilant les activités aux concentrations

$$K_{\text{ex}} = \frac{N/V_{\text{org}}}{\alpha N/V_{\text{aq}}} = \frac{V_{\text{aq}}}{\alpha V_{\text{org}}}$$

d'où

$$\alpha = \frac{V_{\text{aq}}}{K_{\text{ex}} V_{\text{org}}}$$

AN : On veut $\frac{N}{N_0} = \frac{1}{1 + \alpha} = 0,99$ soit $\alpha = 0,0101$ et donc

$$\frac{V_{\text{org}}}{V_{\text{aq}}} = \frac{1}{\alpha K_{\text{ex}}} = 9,9 \cdot 10^6$$

Il faut donc énormément de solvant organique.

II.C.3) Le thiocyanate alcalin extrait dans la phase organique se trouve sous forme $M(\text{SCN})_{\text{org}}$ et $L_n M(\text{SCN})_{\text{org}}$. En notant toujours N le nombre de mole de $M(\text{SCN})_{\text{org}}$, on a par conservation du thiocyanate en phase organique

$$\frac{N'}{V_{\text{org}}} = \frac{N}{V_{\text{org}}} + [L_n M(\text{SCN})_{\text{org}}]$$

or

$$K_f = \frac{[L_n M(\text{SCN})_{\text{org}}]}{[L_{\text{org}}]^n [M(\text{SCN})_{\text{org}}]}$$

donc

$$\frac{N'}{V_{\text{org}}} = \frac{N}{V_{\text{org}}} (1 + K_f [L_{\text{org}}]^n)$$

soit $N' = N(1 + K_f [L_{\text{org}}]^n)$ avec toujours $N = \frac{N_0}{1 + \alpha}$ d'où

$$N' = N_0 \frac{(1 + K_f [L_{\text{org}}]^n)}{1 + \alpha}$$

En reprenant la définition de la constante d'extraction, on aura alors ici une nouvelle expression de cette constante rapport des concentrations du thiocyanate en phase organique sur le thiocyanate en phase aqueuse :

$$K'_{\text{ex}} = \frac{N'/V_{\text{org}}}{(N_0 - N')/V_{\text{aq}}} = \frac{N'}{N_0 - N'} \frac{V_{\text{aq}}}{V_{\text{org}}}$$

alors que dans les mêmes conditions

$$K_{\text{ex}} = \frac{N/V_{\text{org}}}{(N_0 - N')/V_{\text{aq}}} = \frac{N}{N_0 - N'} \frac{V_{\text{aq}}}{V_{\text{org}}}$$

La relation $N' = N(1 + K_f[L_{\text{org}}]^n)$ permet alors d'écrire

$$\boxed{K'_{\text{ex}} = K_{\text{ex}}(1 + K_f[L_{\text{org}}]^n)}$$

On veut alors, pour des volumes égaux, $N' = 99(N_0 - N')$ donc $K'_{\text{ex}} = 99$ ce qui donne avec $n = 1$ $\boxed{[L_{\text{org}}] = 3,13 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}}$ qui est une valeur raisonnable.

II.D.1) Si on note N' le nombre total de mole de Rb(SCN) passées en phase organique dans le volume V , il en reste $N_0 - N'$ (avec $N_0 = c_0 V$) dans la phase aqueuse. Avec la définition de K'_{ex} utilisée pour le même volume de la phase aqueuse et de la phase organique ($K'_{\text{ex}} = \frac{N'}{N_0 - N'}$), on aura alors

$$\frac{N'}{V} \left(1 + \frac{1}{K'_{\text{ex}}}\right) = c_0$$

Donc $\frac{N'}{V} = \frac{c_0}{(1 + \frac{1}{K'_{\text{ex}}})}$ or $\frac{N'}{V} = [\text{Rb(SCN)}]_{\text{org}} + [L_n \text{Rb(SCN)}]_{\text{org}}$ avec au maximum $[L_n \text{Rb(SCN)}]_{\text{org}} = \frac{c_{L_0}}{n}$ si

tout le ligand complexe. Donc si $c_{L_0} \ll c_0$ comme l'indique le texte et en considérant que $(1 + \frac{1}{K'_{\text{ex}}})$ est de l'ordre de 1 pour une constante d'extraction K'_{ex} significative (ce qu'on recherche ici), on peut écrire

$$[\text{Rb(SCN)}]_{\text{org}} \simeq \frac{c_0}{(1 + \frac{1}{K'_{\text{ex}}})}$$

qui est bien indépendante de c_{L_0} .

II.D.2) La concentration $[\text{Rb(SCN)}]_{\text{org}}$ est donc constante dans le volume V , donc

$$K_f = \frac{[L_n \text{M(SCN)}]_{\text{org}}}{[L_{\text{org}}]^n [\text{M(SCN)}]_{\text{org}}} = \frac{x}{\text{cte} \cdot [L_{\text{org}}]^n}$$

Or $[L_{\text{org}}] = (c_{L_0} - nx)$ car il faut n moles de ligand pour former une mole de complexe. Ainsi

$$x = K_f \times \text{cte} \times (c_{L_0} - nx)^n$$

soit

$$\boxed{\log x = \text{Cte} + n \log(c_{L_0} - nx)}$$

II.D.3) On trace alors $\log x$ en fonction de $\log(c_{L_0} - x)$ et on vérifie bien qu'on obtient une droite de pente 1 avec 4 points.

II.E.1) La loi de Fick s'écrit ici : $\boxed{\vec{j} = -D \overrightarrow{\text{grad}} C}$ avec C la concentration.

D s'exprime en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ et $\|\vec{j}\|$ en $\text{mol} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$.

D dépend de la nature de solvant pour un soluté donné.

II.E.2) Par conservation de la matière (pour SCN), on écrit

$$\vec{j}_{\text{M(SCN)}_i} = \vec{j}_{\text{LM(SCN)}_i} \quad \text{pour } i = 1, 2$$

En écrivant de même qu'il n'y a pas d'accumulation de L aux interfaces :

$$\vec{j}_{\text{L}_i} + \vec{j}_{\text{M(SCN)}_i} = \vec{0} \quad \text{pour } i = 1, 2$$

II.E.3) On écrit $\vec{j}_{\text{LM(SCN)}_1} = -D \overrightarrow{\text{grad}} [\text{M}_{\text{org}}]_{\text{interface}}$ avec $\overrightarrow{\text{grad}} [\text{M}_{\text{org}}]_{\text{interface}} = \frac{c(\delta) - c(0)}{\delta} \vec{e}_x$.

On a alors $D' = \frac{D}{\delta}$. La présence du signe - indique que la diffusion de la matière s'effectue des zones les plus concentrées vers les zones moins concentrées.

II.E.4) On écrit la conservation de l'espèce métal M dans la phase I :

$$\frac{dn_I}{dt} = -\vec{j}_{\text{M(SCN)}_1} \cdot \Sigma \vec{e}_x \quad \text{avec } n_I = [\text{M}_I] V_{\text{aq}}$$

soit

$$V_{\text{aq}} \frac{d[\text{M}_I]}{dt} = D'(c(\delta) - c(0)) \Sigma \quad \text{avec } c(0) = c_1 \quad \text{et } c(\delta) = [\text{M}_{\text{org}}]$$

d'où la relation

$$\frac{d[\text{M}_I]}{dt} = -\frac{D'}{V_{\text{aq}}} \Sigma (c_1 - [\text{M}_{\text{org}}])$$

qui est celle proposée avec $k = \frac{D'}{V_{\text{aq}}} \Sigma$

De même pour $\text{LM(SCN)}_{\text{org}}$ dans la phase organique :

$$V_{\text{org}} \frac{d[\text{M}_{\text{org}}]}{dt} = (\vec{j}_{\text{M(SCN)}_1} - \vec{j}_{\text{M(SCN)}_2}) \cdot \Sigma \vec{e}_x$$

avec $\vec{j}_{\text{M(SCN)}_1} = -D'([\text{M}_{\text{org}}] - c_1) \vec{e}_x$ et $\vec{j}_{\text{M(SCN)}_2} = -D'(c(0) - c(-\delta)) \vec{e}_x$. Or $c(0) = 0$ et $c(-\delta) = [\text{M}_{\text{org}}]$ pour l'interface 2, on obtient alors $\vec{j}_{\text{M(SCN)}_2} = D'[\text{M}_{\text{org}}] \vec{e}_x$ ce qui donne pour l'équation de conservation

$$\frac{d[\text{M}_{\text{org}}]}{dt} = \frac{D' \Sigma}{V_{\text{org}}} (c_1 - 2[\text{M}_{\text{org}}])$$

qui est celle proposée avec $k' = \frac{D'}{V_{\text{org}}} \Sigma$

Et en raisonnant de la même manière pour l'espèce métal M dans la phase II avec cette fois $c(0) = 0$, on trouve

$$\frac{d[\text{M}_{\text{II}}]}{dt} = k[\text{M}_{\text{org}}]$$

Les équations obtenues montrent que k et k' ont la dimension de l'inverse d'un temps.

Pour obtenir l'équation vérifiée par $[\text{L}_{\text{org}}]$, on écrit de même sa conservation

$$V_{\text{org}} \frac{d[\text{L}_{\text{org}}]}{dt} = (\vec{j}_{\text{L}_2} - \vec{j}_{\text{L}_1}) \Sigma \vec{e}_x$$

ce qui donne avec les relations obtenues au II.E.2)

$$V_{\text{org}} \frac{d[\text{L}_{\text{org}}]}{dt} = (-\vec{j}_{\text{LM(SCN)}_2} + \vec{j}_{\text{LM(SCN)}_1}) \Sigma \vec{e}_x$$

de qui permet d'écrire avec les expressions des vecteurs $\vec{j}_{\text{LM(SCN)}_1}$ et $\vec{j}_{\text{IM(SCN)}_2}$ déjà obtenues

$$\boxed{\frac{d[\text{L}_{\text{org}}]}{dt} = -k'(c_1 - 2[\text{M}_{\text{org}}])}$$

On remarque que $\frac{d[\text{L}_{\text{org}}]}{dt} = -\frac{d[\text{M}_{\text{org}}]}{dt}$ ce qui était prévisible car une mole de M_{org} apparaît pour une mole de L_{org} qui disparaît.

II.E.5) On résout l'équation (II.3) en utilisant qu'à l'instant $t = 0$, $[\text{M}_{\text{org}}](0) = 0$, ce qui donne

$$\boxed{[\text{M}_{\text{org}}] = \frac{c_1}{2}(1 - e^{-2k't})}$$

de même pour l'équation (II.4) qui devient alors

$$\frac{d[\text{M}_{\text{II}}]}{dt} = k\frac{c_1}{2} - k\frac{c_1}{2}e^{-2k't}$$

soit en tenant compte de $[\text{M}_{\text{II}}](0) = 0$

$$\boxed{[\text{M}_{\text{II}}] = \frac{k}{k'}\frac{c_1}{4}(1 - e^{-2k't}) + \frac{kc_1}{2}t}$$

II.E.6) La courbe (b) représente donc $[\text{M}_{\text{II}}]$ (valeur nulle et pente nulle à l'origine), la courbe (a) représente $[\text{M}_{\text{org}}]$ (valeur nulle et pente non nulle à l'origine) et la courbe (c) représente $[\text{L}_{\text{org}}]$ car sa valeur est non nulle à l'origine et on a vu que $[\text{M}_{\text{org}}] + [\text{L}_{\text{org}}] = \text{cte}$.

II.E.7) Avec les calculs précédents on obtient la vitesse de transfert $v = \frac{kc_1}{2}$, pour les valeurs numériques

$$\boxed{v_{\text{Rb}} = 2,86 \cdot 10^{-9} \text{ mol.L}^{-1}.\text{s}^{-1} \quad \text{et} \quad v_{\text{Cs}} = 6,92 \cdot 10^{-9} \text{ mol.L}^{-1}.\text{s}^{-1}}$$

II.E.8) Au bout d'un temps très long tous les vecteurs densité de courant s'annulent, on a alors égalité des quantités de matière dans les deux phases aqueuses de même volume. La conservation de matière (écrite ici pour le rubidium) donne alors

$$2[\text{Rb}_{\text{II}}]V_{\text{aq}} + [\text{Rb}_{\text{org}}]_t V_{\text{org}} = c_0 V_{\text{aq}}$$

où $[\text{Rb}_{\text{org}}]_t$ représente la concentration totale en rubidium, sous forme complexée ou non, en phase organique. Le texte nous indique que $[\text{Rb(SCN)}_{\text{org}}] \simeq 0$ si bien que $[\text{Rb}_{\text{org}}]_t \simeq [\text{LRb(SCN)}_{\text{org}}]$ qui vaut au maximum $c_{\text{L}_0} \ll c_0$. Avec ici V_{aq} du même ordre que V_{org} , l'équation de conservation se simplifie en

$$2[\text{Rb}_{\text{II}}]V_{\text{aq}} \simeq c_0 V_{\text{aq}}$$

Soit

$$\boxed{[\text{Rb}_{\text{II}}] \simeq \frac{c_0}{2}}$$

et de même pour $[\text{Cs}_{\text{II}}]$.

II.E.9) La vitesse de transfert du césium étant supérieure à celle du rubidium, on enrichit donc la phase I en rubidium mais sa concentration absolue y diminue. Si on souhaite garder un contrôle cinétique de cet enrichissement relatif on peut considérer que la diminution maximum acceptable de la concentration en rubidium doit être de l'ordre de 10 %, soit $T = 0,1 \frac{c_0}{v} \simeq 3 \cdot 10^6 \text{ s} \simeq 1000 \text{ h} !!!$.

III – Principe de l'horloge atomique à césium

III.A.1) Dans le référentiel galiléen lié au support du ressort, le principe fondamental de la dynamique appliqué à la masse m projeté sur l'axe Ox donne pour $\tau > t > 0$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx + m\omega_1^2 A_0 \cos(\omega_1 t)$$

soit

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \delta\omega^2 x = \omega_1^2 A_0 \cos(\omega_1 t)$$

On cherche une solution particulière de la forme $\alpha \cos(\omega_1 t + \varphi)$ et on constate que la solution $\frac{\omega_1^2}{\delta\omega^2 - \omega_1^2} \cos(\omega_1 t)$ convient. Avec les conditions initiales $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 0$, on obtient

$$x(t) = \frac{\omega_1^2 A_0}{\delta\omega^2 - \omega_1^2} \left(\cos(\omega_1 t) - \cos(\delta\omega t) \right) \quad \text{pour } \tau > t > 0$$

qu'on peut encore écrire en remarquant que $\delta\omega^2 \ll \omega_1^2$

$$x(t) = -A_0 \left(\cos(\omega_1 t) - \cos(\delta\omega t) \right) \quad \text{pour } \tau > t > 0$$

Pour $t > \tau$, l'équation du mouvement est $\frac{d^2x}{dt^2} + \delta\omega^2 x = 0$ qui donne une solution

$$x(t) = \alpha' \cos(\delta\omega t) + \beta' \sin(\delta\omega t)$$

En écrivant la continuité de $x(t)$ et de $\dot{x}(t)$ en $t = \tau$ on obtient, en notant que $\omega_1 \tau = \pi$

$$-A_0 \left(-1 - \cos(\delta\omega \tau) \right) = \alpha' \cos(\delta\omega \tau) + \beta' \sin(\delta\omega \tau)$$

et

$$-A_0 \sin(\delta\omega \tau) = \delta\omega \left(-\alpha' \sin(\delta\omega \tau) + \beta' \cos(\delta\omega \tau) \right)$$

le texte spécifie que $\delta\omega \tau \ll 1$ si bien qu'en prenant $\sin(\delta\omega \tau) \simeq 0$ et $\cos(\delta\omega \tau) \simeq 1$, on obtient après calcul :

$$\alpha' \simeq 2A_0 \quad \text{et} \quad \beta' \simeq 0$$

ce qui donne bien

$$x(t) \simeq 2A_0 \cos(\delta\omega t) \quad \text{pour } t > \tau$$

III.A.2) Le texte semble attendre une réponse rapide en superposant les deux solutions approchées et en effectuant un changement de variable $t' = t - T - \tau$, cependant se pose alors le problème des conditions initiales qui ne sont pas les mêmes en $t = 0$ et $t' = 0$ ce qui ne permet pas d'affirmer que la réponse pour de $t' > 0$ sera de la même forme $x_1(t')$. En toute rigueur il faut reprendre l'étude complète.

On applique alors de même le principe fondamental de la dynamique à la masse m pour $T + 2\tau > t > T + \tau$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \delta\omega^2 x = \omega_1^2 A_0 \cos \left(\omega_1 (t - T - \tau) \right)$$

ce qui donne, avec la solution particulière déjà évoquée au III.A.1)

$$x(t) = \alpha'' \cos(\delta\omega t) + \beta'' \sin(\delta\omega t) + \frac{A_0 \omega_1^2}{\delta\omega^2 - \omega_1^2} \cos \left(\omega_1 (t - T - \tau) \right)$$

On utilise alors la continuité de $x(t)$ en $T + \tau$ ce qui donne toujours en négligeant $\delta\omega^2$ devant ω_1^2 et $\delta\omega \tau$ devant 1 :

$$x_1(T + \tau) \simeq 2A_0 \cos \left(\delta\omega (T + \tau) \right) = \alpha'' \cos \left(\delta\omega (T + \tau) \right) + \beta'' \sin \left(\delta\omega (T + \tau) \right) - A_0$$

et

$$\dot{x}_1(T + \tau) \simeq -2A_0\delta\omega \sin(\delta\omega(T + \tau)) = -\delta\omega\alpha'' \sin(\delta\omega(T + \tau)) + \delta\omega\beta'' \cos(\delta\omega(T + \tau))$$

Après calculs un peu longs et fastidieux car il faut passer par les sommes de $\cos^2 + \sin^2$ pour isoler α'' d'une part et β'' d'autre part, on obtient :

$$\alpha'' = 2A_0 + A_0 \cos(\delta\omega(T + \tau)) \quad \text{et} \quad \beta'' = A_0 \sin(\delta\omega(T + \tau))$$

ce qui permet d'écrire

$$x(t) \simeq \left[2A_0 + A_0 \cos(\delta\omega(T + \tau)) \right] \cos(\delta\omega t) + A_0 \sin(\delta\omega(T + \tau)) \sin(\delta\omega t) - A_0 \cos(\omega_1(t - T - \tau))$$

en remarquant que

$$\cos(\delta\omega(T + \tau)) \cos(\delta\omega t) + \sin(\delta\omega(T + \tau)) \sin(\delta\omega t) = \cos(\delta\omega(t - T - \tau))$$

on obtient donc pour $T + 2\tau > t > T + \tau$:

$$x(t) \simeq 2A_0 \cos(\delta\omega t) + A_0 \left[\cos(\delta\omega(t - T - \tau)) - \cos(\omega_1(t - T - \tau)) \right]$$

le premier terme $2A_0 \cos(\delta\omega t)$ correspond bien à $x_1(t)$ pour $t > \tau$ et le second correspond bien à la solution $x(t - T - \tau)$ pour $\tau > t - T - \tau > 0$ comme indiqué au II.A.1). Pour $t - T - \tau > \tau$, on pourra alors de même écrire

$$x_2(t) \simeq x_1(t) + x_1(t - T - \tau)$$

Alors pour $t > T + 2\tau$, $x_2(t) = 2A_0 \cos(\delta\omega t) + 2A_0 \cos(\delta\omega(t - T - \tau))$ ce qui donne

$$x_2(t) = 4A_0 \cos\left(\frac{\delta\omega(T + \tau)}{2}\right) \cos\left[\delta\omega t - \frac{\delta\omega}{2}(T + \tau)\right]$$

En tenant compte de $\delta\omega\tau \ll 1$, on obtient alors

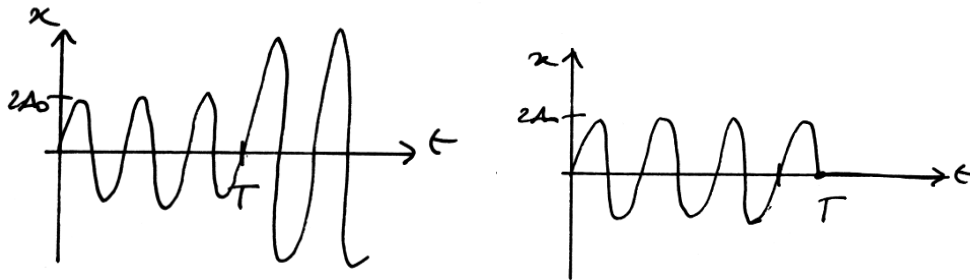
$$x_2(t) = 4A_0 \cos\left(\frac{\delta\omega T}{2}\right) \cos\left[\delta\omega t - \frac{\delta\omega}{2}(T + \tau)\right]$$

ce qui donne une amplitude

$$x_{\max} = 4A_0 \left| \cos\left(\frac{\delta\omega T}{2}\right) \right|$$

III.A.3) Pour $\tau < t < T + \tau$, le mouvement (décrit par $x_1(t)$) est oscillant à la pulsation $\delta\omega$ et d'amplitude $2A_0$. À partir de $T + 2\tau$ il devient d'amplitude $x_{\max}$ toujours à la pulsation $\delta\omega$.

Ainsi si $\delta\omega T = 2\pi n$ alors $x_{\max} = 4A_0$ et on obtient l'allure de la figure de gauche allure alors que si $\delta\omega T = 2\pi n + \pi$ alors $x_{\max} = 0$ et on obtient l'allure de la figure de droite :



Le terme en $\delta\omega T$ fait penser à un terme de visibilité parfois observable en interférométrie.

III.A.4) On écrit l'énergie $\mathcal{E} = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$. En utilisant la relation $m\delta\omega^2 = k$ on obtient

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}kx_{\max}^2 = 8kA_0^2 \cos^2\left(\frac{\delta\omega T}{2}\right)$$

Deux minima successifs sont alors observés quand l'écart $\delta\omega$ est tel que $\frac{\delta\omega T}{2} = \pi$ ce qui donne

$$\delta f = \frac{1}{T}$$

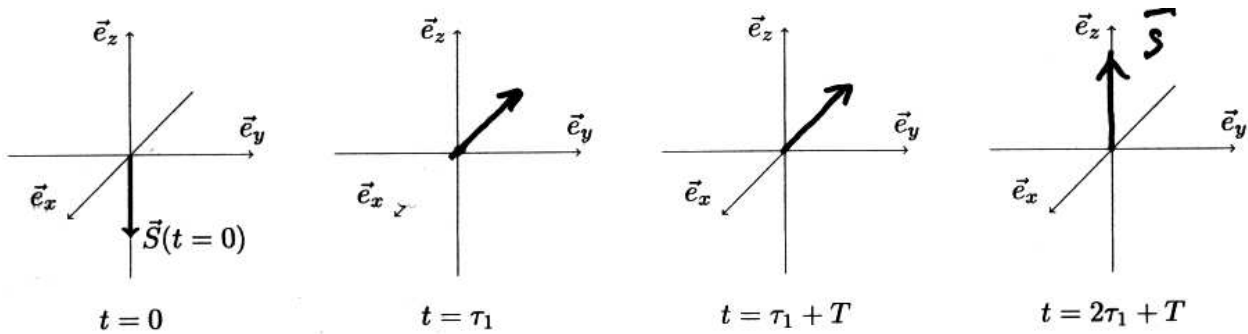
III.B.1) On a $\vec{S} \cdot \frac{d\vec{S}}{dt} = 0$ car $\vec{\omega} \wedge \vec{S}$ est toujours orthogonal à $\vec{S}$ ainsi $\frac{d\|\vec{S}\|^2}{dt} = 0$ donc $\|\vec{S}\| = \varepsilon_0 = \text{cte}$.
 De plus $\frac{d(\vec{S} \cdot \vec{\omega})}{dt} = \vec{\omega} \cdot \frac{d\vec{S}}{dt}$ si $\vec{\omega} = \text{cte}$ et de même $\vec{\omega}$ est toujours orthogonal à $\frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{S}$ donc on en déduit $\frac{d(\vec{S} \cdot \vec{\omega})}{dt} = 0$ d'où

$$\vec{S} \cdot \vec{\omega} = \text{cte}$$

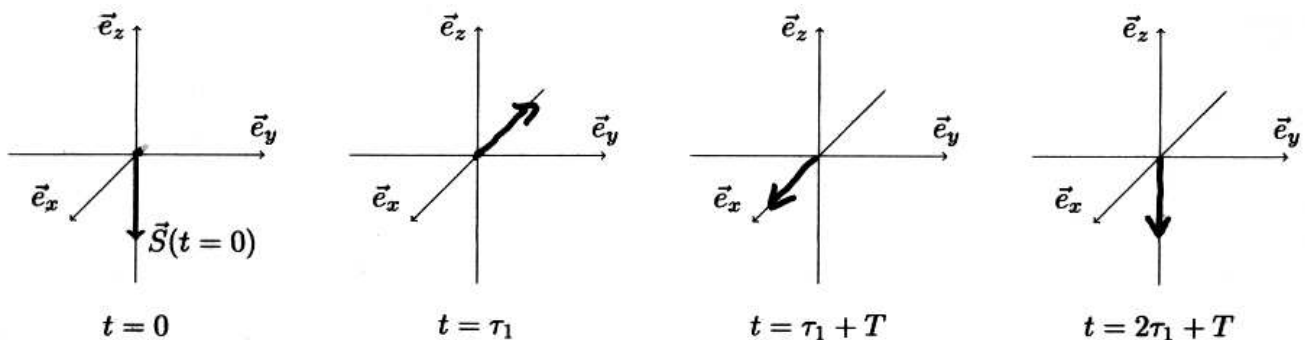
Le vecteur $\vec{S}(t)$ tourne autour d'un axe portant le vecteur $\vec{\omega}$, on reconnaît un mouvement de précession.

III.B.2) Si $\omega_1 \tau_1 = \frac{\pi}{2}$:

- de $t = 0$ à $t = \tau_1$, le vecteur $\vec{S}$ tourne de $\frac{\pi}{2}$ autour de $\vec{e}_y$;
- de $t = \tau_1$ à $t = \tau_1 + T$, le vecteur $\vec{S}$ tourne de $2n\pi$ autour de $\vec{e}_y$;
- de $t = \tau_1 + T$ à $t = 2\tau_1 + T$, le vecteur $\vec{S}$ tourne de $\frac{\pi}{2}$ autour de $\vec{e}_y$;



Au cours de cette transformation la norme de $\vec{S}$ ne varie pas mais ce vecteur est en sortie colinéaire et de même sens que $\vec{e}_z$ de telle sorte que $\mathcal{E}' = \varepsilon_0$.
 Si $\delta\omega = 2n\pi + \pi$, alors de même on obtient :



et alors cette fois $\mathcal{E}' = -\varepsilon_0$.

III.B.3) Si $\delta\omega T$ est quelconque, entre τ_1 et $\tau_1 + T$, la rotation de $\vec{S}$ de l'angle $\delta\omega T$ autour de $\vec{e}_z$ permet d'écrire

$$\vec{S}(\tau_1 + T) = -\varepsilon_0 \left(\cos(\delta\omega T) \vec{e}_x + \sin(\delta\omega T) \vec{e}_y \right)$$

puis, entre $\tau_1 + T$ et $2\tau_1 + T$, la rotation de $\frac{\pi}{2}$ autour de $\vec{e}_y$ permet d'obtenir $\vec{S}$ en sortie

$$\vec{S}(2\tau_1 + T) = \varepsilon_0 \left(\cos(\delta\omega T) \vec{e}_z - \sin(\delta\omega T) \vec{e}_y \right)$$

d'où l'énergie en sortie

$$\mathcal{E}(\delta\omega T) = \varepsilon_0 \cos(\delta\omega T)$$

III.B.4) Entre deux minima $\delta\omega T$ varie de 2π , donc $\delta f T$ varie de 1 soit

$$\Delta f = \frac{1}{T}$$

III.B.5) Ici $T = \frac{d}{v_0}$ d'où $\Delta f = \frac{v_0}{d}$ et en valeur absolue $\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta\tau}{\tau}$ puisque $\tau = 1/f$. On a donc

$$\frac{\Delta\tau}{\tau} = \frac{1}{T f_0} = \frac{v_0}{d f_0} = 2,2 \cdot 10^{-8}$$

de qui donne

$$\frac{\Delta\tau}{\tau} = 0,70 \text{ sec.an}^{-1}$$

On pourrait améliorer cette horloge en augmentant le temps de vol T .

III.C.1) En appliquant le principe fondamental de la dynamique à un atome dans son mouvement vertical on obtient $v = v_0 - gt$ ce qui donne l'instant $t' = \frac{v_0}{g}$ où la particule atteint une vitesse nulle. On a alors

$$H_0 = z(t') = -\frac{g}{2}t_0^2 - v_0 t_0 = \frac{v_0^2}{2g} = 2000 \text{ m}$$

De même $z(T_0) = 0$ ce qui donne

$$T_0 = \frac{2v_0}{g} = 41 \text{ s}$$

Ces valeurs sont très élevées pour pouvoir réaliser aisément un tel dispositif où le vide poussé doit régner.

Avec les valeurs proposées, on obtient $v_1 = \sqrt{2gH_1} = 4,4 \text{ m.s}^{-1}$ et $T_1 = \frac{2v_1}{g} = 0,9 \text{ s}$.

III.C.2) Comme au III.B.5), on utilise $\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta\tau}{\tau} = \frac{1}{T_1 f_0}$ ce qui donne

$$\frac{\Delta\tau}{\tau} = 1,2 \cdot 10^{-10} = 3,8 \text{ ms.an}^{-1}$$

III.D.1) On vérifie aisément $\text{div } \vec{E} = 0$ et $\text{div } \vec{B} = 0$ ici avec les formes proposées pour les champs.

pour ce qui est des deux autres équations de Maxwell : $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ et $\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, avec les formes proposées pour les champs on obtient les deux équations suivantes :

$$\frac{\partial E_z}{\partial r} = -\frac{\partial B_\theta}{\partial t} \quad ; \quad \frac{1}{r} \frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t}$$

Dans le cylindre parfaitement conducteur les champs sont nuls, les conditions aux limites sur $\vec{E}$ et $\vec{B}$ (tangentiels ici) sont donc :

$$E_z(R, t) = 0 \quad ; \quad B_\theta(R, t) \vec{e}_\theta = -\mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_r$$

III.D.2) En dérivant par rapport à r l'équation $\frac{\partial E_z}{\partial r} = -\frac{\partial B_\theta}{\partial t}$ et en utilisant alors la dérivée par rapport à t de l'équation $\frac{1}{r} \frac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t}$, on obtient

$$r \frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{\partial E_z}{\partial r} - \frac{r}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

avec la forme de solution proposée par l'énoncé $\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = -\omega^2 E$ si bien que l'équation devient pour $E(r)$

$$r \frac{d^2 E}{dr^2} + \frac{dE}{dr} + r \frac{\omega^2}{c^2} E = 0$$

qui est la forme proposée avec $a = \frac{\omega}{c}$

III.D.3) $E(r)$ s'annulant en $r = R$ (conditions aux limites), on aura alors $x_n = aR = \frac{\omega_n}{c}R$, ce qui donne

$$\omega_n = \frac{x_n}{R}c$$

Le texte propose ici l'expression $r_n = \frac{1}{a}$, donc avec $a = \frac{\omega_n}{c}$, on obtient $r_n = \frac{R}{x_n}$

Pour les applications numériques : $\omega_1 = 1,44.10^{10} \text{ rad.s}^{-1}$ et $f_1 = 2,29.10^9 \text{ Hz}$.

III.D.4) On utilise l'équation $\frac{\partial E_z}{\partial r} = -\frac{\partial B_\theta}{\partial t}$ pour calculer $\frac{\partial B_\theta}{\partial t}$ qu'on intègre ensuite (en négligeant les champs constants) pour obtenir, en utilisant $\omega_n r_n = c$,

$$B_{\theta,n}(r, t) = -\frac{E_n}{c} \sin(\omega_n t) J_1\left(\frac{r}{r_n}\right)$$

On calcule ensuite $u_{EM}(r, t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_z^2 + \frac{1}{2\mu_0} B_\theta^2$ à l'aide des expressions précédentes et en remplaçant $\frac{1}{r_n}$ par $\frac{x_n}{R}$. Avec les valeurs moyennes des $\cos^2$ et $\sin^2$ égales à $1/2$, on obtient

$$\langle u_{EM}(r) \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_n^2}{4} \left[J_0^2\left(\frac{x_n r}{R}\right) + J_1^2\left(\frac{x_n r}{R}\right) \right]$$

III.D.5) On calcule alors $\langle U_{EM} \rangle$ en intégrant $\langle u_{EM}(r) \rangle$ sur tout le volume de la cavité cylindrique :

$$\langle U_{EM} \rangle = \int_0^R \langle u_{EM}(r) \rangle 2\pi H r dr$$

$$\langle U_{EM} \rangle = 2\pi H \frac{\varepsilon_0 E_n^2}{4} \int_0^R r \left(J_0^2\left(\frac{x_n r}{R}\right) + J_1^2\left(\frac{x_n r}{R}\right) \right) dr$$

On se restreint au cas $n = 1$, et on effectue le changement de variable $u = \frac{x_1}{R}r$, ce qui donne

$$\langle U_{EM} \rangle = \frac{\pi H \varepsilon_0 E_1^2}{2} \left(\frac{R}{x_1} \right)^2 \int_0^{x_1} u (J_0^2(u) + J_1^2(u)) du$$

ce qui donne en semi-numérique

$$\langle U_{EM} \rangle = 0,425 H \varepsilon_0 E_1^2 R^2$$

Si $\langle U_{EM} \rangle = k_B \theta_0$, on tire alors

$$E_1 = \sqrt{\frac{k_B \theta_0}{0,425 H \varepsilon_0 R^2}} = 6,63.10^{-4} \text{ V.m}^{-1}$$

III.D.6) Si $\frac{h}{2\pi} \omega_N \simeq k_B \theta_0$ avec $\omega_N = \frac{c}{R} x_N = \frac{c}{R} N\pi$, on obtient

$$N = \frac{2k_B \theta_0 R}{hc} \simeq 2000$$

On écrit que l'énergie U est de l'ordre de $\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} V$ où V est le volume du cylindre donc $V = \pi R^2 H$, ce qui donne

$$E = \sqrt{\frac{2\pi^2 k_B \theta_0 N^3}{\varepsilon_0 R^3}} = 768 \text{ V.m}^{-1}$$

$$E_1 = \sqrt{\frac{k_B \theta_0}{0,425 H \varepsilon_0 R^2}} = 6,63 \cdot 10^{-4} \text{ V.m}^{-1}$$

III.D.7) On constate que δf_E dépend de la température comme E^2 qui en dépend en θ^4 , car N en dépend en θ^3 . On calcule $\delta f_E = -1,34 \cdot 10^{-4} \text{ Hz}$ et $|\delta f_E / f_0| = 1,45 \cdot 10^{-14}$. Ce résultat n'est plus très loin de l'ordre de grandeur actuel avec ce modèle. Si on mesurait le rayon terrestre avec la même incertitude relative, on pourrait donner sa valeur à 0,64 nm près!!!

IV – Détection et asservissement

IV.A.1) La grandeur σ homogène à une longueur permet de donner l'ordre de grandeur de la taille du nuage d'atomes dans l'état 1.

La grandeur $n_1(x, y, z, t)$ est une grandeur eulérienne.

IV.A.2) On calcule $\mathcal{P}_1(t)$ à l'aide de la somme sur tout le volume de la tranche comprise entre z_1 et $z_1 + e$:

$$\mathcal{P}_1(t) = \iiint \mathcal{P}_0 n_1 dx dy dz$$

donc

$$\mathcal{P}_1(t) = \frac{N_1 \mathcal{P}_0}{(\sigma \sqrt{2\pi})^3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \int_{z_1}^{z_1+e} e^{-\frac{(z-z(t))^2}{2\sigma^2}} dz$$

soit

$$\mathcal{P}_1(t) = \frac{N_1 \mathcal{P}_0}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^{z_1+e} e^{-\frac{(z-z(t))^2}{2\sigma^2}} dz$$

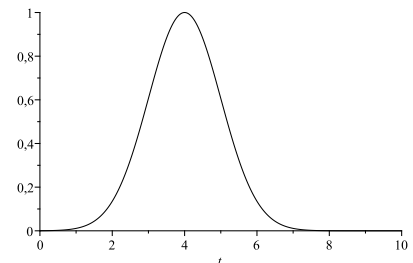
Or $e \ll \sigma$ de telle sorte qu'on peut considérer $\frac{z - z(t)}{\sigma} \simeq \frac{z_1 - z(t)}{\sigma}$ sur l'intervalle de la dernière intégrale. On obtient alors

$$\mathcal{P}_1(t) = \frac{N_1 \mathcal{P}_0}{\sigma \sqrt{2\pi}} e \exp\left(-\frac{(z_1 - z(t))^2}{2\sigma^2}\right)$$

IV.A.3)

Pour la courbe $\mathcal{P}_1(t)$, on obtient l'allure d'une gaussienne centrée sur son maximum en t_1 tel que $z(t_1) = z_1$. Elle n'est pas rigoureusement symétrique par rapport à ce maximum car t ne peut pas être négatif et l'expérience a en plus une durée limitée.

IV.A.4) L'énergie totale est la somme $N_2 E_0 - N_1 E_0$, elle est donc proportionnelle à $N_2 - N_1$. Or l'aire (toujours > 0 pour une aire) sous la courbe de $\mathcal{P}_1(t)$ est proportionnelle à l'énergie $N_1 E_0$ et de même pour l'aire sous la courbe $\mathcal{P}_2(t)$ avec $N_2 E_0$. Ainsi la différence de deux aires est bien proportionnelle à l'énergie du nuage. On divise par la somme des aires qui est proportionnelle au nombre total d'atomes pour s'affranchir de la variation au cours du temps de ce nombre total (normalisation).



IV.B.1) Avec la définition de ε_k , on peut écrire

$$\varepsilon_k = G \mathcal{E}_0 \left[\cos(2\pi T(f_k + \Delta - f_0)) - \cos(2\pi T(f_k - \Delta - f_0)) \right]$$

soit

$$\varepsilon_k = -2G\mathcal{E}_0 \sin(2\pi T(f_k - f_0)) \sin(2\pi T\Delta)$$

En tant compte de $|f_k - f_0| \ll 1/T$, on peut alors écrire $\sin(2\pi T(f_k - f_0)) \simeq 2\pi T(f_k - f_0)$, ce qui donne

$$\varepsilon_k = -4\pi G\mathcal{E}_0 T(f_k - f_0) \sin(2\pi T\Delta)$$

ce qui prouve tout d'abord que ε_k est proportionnel à $\delta f_k = f_k - f_0$, mais de plus

$$P = \frac{d\mathcal{E}}{d(\delta f)}(\Delta) = -2\pi\mathcal{E}_0 T \sin(2\pi T\Delta)$$

donc

$$\boxed{\varepsilon_k = 2GP(f_k - f_0)}$$

Sur le sommet de la frange centrale lorsque $\delta f = 0$ alors P est nulle car P en $\sin(2\pi\delta f T)$ donc le signal d'erreur est alors aussi nul.

IV.B.2) On choisit de prendre $\Delta = \frac{T}{4}$ car alors $\sin(2\pi\Delta T) = 1$ ce qui signifie que la valeur de la pente $|P|$ est alors maximum tout comme $|\varepsilon_k|$ ce qui permet une meilleure détection puisque le signal d'erreur est important si $\delta f_k \neq 0$. Dans ce cas

$$\boxed{\varepsilon_k = -4\pi G\mathcal{E}_0 T \delta f_k}$$

IV.B.3) d'après le schéma de la figure 13 $f_{k+1} = f_k - \varepsilon_k$ ou encore

$$f_{k+1} = f_k + 4\pi G\mathcal{E}_0 T(f_k - f_0)$$

Pour avoir un bon asservissement, il faut que si $f_k > f_0$ alors le système commande $f_{k+1} < f_k$ pour diminuer la fréquence, il faut donc avoir $\boxed{G < 0}$.

Dans ces conditions

$$f_H((k+1)T_0) - f_H(kT_0) = 4\pi G\mathcal{E}_0 T(f_H(kT_0) - f_0)$$

ce qui donne par une Dl à l'ordre 1

$$T_0 \frac{df_H}{dt} = 4\pi G\mathcal{E}_0 T(f_H - f_0)$$

ou encore (avec toujours $G < 0$)

$$\boxed{\frac{df_H}{dt} + \frac{f_H}{\tau} = \frac{f_0}{\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{-T_0}{4\pi G\mathcal{E}_0 T}}$$

IV.B.4) Sachant que $f_H(t_0) = \Delta f_H + f_0$, l'équation précédente se résout en

$$\boxed{f_H(t) = f_0 + \Delta f_H \exp\left(-\frac{t - t_0}{\tau}\right)}$$