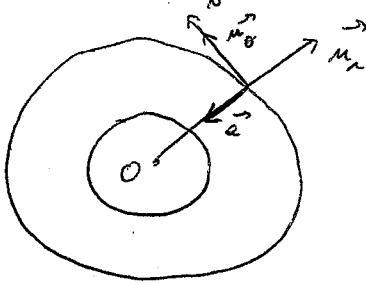


PREMIERE PARTIE : Satellites sur orbite circulaireA) Caractéristiques des orbites de SPOT et d'ENVISAT:A-1) force exercée par la Terre sur le satellite :

$$= - \frac{m \Pi_T G}{(R_T + h)^2} \vec{u}_r = m \vec{g}(P)$$

$$\Rightarrow \vec{g}(P) = - \frac{G \Pi_T}{(R_T + h)^2} \vec{u}_r = - \frac{G \Pi_T}{(R_T + h)^3} \vec{OP}$$

A-2) référentiel géocentrique, système : satellite

$$\vec{a} = - \frac{v^2}{(R_T + h)} \vec{u}_r \quad (\text{mouvement circulaire uniforme})$$

$$\text{RFD: } m \vec{a} = m \vec{g}$$

$$\Rightarrow \frac{v^2}{(R_T + h)} = \frac{G \Pi_T}{(R_T + h)^2} \Rightarrow v^2 = \frac{G \Pi_T}{R_T + h}$$

$$\text{ou vitesse} = \frac{\text{circonférence}}{\text{période}} = \frac{2\pi(R_T + h)}{T}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi(R_T + h)}{v} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2(R_T + h)^2}{v^2}$$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2(R_T + h)^3}{G \Pi_T} \quad 3^{\text{ème}} \text{ loi de Kepler}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{G \Pi_T}} = 1h41 \text{ min}$$

A-3) on a vu dans A-2) que

$$v = \sqrt{\frac{G \Pi_T}{R_T + h}} = 7500 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\begin{aligned} \vec{f}_{\text{Tune} \rightarrow \text{satellite}} &= m \vec{g} = - \frac{G \Pi_T m}{(R_T + h)^2} \vec{u}_r \\ &= - \vec{\text{grad}} E_p \\ &= - \frac{dE_p}{d(R_T + h)} \vec{u}_r \\ \Rightarrow E_p &= - \frac{G \Pi_T m}{R_T + h} + \text{cste} \\ &\quad \text{choisie nulle} \\ &\quad (E_p = 0 \text{ si } h \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

$$\text{A-5)} E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \frac{G \Pi_T}{R_T + h} \text{ car } v^2 = \frac{G \Pi_T}{R_T + h}$$

$$\Rightarrow 2E_c + E_p = 0$$

$$\text{A-6)} \vec{f} = - \alpha m v \vec{u} \Rightarrow \alpha = \frac{f}{m v^2}$$

$$\alpha \text{ en } \text{N. kg}^{-1} (\text{m.s}^{-1})^{-2}$$

$$\uparrow$$

$$\text{kg. (m.s}^{-2})$$

$$\alpha \text{ en m}^{-1}$$

$$\text{A-7)} E = E_c + E_p \text{ or } 2E_c + E_p = 0$$

$$\Rightarrow E = -E_c = \frac{E_p}{2}$$

$$\Rightarrow E = - \frac{G \Pi_T m}{2(R_T + h)}$$

$$\text{or } E = -E_c = - \frac{1}{2} m v^2$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{G \Pi_T}{R_T + h}}$$

A-8) thm de la puissance cinétique :

$$\frac{dE_c}{dt} = P_{\text{gravitation}} + P_{\text{frottements}} = -\frac{dE_p}{dt} + \vec{f} \cdot \vec{v}$$

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{v}$$

$$\text{or } E = \frac{-G\pi_T m}{2(R_T + h)}$$

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = + \frac{G\pi_T m}{2} \frac{1}{(R_T + h)^2} \frac{dh}{dt}$$

$$= \vec{f} \cdot \vec{v} = -\alpha m v^3 \quad \text{or } v = \sqrt{\frac{G\pi_T}{R_T + h}}$$

$$\Rightarrow \frac{G\pi_T}{2} \frac{1}{(R_T + h)^2} \frac{dh}{dt} = -\alpha \left(\frac{G\pi_T}{R_T + h} \right)^{3/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dh}{dt} = -2\alpha \sqrt{G\pi_T (R_T + h)}}$$

A-9) * $\frac{dh}{dt} \approx \frac{\Delta h}{T}$ avec $\Delta h = -1 \text{ m}$
et $T = 1 \text{ h } 41 \text{ min}$

$$\Rightarrow \alpha \approx \frac{-\Delta h}{2T \sqrt{G\pi_T (R_T + h)}}$$

$$\boxed{\alpha \approx 2 \cdot 10^{-15} \text{ m}^{-1}}$$

* 1 m perdu en 1 h 41 min = 101 min

x m perdu en 10 ans = $10 \times 365 \times 24 \times 60 \text{ min}$

$$\Rightarrow x = \frac{10 \times 365 \times 24 \times 60}{101} = 52 \text{ km}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta h = -52 \text{ km}}$$

* $v = \sqrt{\frac{G\pi_T}{R_T + h}}$ Si h > 0, v ↗

(v n'est pas parallèle (l'accélération est normale))

A-10) Il ne faut pas que les satellites soient trop éloignés de la Terre, car ils vont "sonder" celle-ci. D'autre part, à 800 km, on voit qu'au bout de 10 ans, les satellites ne seront toujours pas "tombés" sur Terre.

B) Stabilisation de l'orbite d'un satellite :

B-1) référentiel géocentrique R

système : satellite de centre de gravité S

actions extérieures : force de gravitation

$$M_S \vec{a}_S = - \frac{G\pi_T \pi_S}{r_0^2} \vec{u}_n' \quad (\text{thm résultante cinétique})$$

mouvement circulaire uniforme
or $\vec{a}_S = - \frac{v_S^2}{r_0} \vec{u}_n' = - r_0 \Omega^2 \vec{u}_n'$

$$\Rightarrow \boxed{\Omega^2 = \frac{G\pi_T}{r_0^3}}$$

B-2) $\vec{F}_1 = \frac{-G\pi_T m}{O\pi_1^3} O\pi_1$

$$\vec{F}_1 = \frac{-G\pi_T m}{r_1^3} \vec{r}_1$$

$$\vec{F}_2 = \frac{-G\pi_T m}{r_2^3} \vec{r}_2$$

B-3) R' est en rotation uniforme autour de (Oz) par rapport à R à la vitesse angulaire Ω

$$\vec{F}_{ic1} = m r_1 \Omega^2 \vec{u}_1 = m \Omega^2 \vec{r}_1$$

$$\vec{F}_{ic2} = m \Omega^2 \vec{r}_2$$

$$\vec{F}_{ic1} = -m \vec{a}_c = -m \Omega \vec{S} \wedge \vec{r}_1$$

$$= -2m \Omega \ell \dot{\theta} \underbrace{\vec{u}_2 \wedge \vec{u}_0}_{-\vec{S}\pi_1 / \ell}$$

$$\boxed{\vec{F}_{ic1} = 2m \Omega \dot{\theta} \vec{S}\pi_1}$$

$$\boxed{\vec{F}_{ic2} = 2m \Omega \dot{\theta} \vec{S}\pi_2}$$

$$\underline{B-4)} \quad \vec{M}_S(\text{Coriolis}) = \vec{S}\vec{\Pi}_1 \wedge \vec{F}_{ic1} + \vec{S}\vec{\Pi}_2 \wedge \vec{F}_{ic2}$$

$\uparrow \vec{S}\vec{\Pi}_1$
 $\propto \vec{S}\vec{\Pi}_1$

$\uparrow \vec{S}\vec{\Pi}_2$
 $\propto \vec{S}\vec{\Pi}_2$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{M}_S(\text{Coriolis}) = \vec{0}}$$

$$\underline{B-5)} \quad \vec{R}_1 = m \left(\Omega^2 - \frac{G\pi_T}{r_1^3} \right) \vec{r}_1$$

$$\vec{R}_2 = m \left(\Omega^2 - \frac{G\pi_T}{r_2^3} \right) \vec{r}_2$$

$$\vec{r}_1 = \vec{OS} + \vec{S}\vec{\Pi}_1$$

$$\Rightarrow r_1^2 = r_0^2 + l^2 + 2\vec{OS} \cdot \vec{S}\vec{\Pi}_1$$

$$= r_0^2 + l^2 + 2r_0 l \cos\theta$$

$$r_1^2 = r_0^2 \left(1 + 2\frac{l}{r_0} \cos\theta + \frac{l^2}{r_0^2} \right)$$

$$r_1 = r_0 \sqrt{1 + 2\frac{l}{r_0} \cos\theta + \frac{l^2}{r_0^2}}$$

$$\text{au } 1^{\text{er}} \text{ ordre en } \frac{l}{r_0} : r_1 = r_0 \left(1 + \frac{l}{r_0} \cos\theta \right)$$

$$\text{De même : } r_2 = r_0 \left(1 - \frac{l}{r_0} \cos\theta \right)$$

$$\vec{R}_1 = m \left(\Omega^2 - \frac{G\pi_T}{r_1^3} \right) \vec{r}_1$$

$$= m \left(\Omega^2 - \frac{G\pi_T}{r_0^3 \left(1 + \frac{l}{r_0} \cos\theta \right)^3} \right) \vec{r}_1$$

$$= m \left(\Omega^2 - \frac{G\pi_T}{r_0^3} \left(1 - 3\frac{l}{r_0} \cos\theta \right) \right) \vec{r}_1$$

$$\text{or } \Omega^2 = \frac{G\pi_T}{r_0^3} \text{ of B-1)}$$

$$\Rightarrow \vec{R}_1 = + m \frac{G\pi_T}{r_0^3} \frac{3l}{r_0} \cos\theta \vec{r}_1$$

$$\vec{R}_1 = 3m G\pi_T \frac{l}{r_0^4} \cos\theta \vec{r}_1$$

$$\text{De même, } \vec{R}_2 = -3m G\pi_T \frac{l}{r_0^4} \cos\theta \vec{r}_2$$

$$\vec{R}_1 = 3m G\pi_T \frac{l}{r_0^4} \cos\theta \vec{r}_1$$

$$\text{or } \vec{r}_1 = r_0 \vec{u}_x + \vec{S}\vec{\Pi}_1 = r_0 \vec{u}_x + l \cos\theta \vec{u}_x + l \sin\theta \vec{u}_y$$

$$= r_0 \left(\vec{u}_x + \frac{l}{r_0} \cos\theta \vec{u}_x + \frac{l}{r_0} \sin\theta \vec{u}_y \right)$$

$$\Rightarrow \text{au } 1^{\text{er}} \text{ ordre en } \frac{l}{r_0} :$$

$$\boxed{\vec{R}_1 = 3m G\pi_T \frac{l}{r_0^3} \cos\theta \vec{u}_x}$$

$$\vec{r}_2 = r_0 \left(\vec{u}_x - \frac{l}{r_0} \cos\theta \vec{u}_x + \frac{l}{r_0} \sin\theta \vec{u}_y \right)$$

$$\Rightarrow \text{au } 1^{\text{er}} \text{ ordre en } \frac{l}{r_0} :$$

$$\boxed{\vec{R}_2 = -3m G\pi_T \frac{l}{r_0^3} \cos\theta \vec{u}_x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{R}_2 = -\vec{R}_1}$$

$$\underline{B-6)} \quad \vec{M}_S(\text{actions extérieures}) = \vec{\Gamma}_S$$

$$= \vec{M}_S(\vec{R}_1) + \vec{M}_S(\vec{R}_2) + \vec{M}_S(\text{Coriolis})$$

$\vec{0}$ of B-4)

$$\vec{\Gamma}_S = \vec{S}\vec{\Pi}_1 \wedge \vec{R}_1 + \vec{S}\vec{\Pi}_2 \wedge \vec{R}_2$$

$\uparrow \vec{S}\vec{\Pi}_1$
 $-\vec{S}\vec{\Pi}_1$

$\uparrow \vec{R}_2$
 $-\vec{R}_1$

$$= 2 \vec{S}\vec{\Pi}_1 \wedge \vec{R}_1$$

$$= 2 l (\cos\theta \vec{u}_x + \sin\theta \vec{u}_y) \wedge 3m G\pi_T \frac{l}{r_0^3} \cos\theta \vec{u}_x$$

$$\vec{\Gamma}_S = -6Gm\pi_T \frac{l^2}{r_0^3} \sin\theta \cos\theta \vec{u}_y$$

$$\boxed{\vec{\Gamma}_S = -\Gamma_S \vec{u}_y} \quad \propto -\vec{u}_y$$

$$\underline{B-7)} \quad \frac{d\vec{\sigma}_S}{dt} + m \underbrace{\vec{v}(\vec{r}_1) \wedge \vec{v}(\vec{s})}_{\vec{0} \text{ dans } R'} + m \underbrace{\vec{v}(\vec{r}_2) \wedge \vec{v}(\vec{s})}_{\vec{0} \text{ dans } R'} = \vec{\Gamma}_S$$

$$\vec{\sigma}_S = S\vec{\Pi}_1 \wedge m \vec{v}(\Pi_1) + S\vec{\Pi}_2 \wedge m \vec{v}(\Pi_2)$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 $-S\vec{\Pi}_1$ $-\vec{v}(\Pi_1)$ (dans R')

$$= 2 S\vec{\Pi}_1 \wedge m \vec{v}(\Pi_1)$$

$$= 2 l m l \dot{\theta} \vec{u}_y$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{\sigma}_S}{dt} = 2 m l^2 \ddot{\theta} \vec{u}_y$$

$$\Rightarrow 2 m l^2 \ddot{\theta} = -6 G m \Pi_T \frac{l^2}{r_0^3} \sin \theta \cos \theta$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{36 \Pi_T}{r_0^3} \sin \theta \cos \theta = 0$$

position d'équilibre dans R' $\Rightarrow \ddot{\theta} = 0$

$$\Rightarrow \sin \theta = 0 \text{ ou } \cos \theta = 0$$

$$\Rightarrow \theta = 0 ; \frac{\pi}{2} ; \pi ; \frac{3\pi}{2}$$

B-8) $\theta \ll 1 \Rightarrow \cos \theta \simeq 1 ; \sin \theta \simeq \theta$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{36 \Pi_T}{r_0^3} \theta = 0$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique

$\Rightarrow$ position d'équilibre stable.

En effet, si à cause d'une perturbation, θ varie légèrement avec $\theta > 0$, alors $\ddot{\theta} < 0 \Rightarrow$ décélération pour revenir à la position d'équilibre $\theta = 0$.

B-9) $\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{36 \Pi_T}{r_0^3}}$

période $T' = \frac{2\pi}{\omega}$

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{r_0^3}{36 \Pi_T}}$$

avec $r_0 = R_T + l$

$T = 2\pi \sqrt{\frac{(R_T + l)^3}{G \Pi_T}}$ cf A-2) et B-1)

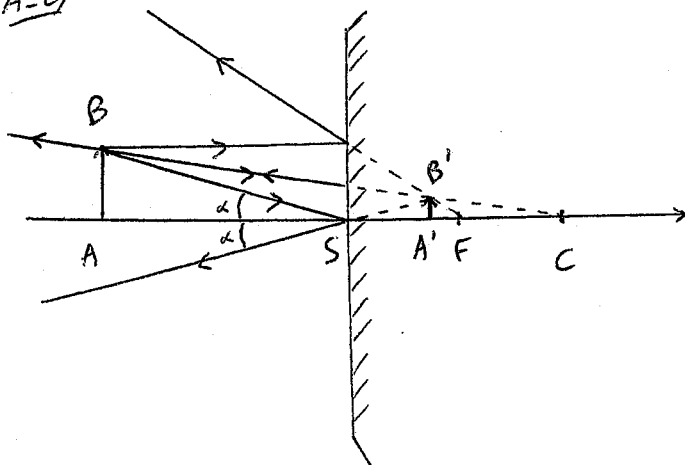
$$\Rightarrow \frac{T'}{T} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{1,7}$$

$$\Rightarrow T' = \frac{T}{1,7} = 58 \text{ min}$$

DEUXIEME PARTIE : Observation de la TerreA) SPOT : imagerie haute résolution de la TerrePreliminaire : les miroirs sphériquesA-1) conditions de l'approximation de Gauss :

- * les rayons lumineux arrivant sur la lentille sont peu inclinés par rapport à l'axe optique
- * ces rayons "frappent" la lentille près de son centre (à une distance très petite comparée au rayon de la lentille).

Dans ces conditions, on aura un stigmatisme et un aplanétisme approché.

A-2)

$F = F'$ se trouvent au milieu du segment SC

A-3)

$$\frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2}{\overline{SC}}$$

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = - \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$$

Télescope de Schmidt-Cassegrain

$$A-4) \quad \frac{1}{\overline{S_1 A}} + \frac{1}{\overline{S_1 A'}} = \frac{2}{\overline{S_1 C_1}} = \frac{-2}{\overline{C_2 S_1}} = \frac{-2}{R_1}$$

$$\text{or } \overline{S_1 A} = -h$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{h} + \frac{1}{\overline{S_1 A'}} = \frac{-2}{R_1} \Rightarrow \frac{1}{\overline{S_1 A'}} = \frac{1}{h} - \frac{2}{R_1} = \frac{R_1 - 2h}{h R_1}$$

$$\Rightarrow \overline{A' S_1} = \frac{h R_1}{2h - R_1}$$

$$\text{Si } h \gg R_1, \quad \overline{A' S_1} \simeq \frac{R_1}{2}$$

$\Rightarrow \overline{A'B'}$ se trouvera proche du plan focal du miroir Π_1 ($A' \simeq F_1$), ce qui est logique car si $h \gg R_1$, l'objet est très éloigné, presque à l'infini.

Si on considère la Terre à l'infini, $\overline{A'B'}$ sera dans le plan focal du miroir Π_1 .

A-5) Un objet à l'infini donnera une image dans le plan focal de l'association des 2 lentilles.

$$\Rightarrow A'' = F' \text{ si } A' = F_1$$

$$\frac{1}{\overline{S_2 A'}} + \frac{1}{\overline{S_2 A''}} = \frac{2}{\overline{S_2 C_2}} \Rightarrow \frac{1}{\overline{S_2 F_1}} + \frac{1}{\overline{S_2 F'}} = \frac{-2}{\overline{C_2 S_2}}$$

$$\frac{1}{\overline{S_2 S_1} + \overline{S_1 F_1}} + \frac{1}{\overline{S_2 S_1} + \overline{S_1 F'}} = \frac{-2}{\overline{C_2 S_2}}$$

$$\frac{1}{d - \frac{R_1}{2}} + \frac{1}{d + \mathcal{D}} = \frac{-2}{R_2}$$

$$\frac{1}{\mathcal{D} + d} = \frac{1}{\frac{R_1}{2} - d} - \frac{2}{R_2} = \frac{2}{R_1 - 2d} - \frac{2}{R_2}$$

$$\frac{1}{D+d} = \frac{2R_2 - 2R_1 + 4d}{R_2(R_1 - 2d)} = \frac{2(R_2 - R_1 + 2d)}{R_2(R_1 - 2d)}$$

$$\Rightarrow D = \frac{R_2(R_1 - 2d)}{2(R_2 - R_1 + 2d)} - d$$

$$\text{A-6)} \quad \gamma_1 = -\frac{\overline{S_1 A'}}{\overline{S_1 A}} = -\frac{\overline{S_1 F_1}}{\overline{S_1 A}} = -\left(-\frac{R_1}{2}\right)$$

$$\gamma_1 = \frac{-R_1}{2h}$$

$$\gamma_2 = -\frac{\overline{S_2 A''}}{\overline{S_2 A'}} = -\frac{\overline{S_2 F_1}}{\overline{S_2 F_1}} = -\frac{\overline{S_2 S_1} + \overline{S_1 F_1}}{\overline{S_2 S_1} + \overline{S_1 F_1}}$$

$$\gamma_2 = -\frac{d+D}{d - \frac{R_1}{2}}$$

$$\gamma_1 = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} \quad \gamma_2 = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{A'B'}} \quad \gamma = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{AB}}$$

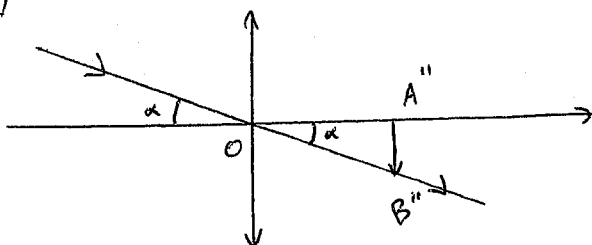
$$\Rightarrow \gamma = \gamma_1 \gamma_2$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{R_1(d+D)}{2h(d - \frac{R_1}{2})}$$

$$\text{A-7)} \quad \gamma = -1,3 \cdot 10^{-6}$$

$\gamma < 0 \Rightarrow$ l'image est renversée.

A-8)



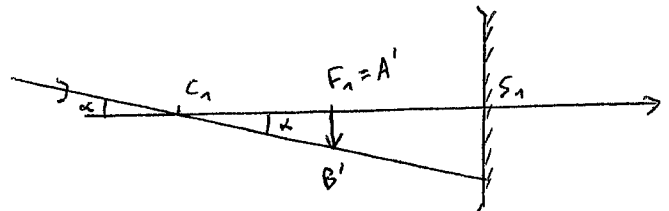
$\overline{OA''} = f'_L$ car l'objet étant à l'infini, l'image

se trouve dans le plan focal image.

$$\tan \alpha \approx \alpha = \frac{A''B''}{f'_L}$$

$$\Rightarrow f'_L = \frac{A''B''}{\alpha} = \frac{\gamma_2 A'B'}{\alpha}$$

ou pour le miroir M_1 :



$$\Rightarrow \tan \alpha \approx \alpha = \frac{A'B'}{C_1 F_1} = \frac{A'B'}{R_1/2}$$

$$\Rightarrow \frac{A'B'}{\alpha} = \frac{R_1}{2}$$

$$\Rightarrow f'_L = \gamma_2 \frac{R_1}{2} = \frac{(d+D)R_1}{R_1 - 2d}$$

$$\text{A-9)} \quad f'_L = 1,0 \text{ m}$$

$$\Rightarrow f'_L = 1,0 \text{ m} > d+D = 0,61 \text{ m}$$

1^{er} avantage: le montage Cassegrain est moins encombrant que le dispositif avec la lentille.

$2^{\text{ème}}$ avantage: pas d'aberrations chromatiques dans le cas des miroirs, contrairement au cas d'une lentille.

Résolution des satellites SPOT 4 et SPOT 5

A-10) Il faut placer le capteur dans le plan contenant F' et perpendiculaire à l'axe optique, pour pouvoir observer l'image de la Terre.

A-11) Il faut, pour distinguer un objet sur Terre, que l'image de cet objet soit supérieure à la taille d'un pixel.

$$A''B'' > \delta$$

$$\text{or } A''B'' = 181 AB \Rightarrow AB > \frac{\delta}{181}$$

$$\text{résolution} = \frac{\delta}{181} = 10 \text{ m}$$

A-12) Il y a 6000 pixels

$$\Rightarrow \text{champ de vision} = 6000 \times \text{résolution}$$

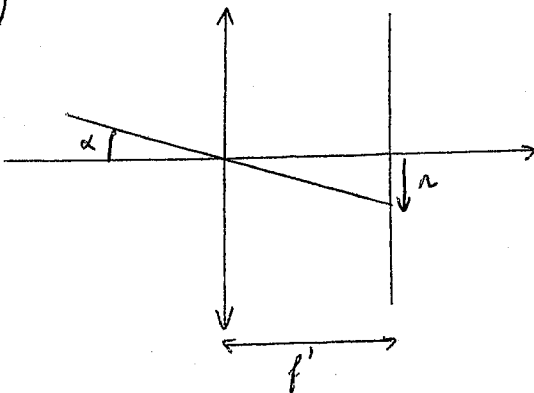
$$\Rightarrow \text{champ de vision} = 60 \text{ km}$$

$$\text{A-13) résolution SPOTS} = 2,5 \text{ m} = \frac{\text{résolution SPOTS}}{4}$$

$$\text{or même système optique} \Rightarrow \delta_5 = \delta_4$$

$$\Rightarrow \delta_5 = \frac{\delta_4}{4} = \frac{13}{4} = 3,25 \mu\text{m}$$

A-14)



$$r = f' \tan \alpha \approx f' \alpha \quad \text{or } \alpha_{\text{lim}} = 1,22 \frac{\lambda}{a}$$

$$r_{\text{lim}} = f' 1,22 \frac{\lambda}{a} = A''B''_{\text{lim}}$$

$$\text{sur Terre : } AB_{\text{lim}} = \frac{A''B''_{\text{lim}}}{181} = \frac{f'}{181} 1,22 \frac{\lambda}{a}$$

$$AB_{\text{lim}} = h 1,22 \frac{\lambda}{a} \quad \text{car } \frac{f'}{181} = h \text{ cf A-6) et A-8) logique!}$$

limite de la résolution du télescope due à la diffraction

$$= \frac{f'}{181} 1,22 \frac{\lambda}{a} = h 1,22 \frac{\lambda}{a}$$

Avec $a = 1 \text{ m}$ et $\lambda = 800 \text{ nm}$ ($h = 800 \text{ km}$)

$$\Rightarrow \text{limite de résolution} = 0,8 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \text{de l'ordre du mètre.}$$

$\Rightarrow$ on peut encore essayer de diminuer un peu la taille des pixels ($2,5 \text{ m} > 1 \text{ m}$), mais ça ne sert à rien de vouloir trop diminuer cette taille, car il y aura toujours la diffraction sur les montures des instruments, qui limite la résolution.

DEUXIEME PARTIE : Observation de la TerreB) ENVISAT : mesure de déplacements verticaux par interférométrie radarDéfaut de planéité d'un des miroirs de l'interféromètre de Michelson

$$\text{B-1)} \quad \mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_0}{2} (1 + \cos \varphi) \quad \text{car } \mathcal{E}_0 \text{ est l'éclairement maximal}$$

$$\varphi = \frac{2\pi \delta}{\lambda} \quad \text{et } \delta = 2e \cos i \text{ en lame d'air}$$

car la source est très peu étendue et placée au foyer objet de la lentille $\Rightarrow$ incidence quasi-normale $\Rightarrow i \approx 0$

$$\Rightarrow \delta = 2e \Rightarrow \varphi = \frac{4\pi e}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_0}{2} \left(1 + \cos \frac{4\pi e}{\lambda} \right)}$$

* Si e est donnée, $e = c \cdot t_e \Rightarrow \mathcal{E} = c \cdot t_e$

$\Rightarrow$ tache lumineuse de rayon le rayon des miroirs et d'intensité constante.

* $\mathcal{E}$ varie périodiquement avec e .

Pour certaines valeurs de e : $\mathcal{E} = 0$

Pour d'autres : $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_{\max}$

Pour les autres : $\mathcal{E}$ sera intermédiaire.

B-2) Pour repérer le contact optique, il faut utiliser de la lumière blanche.

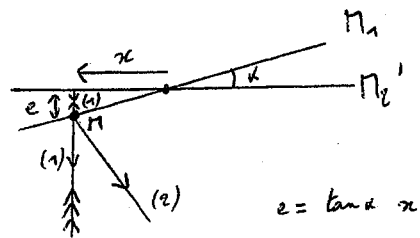
Si $e > \text{quelques } \mu\text{m}$: tache d'ordre supérieur.

Si $e < \text{quelques } \mu\text{m}$: tache de couleur (la couleur dépend de e)

Si $e = 0$, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \forall \lambda \Rightarrow$ on aura une tache blanche du même blanc que la source.

Il faut chercher pour observer une tache de couleur, faire diffuser les couleurs, jusqu'à avoir une tache blanche.

B-3)



$$e = \tan \alpha \approx \alpha x$$

$$\delta = 2e = 2\alpha x$$

Les rayons (1) et (2) se croisent en P, c'est-à-dire sur le miroir M1.

source ponctuelle : les franges sont délocalisées
source étendue : les franges sont localisées sur les miroirs.

* Les franges sont caractérisées par $\mathcal{E} = c \cdot t_e \Rightarrow \varphi = c \cdot t_e$

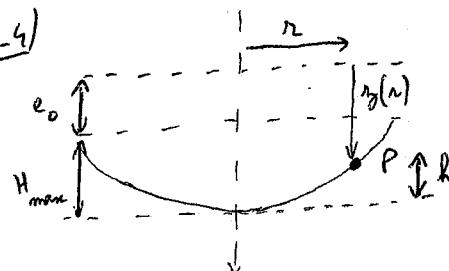
$$\Rightarrow \delta = c \cdot t_e = 2\alpha x \Rightarrow x = c \cdot t_e$$

$\Rightarrow$ on a des franges rectilignes parallèles à l'axe du coin d'air.

* calcul de l'interfrange : $\Delta \varphi = 2\pi \Rightarrow \Delta \delta = \lambda$

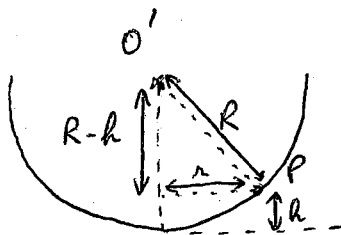
$$\Rightarrow 2\alpha \Delta x = \lambda \Rightarrow \Delta x = \boxed{x = \frac{\lambda}{2\alpha}}$$

B-4)



$$h_2(r) = e_0 + h - R$$

Soit O' le centre du cercle



thm de Pythagore: $R^2 = (R-h)^2 + r^2$
 $= R^2 + h^2 - 2Rh + r^2$

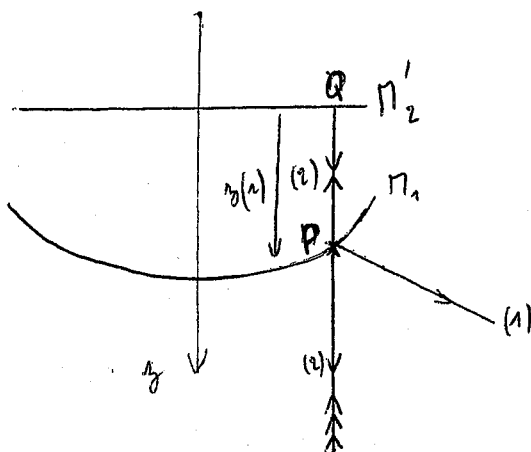
$$\Rightarrow r^2 + h^2 = 2Rh$$

à $R \gg H_{\max} > h \Rightarrow h^2 \ll 2Rh$

$$\Rightarrow r^2 = 2Rh \Rightarrow h = \frac{r^2}{2R}$$

$$\Rightarrow \boxed{z(r) = e_0 + H_{\max} - \frac{r^2}{2R}}$$

B-5)



* (1) et (2) se croisent en P, c'est-à-dire sur le miroir Π_1 , comme pour les franges de coin d'air.
 $\Rightarrow$ les franges sont localisées au voisinage du miroir 1

* $\delta = (SP)_2 - (SP)_1 = (SP + PQ + QP) - SP$
 $= 2PQ = 2z(r)$

$$\Rightarrow \boxed{\delta = 2z(r) = 2\left(e_0 + H_{\max} - \frac{r^2}{2R}\right)}$$

* les franges sont caractérisées par $\delta = c \frac{k}{2} \Rightarrow r = c \frac{k}{2}$

$$\Rightarrow \delta = c \frac{k}{2} \Rightarrow r = c \frac{k}{2}$$

$\Rightarrow$ on observe des anneaux d'axe (Ox)

B-6) au centre des anneaux: $r=0 \Rightarrow \delta = 2(e_0 + H_{\max})$

$$\text{or } p = \frac{\delta}{\lambda} \Rightarrow \boxed{p_0 = \frac{2(e_0 + H_{\max})}{\lambda}}$$

Soit p_k l'ordre d'interférence du k-ième anneau brillant:

$$p_1 = E(p_0) = \text{partie entière de } p_0$$

$$(p_1 = \frac{2(e_0 + H_{\max} - \frac{p_1^2}{2R})}{\lambda} < p_0 = \frac{2(e_0 + H_{\max})}{\lambda})$$

$$p_2 = p_1 - 1$$

$\vdots$

$$p_k = p_1 - (k-1) = p_1 - k + 1$$

$$\Rightarrow \frac{2(e_0 + H_{\max} - \frac{p_k^2}{2R})}{\lambda} = \frac{2(e_0 + H_{\max} - \frac{p_1^2}{2R})}{\lambda} - k + 1$$

$$\Rightarrow -\frac{p_k^2}{\lambda R} = -\frac{p_1^2}{\lambda R} - k + 1$$

$$\Rightarrow \boxed{p_k = \sqrt{p_1^2 + (k-1)\lambda R}}$$

Analyse d'un défaut de planité d'une surface réfléchissante

B-7) * On observe des anneaux au niveau du défaut.

En dehors du défaut, on observe un écran éclairé uniformément.

d = diamètre du défaut = diamètre de l'anneau le plus externe. $\Rightarrow \boxed{d = 4,0 \text{ mm}}$

* Le centre est brillant; le fond d'écran est brillant. Entre les deux, il y a 4 interférences.

$$\Rightarrow \Delta\delta = 4\lambda$$

Pour le fond d'écran: $\delta = 2e_0$

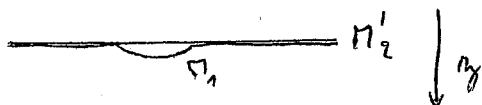
Pour le centre: $\delta = 2(e_0 + H_{\max})$

$$\Rightarrow \Delta \delta = 2H_{\max} = 4\lambda$$

$$\Rightarrow H_{\max} = 2\lambda = 1,2 \mu\text{m}$$

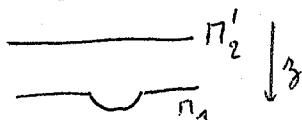
* Pour savoir si le défaut est convexe ou concave, il faut travailler en lumière blanche.

On règle tout d'abord le fond d'écran au contact optique (cf B2).



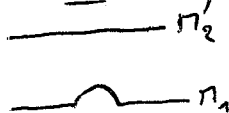
On caractérise n_1 dans le sens des z croissants :

cas 1 :



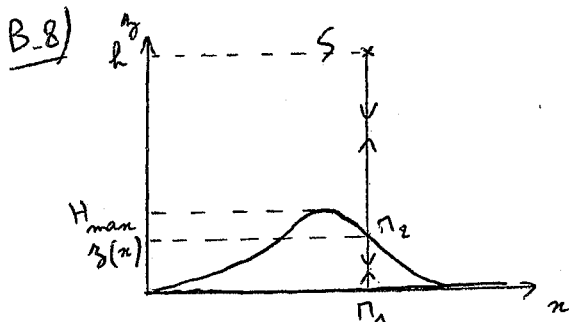
le blanc d'ordre supérieur apparaît d'abord au niveau du défaut (δ grand)

cas 2 :



le blanc d'ordre supérieur apparaît d'abord hors du défaut (δ grand)

Déplacements verticaux mesurés par interférométrie radar



$$\begin{aligned} \delta &= (Sn_1 + n_1 S) - (Sn_2 + n_2 S) \\ &= 2Sn_1 - 2Sn_2 = 2n_1 n_2 \\ &= 2z(x) \end{aligned}$$

$$\delta = 2z(x)$$

B-9) $d \approx 4 \cdot 10^1 \text{ km}$

Entre le centre et l'extrémité, il y a environ 3 interférences $\Rightarrow \Delta \delta = 3\lambda$

D'autre part, $z(x) = H_{\max}$ et là où le sol n'a pas bougé : $z = 0$

$$\Rightarrow \Delta \delta = 2H_{\max} - 0 = 2H_{\max}$$

$$\Rightarrow 2H_{\max} = 3\lambda$$

$$\Rightarrow H_{\max} \approx \frac{3\lambda}{2} \approx 8 \text{ cm}$$

En 4 ans, le sol s'est élevé de 8 cm au maximum

$\Rightarrow$ " 1 " " " 2 cm "

$\Rightarrow$ vitesse maximale d'élévation du sol : $2 \text{ cm} \cdot \text{an}^{-1}$

C'est peu ! Mais pourtant, on peut très bien l'observer !

TROISIEME PARTIE: Communications spatiales

1) * référentiel terrestre supposé galiléen

système: un électron

inventaire des actions extérieures:

- poids de l'e: $-m_e g \vec{u}_z$
- force électrique: $-e \vec{E} = \vec{F}_e$
- force magnétique: $-e (\vec{v} \wedge \vec{B}) = \vec{F}_m$

$$\text{RFD: } m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -m_e g \vec{u}_z - e \vec{E} - e \vec{v}_e \wedge \vec{B}$$

De même: ($m_e \rightarrow \Pi_i$ et $-e \rightarrow +e$)

$$\Pi_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = -\Pi_i g \vec{u}_z + e \vec{E} + e \vec{v}_i \wedge \vec{B}$$

$$\text{* OPPM} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\hbar \wedge \vec{E}}{\omega} \Rightarrow \|\vec{B}\| = \frac{\hbar}{\omega} \|\vec{E}\| \approx \frac{\|\vec{E}\|}{c}$$

$$\frac{\|\vec{F}_m\|}{\|\vec{F}_e\|} = \frac{e v B}{e E} \approx \frac{v}{c} \ll 1 \text{ si } v \ll c$$

$\Rightarrow$ on peut négliger la contribution du champ magnétique devant celle du champ électrique si la vitesse des ions et e⁻ est négligeable devant c, ce qui doit être le cas dans un modèle classique, non relativiste.

$$\text{* } m g \ll e E_0 \Rightarrow E_0 \gg \frac{m g}{e}$$

avec $m = m_e$ et Π_i ou $\Pi_i \gg m_e$

$$\Rightarrow E_0 \gg \frac{\Pi_i g}{e}$$

$$m_e \approx 10^{-30} \text{ kg} \Rightarrow \Pi_i \approx 100 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

↑ ↑
ex. nb. de masses $\approx m_{\text{proton}} = m_{\text{neutron}}$

$$\Pi_i = 10^{-25} \text{ kg}$$

$$g = 10 \text{ m.s}^{-2}$$

$$e \approx 10^{-19} \text{ C}$$

$$\Rightarrow E_0 \gg 10^{-5} \text{ V.m}^{-1}$$

ce qui sera évidemment le cas!

$$2) \begin{cases} m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -e \vec{E} \\ \Pi_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = e \vec{E} \end{cases}$$

$$\text{ou } \vec{E} = E_0 e^{i(\omega t + k y)} \vec{u}_x$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = i\omega \vec{v}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_e = \frac{-e \vec{E}}{i\omega m_e} \quad \text{et} \quad \vec{v}_i = \frac{+e \vec{E}}{i\omega \Pi_i}$$

$$\vec{j} = \vec{j}_e + \vec{j}_i = \rho_e \vec{v}_e + \rho_i \vec{v}_i = n(-e) \vec{v}_e + n(+e) \vec{v}_i$$

$$\vec{j} = n e (\vec{v}_i - \vec{v}_e) = \frac{n e^2 \vec{E}}{i\omega \left(\frac{1}{\Pi_i} + \frac{1}{m_e} \right)} = \vec{j}$$

$$\text{or } \Pi_i \gg m_e \Rightarrow \frac{1}{\Pi_i} \ll \frac{1}{m_e}$$

$$\Rightarrow \vec{j} = \frac{n e^2}{i\omega m_e} \vec{E}$$

3) Maxwell-Gauss: $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$ ($\rho = 0$ car le plasma est électriquement neutre)

$$\Rightarrow \text{div } \vec{E} = 0$$

$$\text{Maxwell-flux: } \text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{Maxwell-Faraday: } \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{Maxwell-Ampère: } \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{ou } \vec{j} = \frac{ne^2}{i\omega m_e} \vec{E}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\text{rot}} \vec{B} = \frac{\mu_0 ne^2}{i\omega m_e} \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

$$\begin{aligned} 4) \vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{E} &= \vec{\text{grad}} \text{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E} \\ &= \vec{\text{rot}} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\text{rot}} \vec{B} \\ &= -\frac{\mu_0 ne^2}{i\omega m_e} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - i \frac{\mu_0 ne^2}{\omega m_e} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

$$5) e^{i(\omega t + k_z z)} = e^{i(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} : i\omega$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} : (i\omega)^2 = -\omega^2$$

$$\Delta : (i\vec{k})^2 = -k^2$$

$$\Rightarrow -k^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} (-\omega^2 \vec{E}) - i \frac{\mu_0 ne^2}{\omega m_e} i\omega \vec{E}$$

$$\Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0 ne^2}{m_e} = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{ne^2}{\epsilon_0 c^2 m_e}$$

$\uparrow$
 $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$

$$\text{on pose } \omega_p^2 = \frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e}$$

$$\Rightarrow \boxed{k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$$

$$6) * 1^{\text{er}} \text{ cas : } \omega > \omega_p \Rightarrow k^2 > 0$$

$\Rightarrow k$ est réel

$$\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t + k_z z)} \rightarrow \vec{u}_x$$

$\Rightarrow$ il y a propagation de l'onde à travers le plasma sans atténuation si $\omega > \omega_p$.

(phase = $\omega t + k_z z$)

$$* 2^{\text{ème}} \text{ cas : } \omega < \omega_p \Rightarrow k^2 < 0$$

$\Rightarrow k$ est imaginaire pur

Soit $k = +i\alpha$ (α réel)

$$\Rightarrow \vec{E} = E_0 e^{-\alpha z} e^{i\omega t} \rightarrow \vec{u}_x$$

$\Rightarrow$ il n'y a pas propagation de l'onde si $\omega < \omega_p$

(phase = ωt)

$\Rightarrow$ l'ionosphère se comporte comme un filtre passe-haut de fréquence de coupure

$$\boxed{f_c = \frac{\omega_p}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{ne^2}{m_e \epsilon_0}}}$$

En effet, si $f > f_c$, l'onde est transmise et peut se propager. Si $f < f_c$, elle ne peut pas se propager.

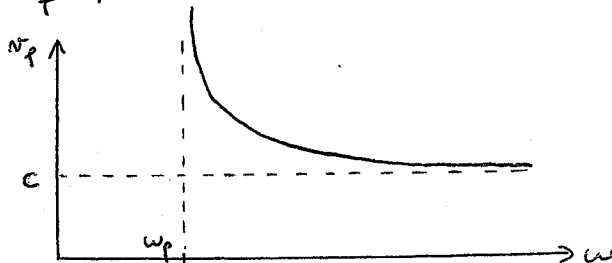
7) propagation possible $\Rightarrow f > f_c, \omega > \omega_p$,
 k est réel

$$\text{ou } k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \Rightarrow |k| = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$$

$$\boxed{|k| = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} \quad \text{relation de dispersion}$$

$$\boxed{n_p = \frac{\omega}{|k|} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}}$$

n_p dépend de $\omega \Rightarrow$ le milieu est dispersif



$$8) \quad f_c = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m e^2}{m_e \epsilon_0}} = 1,3 \cdot 10^6 \text{ Hz}$$

$$3) \text{ Avec } n_0 : f_{c_0} = 1,3 \cdot 10^6 \text{ Hz}$$

$$\text{Avec } n_1 : f_{c_1} = 6,3 \cdot 10^6 \text{ Hz}$$

On a propagation si $f > f_c$

⇒ Pour pouvoir communiquer avec le satellite à chaque instant, il faut $f > f_{c_1} = 6,3 \cdot 10^6 \text{ Hz}$

$$\lambda = \frac{c}{f} \Rightarrow \text{il faut } \lambda < \frac{c}{f_{c_1}}$$

$$\lambda < 50 \text{ m}$$

⇒ ondes radar