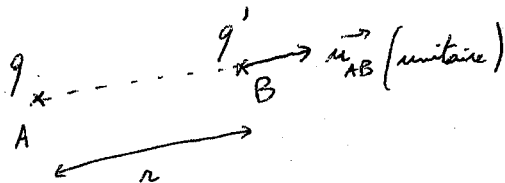


PULSAR ET ELECTROMAGNETISME

A) Etude mécanique:

A-1) * loi de Coulomb:

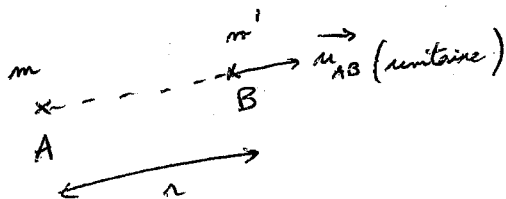


force exercée par q sur q':

$$\vec{F} = \frac{q'q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_{AB} = q' \vec{E}(B)$$

avec $\vec{E}$ le champ électrique créé par q

* loi de Newton:



force exercée par m sur m':

$$\vec{F} = - \frac{m'mG}{r^2} \vec{u}_{AB} = m' \vec{g}(B)$$

avec $\vec{g}$ le champ de gravitation créé par m.

* Théorème de Gauss pour le champ électrique:

le flux sortant du champ électrique à travers une surface fermée est égal à la charge contenue à l'intérieur de cette surface divisée par la permittivité diélectrique du vide:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

* Par analogie: $q \rightarrow m$

$$q' \rightarrow m'$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rightarrow -G \Rightarrow \frac{1}{\epsilon_0} \rightarrow -4\pi G$$

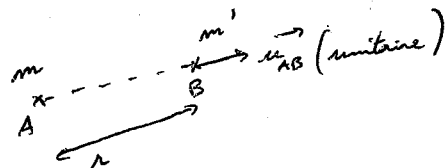
$$\vec{E} \rightarrow \vec{g}$$

$$\Rightarrow \oint_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G m_{int}$$

$$A-2) dm = \mu(r) dV = \mu(r) 4\pi r^2 dr = dm$$

$$m_{totale} = \int_0^R \mu(r) 4\pi r^2 dr$$

A-3)



force exercée par m sur m':

$$\vec{F} = - \frac{m'mG}{r^2} \vec{u}_{AB}$$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = - \frac{m'mG}{r^2} dr = d \left(\frac{Gmm'}{r} + c \right)$$

$$= - d \left(- \frac{Gmm'}{r} + c \right) = - dE_p$$

 $\Rightarrow$ la force dérive d'une énergie potentielle E_p

$$\Rightarrow E_p = - \frac{Gmm'}{r} + c$$

$$r \rightarrow \infty, E_p = c = 0$$

$$\Rightarrow E_p = - \frac{Gmm'}{r}$$

A-4) * on a invariance de la distribution de masse par rotation autour de O $\Rightarrow \vec{g}(r', \phi, \theta)$

* tous les plans contenant la droite (OI) sont plans de symétrie de la distribution de masse.

or par analogie avec le champ électrique, le champ de gravitation est un vecteur polaire

$\Rightarrow \vec{g}(r) \in$ à tous ces plans, donc à leur intersection

$$\Rightarrow \vec{g}(r) \propto \vec{u}_r$$

$$\Rightarrow \vec{g}(r) = g(r) \vec{u}_r$$

$\Rightarrow$ surface de Gauss : sphère de centre O de rayon r'

$$\Rightarrow \oint_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = \oint_S g(r') \vec{u}_r \cdot d\vec{S} \vec{u}_r = \oint_S g(r') dS$$

$$\begin{aligned} &= g(r') \oint_S dS = g(r') 4\pi r'^2 \\ &\quad \uparrow \\ &\quad r' = r \text{ sur } S \end{aligned}$$

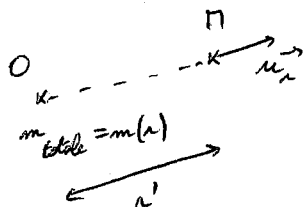
$$= -4\pi G m_{\text{int}}$$

Pour $r' > r$ (r = rayon de l'étoile), $m_{\text{int}} = m_{\text{totale}}$

$$\Rightarrow m_{\text{int}} = \mu_c \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\Rightarrow \vec{g}(r') = -\frac{G m_{\text{totale}}}{r'^2} \vec{u}_r = -\frac{G \mu_c \frac{4}{3} \pi r^3}{r'^2} \vec{u}_r$$

$$\vec{g}(r') = -\frac{G m_{\text{totale}}}{r'^2} \vec{u}_r = -\frac{G m(r)}{r'^2} \vec{u}_r$$



$\Rightarrow$ Ce champ est identique à celui qui serait créé par une masse ponctuelle $m(r)$ située au centre O de l'étoile.

A-5) on a $dm = \mu_c 4\pi r^2 dr$

La force subie par dm est $d\vec{f} = dm \vec{g}(r')$

$$\int^2 W = d\vec{f} \cdot d\vec{l} = dm \vec{g}(r') \cdot d\vec{l}$$

$$\begin{aligned} &= \mu_c 4\pi r^2 dr \left(-\frac{G m(r)}{r'^2} \vec{u}_r \right) \left(dr' \vec{u}_r + r' d\theta \vec{u}_\theta + r' \sin\theta d\varphi \vec{u}_\varphi \right) \\ &= -\mu_c 4\pi r^2 dr G m(r) \frac{dr'}{r'^2} \end{aligned}$$

$$\text{or } m(r) = \mu_c \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\Rightarrow \int^2 W = -G \frac{16\pi^2}{3} \mu_c^2 r^5 dr' \frac{dr'}{r'^2}$$

$$\delta W = \int_{\text{infini}}^r \int^2 W$$

$$= -G \frac{16\pi^2}{3} \mu_c^2 r^5 dr' \underbrace{\int_{\infty}^r \frac{dr'}{r'^2}}$$

$$\left[-\frac{1}{r'} \right]_{\infty}^r = -\frac{1}{r}$$

$$= - \left(-G \frac{16\pi^2}{3} \mu_c^2 r^5 dr' \right)$$

$$= -dE_p$$

$$\Rightarrow dE_p = -G \frac{16\pi^2}{3} \mu_c^2 r^4 dr$$

$$\Pi_0 = \mu_c \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$E_p = \int_0^R dE_p = -G \frac{16\pi^2}{3} \mu_c^2 \underbrace{\int_0^R r^4 dr}_{\frac{R^5}{5}}$$

$$E_p = -G \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \mu_c \right)^2 \left(\frac{1}{R} \times \frac{1}{5} \times 3 \right)$$

$$E_p = -K \frac{G \Pi_0^2}{R}$$

$$\text{avec } K = \frac{3}{5}$$

A-6) cf A-4) invariances + symétries + choix de la surface de Gauss $\Rightarrow$ idem

$$\Rightarrow \oint_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = g(r) 4\pi r^2$$

$$= -4\pi G m_{int}$$

$$\text{or } m_{int} = \mu_c \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\Rightarrow g(r) = - \frac{G m_{int}}{r^2} = - \frac{G \mu_c \frac{4}{3} \pi r^3}{r^2}$$

$$= - G \mu_c \frac{4}{3} \pi r$$

$$\text{or } \mu_c = \frac{\rho_0}{\frac{4}{3} \pi R^3}$$

$$\Rightarrow \vec{g} = \frac{-G \rho_0 r}{R^3} \vec{u}_r$$

à l'intérieur de l'étoile, à la distance r de O .

A-7) équilibre hydrostatique $\Rightarrow -\vec{\nabla} P + \mu_c \vec{g} = \vec{0}$

$\uparrow$ force volumique de pression $\uparrow$ force volumique de gravitation

$$\Rightarrow \frac{dP}{dr} = \mu_c g(r)$$

$P(R) = 0$ car au-dessus de l'étoile, on est dans le vide.

$$\int_R^r \frac{dP}{dr'} dr' = \int_0^{P(r)} dP = \int_R^r \mu_c g(r') dr'$$

$$\Rightarrow P(r) = \int_R^r \mu_c \left(\frac{-G \rho_0 r'}{R^3} \right) dr'$$

$$= - \frac{G \rho_0 \mu_c}{R^3} \underbrace{\int_R^r r' dr'}_{\left[\frac{r'^2}{2} \right]_R^r} = \frac{r^2 - R^2}{2}$$

$$P(r) = - \frac{G \rho_0 \mu_c}{2 R^3} (r^2 - R^2)$$

$$P(r) = - \frac{3 G \rho_0^2}{8 \pi R^6} (r^2 - R^2)$$

A-8) équation d'état des gaz parfaits: $PV = nRT$

$$\Rightarrow P \frac{V}{n} = \frac{n}{n} RT \Rightarrow \frac{P}{\mu_c} = \frac{R}{\rho_m} T$$

$$\Rightarrow P(r) = \frac{\mu_c R}{\rho_m} T(r)$$

gaz parfait: 1^{ère} loi de Joule: $dU = C_V dT$

loi de Mayer: $C_{p,m} - C_{v,m} = R$

définition de γ : $\gamma = \frac{C_{p,m}}{C_{v,m}} \Rightarrow C_{v,m} = \frac{R}{\gamma - 1}$
 $\Rightarrow C_V = \frac{n R}{\gamma - 1}$

on intègre la 1^{ère} loi de Joule: $U = C_V T + \text{choix}$

$$e(r) = \frac{U}{V} = \frac{C_V}{V} T = \frac{n R}{V(\gamma - 1)} T(r)$$

$$= \frac{n R}{V(\gamma - 1)} \frac{\rho_m}{\mu_c R} P(r)$$

$$= \frac{n R}{V(\gamma - 1)} \frac{\frac{n}{\rho_m}}{\frac{n}{\rho_m} R} P(r) = \frac{P(r)}{\gamma - 1}$$

$$\Rightarrow P(r) = (\gamma - 1) e(r) \quad P(R) = 0 \text{ et } e(R) = 0$$

(d'où le choix de la constante nulle en intégrant la 1^{ère} loi de Joule).

$$\Rightarrow e(r) = \frac{P(r)}{\gamma - 1}$$

$$E_{int} = \int_0^R \rho(r) 4\pi r^2 dr$$

$$= \int_0^R -\frac{36\pi_0^2}{(8-1)8\pi R^6} (r^2 - R^2) 4\pi r^2 dr$$

$$= \frac{-36\pi_0^2}{(8-1)8R^6} \left[\underbrace{\int_0^R r^4 dr}_{\frac{R^5}{5}} - R^2 \underbrace{\int_0^R r^2 dr}_{\frac{R^3}{3}} \right]$$

$$\frac{R^5}{5} - \frac{R^5}{3} = -\frac{2}{15} R^5$$

$$E_{int} = \frac{GM_0^2}{5(8-1)R}$$

$$\text{or } E_p = -K \frac{GM_0^2}{R} = -K 5(8-1) E_{int}$$

avec $K = \frac{3}{5}$

$$\Rightarrow E_p = -5K(8-1) E_{int} = -3(8-1) E_{int}$$

A-9) $\pi_0 = \rho_c \frac{4}{3} \pi R^3 = 4 \cdot 10^{23} \text{ kg} = \pi_0$

$$E_p = -K \frac{GM_0^2}{R} = -\frac{3}{5} \frac{GM_0^2}{R} = -6 \cdot 10^{44} \text{ J} = E_p$$

$$E_{int} = \frac{-E_p}{3(8-1)} = 3 \cdot 10^{44} \text{ J} = E_{int}$$

$$P(0) = \frac{36\pi_0^2}{8\pi R^4} = 1 \cdot 10^{32} \text{ Pa} = P(0)$$

A-10) équation de Poisson - Gauss: $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

$$\vec{E} \Leftrightarrow \vec{g}$$

ρ : densité volumique de charge $\Leftrightarrow \mu$ masse volumique
($q \Leftrightarrow m$)

$$\frac{1}{\epsilon_0} \Leftrightarrow -4\pi G$$

$$\Rightarrow \text{div } \vec{g} = -4\pi G \mu$$

$$\text{or } \vec{g} = g(r) \vec{u}_r$$

$$\Rightarrow \text{div } \vec{g} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 g(r))$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 g(r)) = -4\pi G \mu(r)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dr} (r^2 g(r)) = -4\pi G r^2 \mu(r)$$

statique des fluides: $-\text{grad } P + \mu(r) \vec{g} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \frac{dP}{dr} = \mu(r) g(r)$$

$$\text{or } P(r) = K_0 \mu(r)^k \Rightarrow \frac{dP}{dr} = K_0 k \mu^{k-1} \frac{d\mu}{dr}$$

$$\Rightarrow g(r) = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dr} = K_0 k \mu^{k-2} \frac{d\mu}{dr}$$

on remplace dans l'équation différentielle:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \mu^{k-2} \frac{d\mu}{dr} \right) = -\frac{4\pi G}{k K_0} r^2 \mu$$

A-11) $y = \left(\frac{\mu}{\mu_c} \right)^{1/n}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dr} = \frac{1}{\mu_c^{1/n}} \frac{1}{n} \mu^{\frac{1}{n}-1} \frac{d\mu}{dr} \quad (a)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 y}{dr^2} = \frac{1}{\mu_c^{1/n}} \frac{1}{n} \left(\mu^{\frac{1}{n}-1} \frac{d^2 \mu}{dr^2} + \left(\frac{1}{n}-1 \right) \mu^{\frac{1}{n}-2} \left(\frac{d\mu}{dr} \right)^2 \right) \quad (b)$$

D'autre part, $k=1+\frac{1}{n}$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \mu^{k-2} \frac{d\mu}{dr} \right) = \frac{d}{dr} \left(r^2 \mu^{\frac{1}{n}-1} \frac{d\mu}{dr} \right)$$

$$= \frac{d}{dr} \left(r^2 \mu^{\frac{1}{n}-1} \right) \frac{d\mu}{dr} + r^2 \mu^{\frac{1}{n}-1} \frac{d^2 \mu}{dr^2}$$

$$= 2r \mu^{\frac{1}{n}-1} \frac{d\mu}{dr} + r^2 \left(\frac{1}{n}-1 \right) \mu^{\frac{1}{n}-2} \left(\frac{d\mu}{dr} \right)^2 + r^2 \mu^{\frac{1}{n}-1} \frac{d^2 \mu}{dr^2}$$

(a) $\Rightarrow 2r \mu_c^{1/n} \frac{dy}{dr}$

(b) $\Rightarrow r^2 \mu_c^{1/n} \frac{d^2 y}{dr^2}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dr} \left(r^2 \mu^{k-2} \frac{dy}{dr} \right) = r^2 \mu_c^{1/m} \frac{d^2 y}{dr^2} + 2 r m \mu_c^{1/m} \frac{dy}{dr}$$

$$= - \frac{4\pi G}{k K_0} r^2 \mu_c$$

$$= - \frac{4\pi G}{(1+\frac{1}{m}) K_0} r^2 \mu_c y^m$$

$$k = 1 + \frac{1}{m}$$

$$\mu = \mu_c y^m$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 y}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dy}{dr} = - \frac{4\pi G}{(m+1) K_0} \mu_c^{1-\frac{1}{m}} y^m$$

Ça ne colle pas à l'équation proposée.

y est donc considéré comme une fonction de x

$$\frac{dy}{dr} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dr} \underset{x=\frac{r}{a}}{=} y' \frac{1}{a}$$

$$\frac{d^2 y}{dr^2} = \frac{d \left(\frac{y'}{a} \right)}{dx} \frac{dx}{dr} = \frac{1}{a^2} y''$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2} y'' + \frac{2}{a r} y' = - \frac{4\pi G}{(m+1) K_0} \mu_c^{1-\frac{1}{m}} y^m$$

$$\Rightarrow y'' + 2 \frac{a}{r} y' = - \frac{4\pi G a^2 \mu_c^{1-\frac{1}{m}}}{(m+1) K_0} y^m$$

$$\Rightarrow \boxed{y'' + 2 \frac{y'}{x} = - y^m}$$

à la condition que $\frac{4\pi G a^2 \mu_c^{1-\frac{1}{m}}}{(m+1) K_0} = 1$

$$\Rightarrow a = \sqrt{\frac{(m+1) K_0}{4\pi G \mu_c^{1-\frac{1}{m}}}}$$

$$\text{or } k = 1 + \frac{1}{m} \Rightarrow m = \frac{1}{k-1} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow 1 - \frac{1}{m} = 2 - k \\ \Rightarrow m+1 = \frac{k}{k-1} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \sqrt{\frac{k K_0}{4\pi G (k-1) \mu_c^{2-k}}}}$$

A-19) * en $r=0$, on est au cœur $\Rightarrow \mu(0) = \mu_c$

$$\Rightarrow y_n(0) = \left(\frac{\mu(0)}{\mu_c} \right)^{1/m} = 1^{1/m} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{y_m(0) = 1}$$

* en $r=0$, la masse volumique est maximale

(à cause de la gravitation!) $\Rightarrow \frac{d\mu}{dr}(r=0) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dy_m}{dx}(0) = 0}$$

$$\left(\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dr} \frac{dr}{dx} \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{1}{a}}}{=} \frac{1}{a} \frac{1}{\mu_c^{1/m}} \frac{1}{m} \mu_c^{\frac{1}{m}-1} \frac{d\mu}{dr} \right)$$

$$* m=1 \Rightarrow y'' + 2 \frac{y'}{x} = -y$$

$$y_1 = \frac{\sin x}{x}$$

$$\Rightarrow y_1' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}$$

$$\Rightarrow y_1'' = \frac{-x \sin x - \cos x}{x^2} - \frac{x^2 \cos x - 2x \sin x}{x^4}$$

$$= -\frac{\sin x}{x} - 2 \frac{\cos x}{x^2} + 2 \frac{\sin x}{x^3}$$

$$\Rightarrow y_1'' + 2 \frac{y_1'}{x} = -\frac{\sin x}{x} - 2 \frac{\cos x}{x^2} + 2 \frac{\sin x}{x^3} + 2 \left(\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} \right)$$

$$= -\frac{\sin x}{x} = -y_1$$

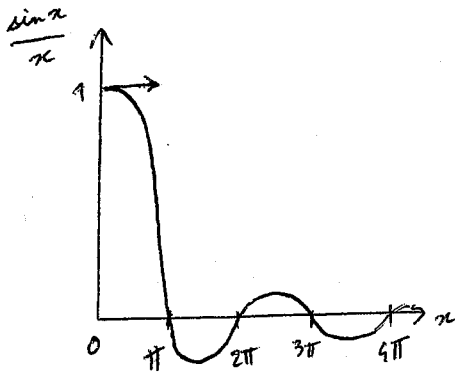
$$\Rightarrow \frac{\sin x}{x} \text{ vérifie l'équation différentielle}$$

$$* y_1(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{x}{x} = 1 \quad \text{OK}$$

$$* y_1'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} \right) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2} = 0 \quad \text{OK}$$

La solution proposée vérifie l'équation différentielle et les 2 conditions aux limites, c'est donc la solution au problème.

A-13)



$\frac{\sin x}{x}$ s'annule en $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}^*$

$$y = \left(\frac{\mu(r)}{\mu_c} \right)^{1/n} > 0$$

= 0 en $r = R$ rayon de l'étoile

($y < 0$ n'a pas de sens physique)

$\Rightarrow$ en $r = R$, $x = \pi$

$$\Rightarrow \frac{R}{a} = \pi \Rightarrow R = \pi a$$

$$\text{or } a = \sqrt{\frac{k K_0}{4\pi G (k-1) \mu_c^{2-k}}} \quad \text{avec } n=1 \Rightarrow k = 1 + \frac{1}{n} = 2$$

$$\Rightarrow R = \pi \sqrt{\frac{2 K_0}{4\pi G (2-1) \mu_c^{2-2}}} = \sqrt{\frac{\pi K_0}{2G}}$$

$$R = \sqrt{\frac{\pi K_0}{2G}}$$

$$P(r) = K_0 \mu(r)^k = K_0 \mu(r)^2$$

$$\Rightarrow P(0) = K_0 \mu(0)^2 = K_0 \mu_c^2$$

$$\Rightarrow K_0 = \frac{P(0)}{\mu_c^2} = \frac{1 \cdot 10^{32}}{(10^{12})^2} = 10^{-2} \text{ SI}$$

$$R = 1 \cdot 10^4 \text{ m} \approx 10 \text{ km}$$

Rq: même valeur qu'en A-3)

Etude du mouvement de rotation

A-14) Dans R^* , l'étoile a uniquement un mouvement de rotation autour de l'axe Ox_3 à la vitesse angulaire Ω .

$$\Rightarrow E_c^* = \frac{1}{2} I \Omega^2 = \frac{1}{5} M_0 R^2 \Omega^2$$

$$A-15) \quad T = \frac{2\pi}{\Omega}$$

"relieu" = ?? Que répondre à cette question?

* lors d'un freinage, T augmente $\Rightarrow \frac{dT}{dt} > 0$

et $\Delta E_c < 0$ (l' E_c diminue)

$\Rightarrow \Delta E_c$ et $\frac{dT}{dt}$ sont de signes opposés.

$$* E_c = \frac{1}{2} I \Omega^2 \Rightarrow \frac{dE_c}{dt} = I \Omega \frac{d\Omega}{dt}$$

$$\text{or } \Omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \frac{d\Omega}{dt} = -\frac{2\pi}{T^2} \frac{dT}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dE_c}{dt} = -I \Omega \frac{2\pi}{T^2} \frac{dT}{dt} = -\frac{4\pi^2 I}{T^3} \frac{dT}{dt}$$

$$\Rightarrow E_c(t_2) - E_c(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} -\frac{4\pi^2 I}{T^3} \frac{dT}{dt} dt$$

A-16) Dans R^* , le point M (à la distance ℓ de l'axe (Ox_3)) a un mouvement de rotation autour de (Ox_3) à la vitesse angulaire Ω . $\Rightarrow \vec{v}(M) = \ell \Omega \vec{u}_\phi$

On se place à présent dans le référentiel de l'étoile. On suppose que $\Omega = c^{-1}$.

$$\Rightarrow \vec{F}_{ie} = m \Omega^2 \ell \vec{u}_\rho$$

$$\begin{aligned} \delta W &= \vec{F}_{ie} \cdot d\vec{\ell} = m \Omega^2 \ell \vec{u}_\rho \cdot (d\ell \vec{u}_\rho + \ell d\theta \vec{u}_\theta + d\gamma \vec{u}_\gamma) \\ &= m \Omega^2 \ell d\ell = d\left(\frac{m \Omega^2 \ell^2}{2}\right) = -dE_{pi} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E_{pie} = -\frac{m \Omega^2 \ell^2}{2} \quad \text{choix}$$

$E_{p_{ie}}$ est maximale pour $\ell=0$, c'est-à-dire sur l'axe de rotation de l'étoile.

Si on s'intéresse à un point M sur l'étoile,

$E_{p_{ie}}$ est maximale sur les pôles (nord et sud).

A-17) Sur l'équateur: $\rho=R \Rightarrow \vec{F}_{ie} = m\Omega^2 R \vec{u}_\rho$

force de gravitation: $\vec{F} = -\frac{m\pi_0 G}{R^2} \vec{u}_\rho$

↑
cf A-6) avec $r=R$

On veut une condition sur Ω !! Bon ???

On va chercher une condition sur Ω pour que la particule soit immobile dans le référentiel de l'étoile.

$$\vec{F}_{ie \text{ coriolis}} = -m(2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_h)$$

↑
équilibre relatif

$$\Rightarrow \vec{F}_{\text{gravitation}} + \vec{F}_{ie} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow -\frac{m\pi_0 G}{R^2} \vec{u}_\rho + m\Omega^2 R \vec{u}_\rho = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \Omega = \sqrt{\frac{\pi_0 G}{R^3}}$$

$$\text{or } \pi_0 = \mu_c \frac{4}{3} \pi R^3 \Rightarrow \Omega = \sqrt{\frac{4\pi G \mu_c}{3}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\mu_c}}$$

A-18) naine blanche $\Rightarrow T = 1.10^4 \text{ s}$

étoile à neutrons $\Rightarrow T = 1.10^{-2} \text{ s}$

A-19) La vitesse de libération est la vitesse à laquelle il faut lancer un point soumis à la seule gravitation à partir de la surface de l'astre pour que ce point

aille à l'infini. Dans ce cas, l'énergie mécanique est nulle (limite état lié / état libre)

$$E_{\text{gravitation}} + E_c = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{G\pi_0 m}{R} + \frac{1}{2} m v_\ell^2 = 0$$

$$\Rightarrow v_\ell = \sqrt{\frac{2\pi_0 G}{R}} = \sqrt{\frac{8\pi \mu_c G R^3}{3R}}$$

$$v_\ell = \sqrt{\frac{2\pi_0 G}{R}} = 2R \sqrt{\frac{2\pi \mu_c G}{3}}$$

Pour que la lumière ne s'échappe pas de l'étoile, il faut que $c < v_\ell$.

↑
vitesse de la lumière ds le vide

soit une masse volumique quasi-infinie.

Il s'agit d'un trou noir.

PULSAR ET ELECTROMAGNETISMEB) Electromagnetisme :

B.1) Sur les lignes de champ, $\vec{B}$ et $d\vec{l}$ sont colinéaires.

$$\left. \vec{B} \right|_{B_r}^{B_\theta} = \alpha d\vec{l} = \alpha \begin{vmatrix} dr \\ r d\theta \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha} = \frac{dr}{B_r} = \frac{r d\theta}{B_\theta}$$

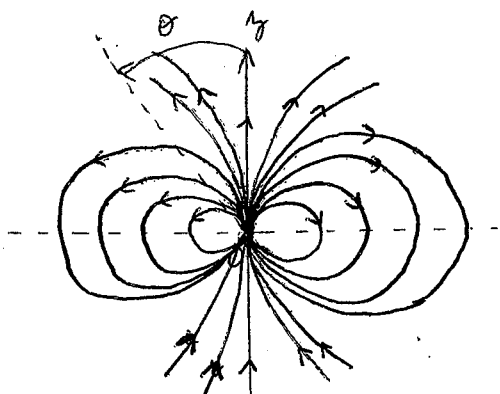
$$\Rightarrow \frac{dr}{\frac{2\mu_0 I_0 \cos\theta}{4\pi r^3}} = \frac{r d\theta}{\frac{\mu_0 I_0 \sin\theta}{4\pi r^3}}$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{2 \cos\theta} = \frac{r d\theta}{\sin\theta} \Rightarrow \frac{dr}{r} = 2 \frac{\cos\theta d\theta}{\sin\theta}$$

$$\Rightarrow \ln r = 2 \ln(\sin\theta) + c = \ln \sin^2\theta + \ln r_0$$

$\uparrow c = \ln r_0$

$$\Rightarrow \boxed{r = r_0 \sin^2\theta}$$



* en $\theta=0$ et $\theta=\pi$, $r=0$

* $r = r_{\max} = r_0$ en $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\theta = -\frac{\pi}{2}$

* $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, $B_r > 0$, d'où l'orientation des lignes de champ

B.2) $\boxed{\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})}$ force de Lorentz

$$\vec{E} = \vec{0} \text{ et } \vec{B} = B \vec{e}_y \Rightarrow \vec{F} = q \vec{v} \wedge B \vec{e}_y$$

On néglige toutes les autres forces (donc le poids, et on se place dans un référentiel galiléen $\Rightarrow$ pas de forces d'inertie)

$$\text{RFD: } m \vec{a} = q \vec{v} \wedge B \vec{e}_y$$

$$m \begin{vmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{vmatrix} = q B \begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} = q B \begin{vmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m \ddot{x} = q B \dot{y} \\ m \ddot{y} = -q B \dot{x} \\ \ddot{z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \ddot{x} = q B \dot{y} + c = \frac{qB}{m} y + c \\ m \ddot{y} = -q B \dot{x} + c = -\frac{qB}{m} x + c \\ \ddot{z} = c = \frac{qB}{m} \end{cases}$$

or à $t=0$, $\dot{y} = v_{0,y}$; $\dot{x} = v_{0,x}$; $\dot{z} = 0$

$z=0$; $x=0$; $y=0$
(on choisit l'origine là où se trouve la charge initiale)

$$\Rightarrow \begin{cases} m(\dot{x} - v_{0,x}) = q B y \\ m \dot{y} = -q B x \\ \dot{z} = v_{0,y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \frac{qB}{m} y + v_{0,x} \\ \dot{y} = -\frac{qB}{m} x \end{cases}$$

$$\text{or } \begin{cases} m \ddot{x} = q B \dot{y} \\ m \ddot{y} = -q B \dot{x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m \ddot{x} = -\frac{q^2 B^2}{m} x \\ m \ddot{y} = -\frac{q^2 B^2}{m} y - q B v_{0,x} \\ \dot{z} = v_{0,y} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} + \frac{q^2 B^2}{m^2} x = 0 \\ \ddot{y} + \frac{q^2 B^2}{m^2} y = -\frac{qB}{m} v_{0,x} \\ \dot{z} = v_{0,y} \end{cases}$$

on reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\frac{qB}{m}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \alpha_1 \cos\left(\frac{qB}{m}t + \varphi_1\right) \\ y = \alpha_2 \cos\left(\frac{qB}{m}t + \varphi_2\right) - \frac{m}{qB} v_{0z} \\ z = v_{0z} t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \dot{x} = -\alpha_1 \frac{qB}{m} \sin\left(\frac{qB}{m}t + \varphi_1\right)$$

$$\dot{y} = -\alpha_2 \frac{qB}{m} \sin\left(\frac{qB}{m}t + \varphi_2\right)$$

conditions initiales :

$$\begin{cases} 0 = \alpha_1 \cos \varphi_1 \\ 0 = \alpha_2 \cos \varphi_2 - \frac{m}{qB} v_{0z} \\ v_{0z} = -\alpha_1 \frac{qB}{m} \sin \varphi_1 \\ 0 = -\alpha_2 \frac{qB}{m} \sin \varphi_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varphi_2 = 0, \alpha_2 = \frac{m}{qB} v_{0z}, \varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \alpha_1 = \frac{m v_{0z}}{qB}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{m v_{0z}}{qB} \sin\left(\frac{qB}{m}t\right) \\ y = \frac{m v_{0z}}{qB} \left(\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) - 1\right) \\ z = v_{0z} t \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + \left(y + \frac{m v_{0z}}{qB}\right)^2 = \left(\frac{m v_{0z}}{qB}\right)^2 \underbrace{\left(\sin^2 \frac{qBt}{m} + \cos^2 \frac{qBt}{m}\right)}_1$$

$$\Rightarrow x^2 + \left(y + \frac{m v_{0z}}{qB}\right)^2 = \left(\frac{m v_{0z}}{qB}\right)^2 = R^2$$

On reconnaît l'équation d'un cercle dans le plan (xOy) , centré en $\begin{cases} y = -\frac{m v_{0z}}{qB} \\ x = 0 \end{cases}$ et de rayon

$$R = \frac{m v_{0z}}{qB}$$

or $z = v_{0z} t$ croît linéairement avec t

$\Rightarrow$ mouvement hélicoïdal



$$\dot{x} = v_{0z} \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) ; \dot{y} = -v_{0z} \sin\left(\frac{qB}{m}t\right) ; \dot{z} = v_{0z}$$

$$\Rightarrow E_{c\perp} = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m v_{0z}^2 = E_{c\perp}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} m v_{0z}^2 + \frac{1}{2} m v_{0z}^2 = E_c$$

$\Rightarrow E_c$ et $E_{c\perp}$ sont constantes au cours du temps.

B.3) $\mu = IS$

avec S la surface de la spire de rayon $R = \frac{m v_{0z}}{qB}$

$$\Rightarrow S = \pi R^2 = \frac{\pi m^2 v_{0z}^2}{q^2 B^2}$$

et I le courant parcourant la spire

$\Rightarrow I = \frac{q}{T}$ avec T la période (temps qu'il faut pour que la charge fasse le tour du cercle).

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} \text{ et on a vu que } \Omega = \frac{qB}{m}$$

$$\Rightarrow I = \frac{q\Omega}{2\pi} = \frac{q^2 B}{2\pi m}$$

$$\Rightarrow \mu = IS = \frac{q^2 B}{2\pi m} \frac{\pi m^2 v_{0z}^2}{q^2 B^2}$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{1}{2} m v_{0z}^2 \times \frac{1}{B}$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{E_{c\perp}}{B}$$

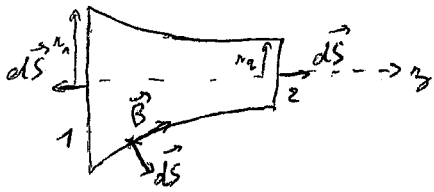
B.4/a) équation de Maxwell - flux : $\text{div } \vec{B} = 0$

$$\Rightarrow \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Soit S une surface fermée constituée de :

* $S_{\text{latérale}}$ = tube de champ

* 2 bases = 2 sections droites du tube de champ
= 2 disques



$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_{\text{lat}}} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \iint_{\text{base 1}} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \iint_{\text{base 2}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

par déf. du tube de champ: $\vec{B} \perp d\vec{S}$

$$\Rightarrow - \iint_{\text{base 1}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{base 2}} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \iint_{\text{section 1}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{section 2}} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

avec $d\vec{S} = +dS \vec{e}_z$ (vers la droite).

$\Rightarrow$ le flux de $\vec{B}$ à travers une section est constant.

$$\Rightarrow \iint_{\text{section}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = c^{\frac{k}{2}} = \iint_{\text{section}} B_z dS$$

or l'énoncé dit que " B_z est lentement variable"

$\Rightarrow$ on suppose $B_z \approx c^{\frac{k}{2}}$ sur la section

$$\Rightarrow B_z \pi r^2 = c^{\frac{k}{2}} \Rightarrow \boxed{r^2 B_z = c^{\frac{k}{2}}} \quad \text{sur un tube de champ}$$

$$b) \mu = \frac{E_{c1}}{B_z} = c^{\frac{k}{2}} = \frac{\frac{1}{2} m (\rho \Omega)^2}{B_z}$$

$$\text{or } \Omega = \frac{q B_z}{m} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} m \rho^2 \frac{q^2 B_z^2}{m^2}}{B_z} = c^{\frac{k}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho^2 B_z = c^{\frac{k}{2}}}$$

or sur un tube de champ: $r^2 B_z = c^{\frac{k}{2}}$

$\Rightarrow$ la trajectoire est une succession de cercles qui suivent un tube de champ.

c) Quand on va de $r_1 = 0$ à $r_2 = r_2$, $\rho \nearrow \Rightarrow B_z \nearrow$

$$\text{or } \mu = \frac{E_{c1}}{B_z} = c^{\frac{k}{2}} \Rightarrow \boxed{E_{c1} \nearrow}$$

or le système n'est soumis qu'à une seule force qui ne travaille pas: $(P = \vec{F} \cdot \vec{v} = (q \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0)$

D'après le thm de l'énergie cinétique: $E_c = c^{\frac{k}{2}}$

$$\Rightarrow E_{c1} + \frac{1}{2} m v_z^2 = c^{\frac{k}{2}}$$

$$\text{or } E_{c1} \nearrow \Rightarrow \boxed{v_z \searrow}$$

$$* \left. v_z(r_2) = 0 \right| \Rightarrow E_{c1}(r_2) = E_{c1}(r_0) + \frac{1}{2} m v_{0z}^2$$

$$\frac{1}{2} m (r_2 \Omega_2)^2 = \frac{1}{2} m (r_0 \Omega_0)^2 + \frac{1}{2} m v_{0z}^2$$

$$\text{or } \Omega = \frac{q B_z}{m} \Rightarrow \frac{q^2}{m^2} r_2^2 B_z^2(r_2) = \frac{q^2}{m^2} r_0^2 B_z^2(r_0) + v_{0z}^2$$

$$\text{or } r^2 B_z = c^{\frac{k}{2}} \Rightarrow B_z(r_2) = \frac{r_0^{\frac{k}{2}}}{r_2^{\frac{k}{2}}} B_z(r_0)$$

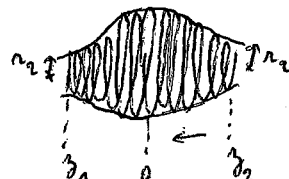
$$\frac{q^2}{m^2} \frac{r_0^{\frac{k}{2}}}{r_2^{\frac{k}{2}}} B_z^2(r_0) = \frac{q^2}{m^2} r_0^{\frac{k}{2}} B_z^2(r_0) + v_{0z}^2$$

$$\frac{q^2}{m^2} r_0^{\frac{k}{2}} B_z^2(r_0) \left(\frac{r_0^{\frac{k}{2}}}{r_2^{\frac{k}{2}}} - 1 \right) = v_{0z}^2$$

$$\frac{r_0^{\frac{k}{2}}}{r_2^{\frac{k}{2}}} = 1 + \frac{m^2 v_{0z}^2}{q^2 r_0^{\frac{k}{2}} B_z^2(r_0)}$$

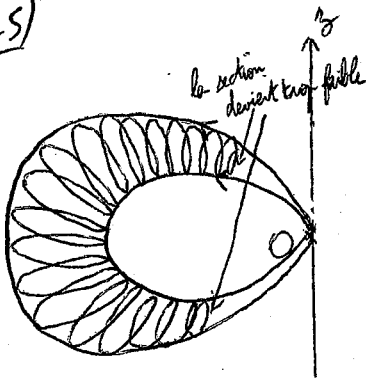
$$\Rightarrow \boxed{r_2 = r_0 \sqrt{1 + \frac{m^2 v_{0z}^2}{q^2 r_0^{\frac{k}{2}} B_z^2(r_0)}}}$$

* mouvement ultérieur: le champ magnétique a une composante radiale qui va créer une force sur la charge $\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}_r \propto -\vec{e}_z \Rightarrow$ la charge va repartir dans le sens des z_j décroissants (tout en continuant à tourner)



Elle ira jusqu'en z_1 où le rayon du tube est r_2 . Puis elle ira vers la droite, etc.

B-5)



la particule sera piégée sur le tube de champ, et quand la section devient trop faible, la particule fera demi-tour.

C'est le principe de la protection de la Terre contre les vents solaires grâce au champ magnétique terrestre.

B-6) Dans le référentiel de l'étoile : la particule est à l'équilibre, donc immobile, et est placée dans un champ magnétique permanent $\Rightarrow$ pas de phénomène d'induction $\Rightarrow \vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = \vec{0}$
 * Dans R^* , $\vec{F} = \vec{0}$ car invariance des forces par changement de référentiel.

$$\Rightarrow q(\vec{E}_1 + (\vec{v}_2 + \vec{v}_h) \wedge \vec{B}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_1 = -\vec{v}_2 \wedge \vec{B}$$

or $\vec{v}_2 = \vec{\Omega} \wedge \vec{r}$ (car rotation autour de l'axe (Oz))
 en coordonnées cylindriques

$$\Rightarrow \vec{E}_1 = -(\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) \wedge \vec{B} = \vec{B} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) = \vec{E}_1$$

Sur l'équateur : $\vec{B} = -B\vec{e}_z$ (cf orientation lignes de champ)

$$\vec{r} = R\vec{e}_r$$

$$\vec{\Omega} = \Omega\vec{e}_z$$

$$\vec{E}_1 = -B\vec{e}_z \wedge (\Omega\vec{e}_z \wedge R\vec{e}_r)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_1 = R\Omega B\vec{e}_r} \text{ sur l'équateur}$$

porté par $+\vec{e}_r \Rightarrow$ expulse des particules

B-7)
$$\boxed{E_1 = 6 \cdot 10^6 \text{ V.m}^{-1}}$$

co-rotation $\Rightarrow$ même vitesse de rotation

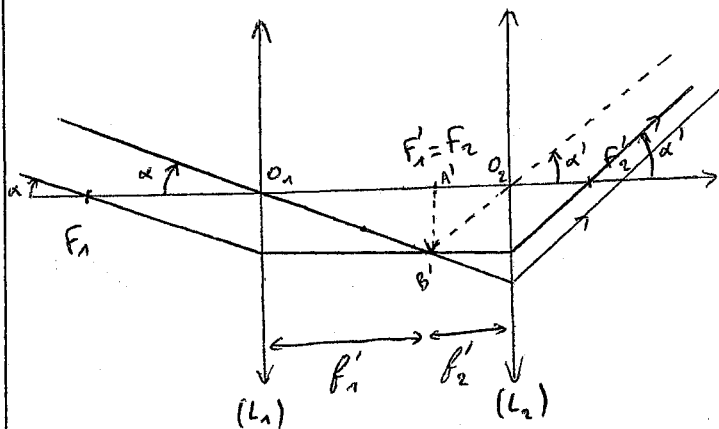
$$v_{\text{max}} = c = r_{\text{max}} \Omega$$

$$\Rightarrow \boxed{r_{\text{max}} = \frac{c}{\Omega} = \frac{3 \cdot 10^8}{6} = 5 \cdot 10^7 \text{ m}}$$

PULSAR ET ELECTROMAGNETISMEC) Observations astronomiques :Lunette de Galilée :

C-1) Le foyer image de l'objectif et le foyer objet de l'oculaire doivent être confondus. Ainsi, un objet à l'infini donnera une image intermédiaire dans le plan focal image de (L_1) , c'est-à-dire dans le plan focal objet de (L_2) , et ainsi l'image finale se trouvera à l'infini.

⇒ L'oculaire doit se trouver à $(f'_1 + f'_2)$ derrière l'objectif.



Dans le triangle $O_1 A' B'$: $\tan |\alpha| = \frac{|A' B'|}{f'_1} \approx |\alpha|$

Dans le triangle $O_2 A' B'$: $\tan |\alpha'| = \frac{|A' B'|}{f'_2} \approx |\alpha'|$

$$|G| = \frac{|\alpha'|}{|\alpha|} = \frac{f'_1}{f'_2}$$

ou α et α' sont de signes opposés

$$\Rightarrow G = - \frac{f'_1}{f'_2}$$

C-2) on veut augmenter $|G|$:

- * on peut augmenter f'_1
- * on peut diminuer f'_2 .

limites :

* si on augmente f'_1 , on augmente l'encombrement de la lunette (distance entre les 2 lentilles).

* si on diminue f'_2 , alors le diamètre de (L_2) diminue.

→ on s'éloignera des conditions de Gauss

→ il faut s'assurer que toute la lumière traverse

(L_2) , qu'il n'y en a pas qui passe à côté !

→ on augmente le phénomène de diffraction.

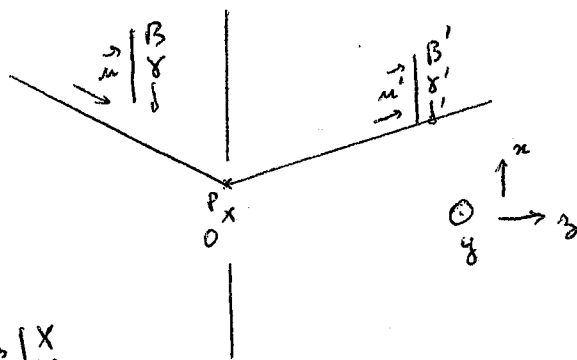
C-3) On utilise le principe d'Huygens - Fresnel.

D'autre part, on est dans le cadre de la diffraction de Fraunhofer car la source est à l'infini et l'observation se fait à l'infini (dans le plan focal image de la lentille convergente).

$$\Rightarrow \underline{a}(\eta) = \underline{K} \iint_{\text{diaphragme}} e^{j\vec{P}} dS(P) \quad \text{avec } P \text{ un point}$$

comant des diaphragme et $\vec{P} = \frac{2\pi}{\lambda} (\vec{u}' - \vec{u}) \cdot \vec{OP}$

↑
vecteurs unitaires



$$\vec{OP} \begin{vmatrix} x \\ y \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{P} = (B' - B)x + (y' - y)y \quad \text{et } dS(P) = dx dy$$

$$\Rightarrow \underline{a}(\eta) = \underline{K} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(B'-B)x} dx \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(y'-y)y} dy$$

$$\underline{J} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(B'-B)x} dx = \frac{\lambda}{j2\pi(B'-B)} \left[e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(B'-B)x} \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}$$

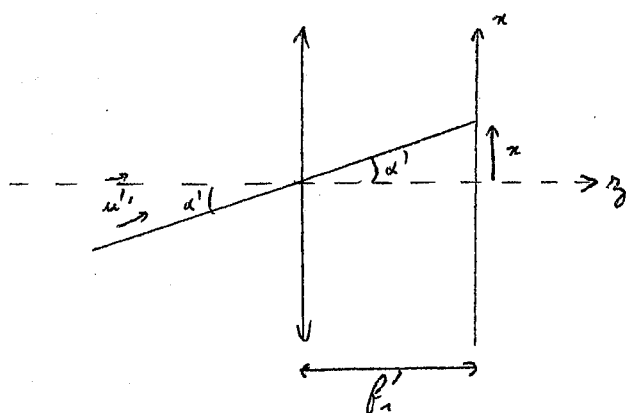
$$\Rightarrow S = \frac{\lambda}{j 2\pi(B'-B)} \left(\underbrace{e^{j \frac{\pi(B'-B)x}{\lambda}} - e^{-j \frac{\pi(B'-B)x}{\lambda}}}_{2j \sin \frac{\pi(B'-B)x}{\lambda}} \right)$$

$$S = \frac{\lambda}{\pi(B'-B)} \sin \frac{\pi(B'-B)x}{\lambda} \times \frac{a}{a} = a \operatorname{sinc} \frac{\pi(B'-B)x}{\lambda}$$

avec $\operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}$

$$\Rightarrow \underline{a}(\eta) = \underbrace{K a^2}_{a_0} \operatorname{sinc} \frac{\pi(B'-B)x}{\lambda} \operatorname{sinc} \frac{\pi(B'-B)y}{\lambda}$$

ici, on évalue en incidence normale $\Rightarrow \beta = \gamma = 0$



$$\vec{u}' \cdot \vec{u}_x = \beta' = \sin \alpha' \approx \alpha' \quad \uparrow \text{approximation de Gauss : } \alpha' \ll 1$$

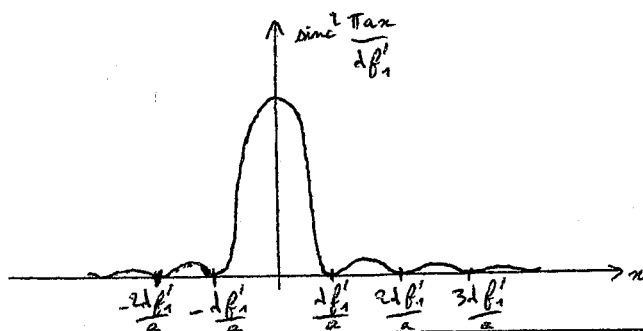
$$\tan \alpha' \approx \alpha' = \frac{x}{\beta_1} \Rightarrow \beta' = \frac{x}{\beta_1}$$

De même, $\gamma' = \frac{y}{\beta_1}$

$$\Rightarrow \underline{a}(\eta) = a_0 \operatorname{sinc} \frac{\pi x}{\lambda \beta_1} \operatorname{sinc} \frac{\pi y}{\lambda \beta_1}$$

C-4) $I = \langle a(\eta)^2 \rangle$

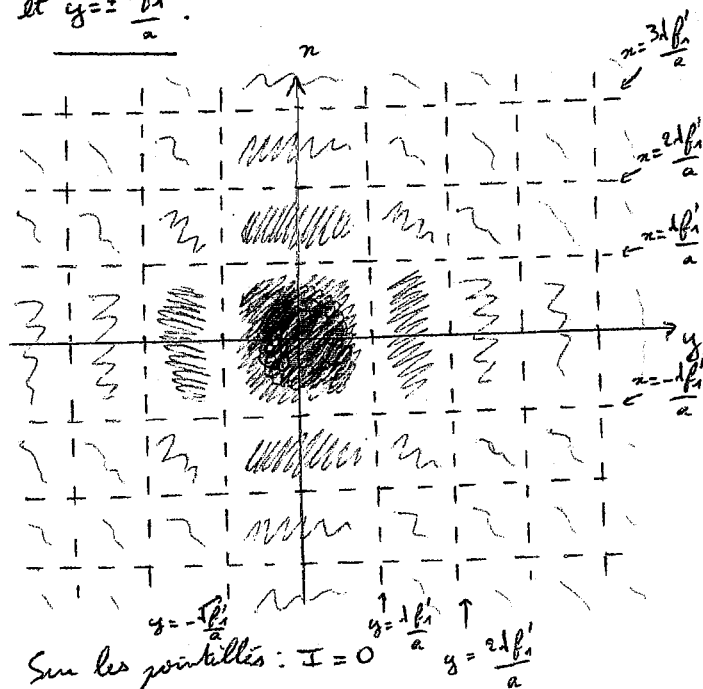
$$\Rightarrow I = I_0 \operatorname{sinc}^2 \frac{\pi x}{\lambda \beta_1} \operatorname{sinc}^2 \frac{\pi y}{\lambda \beta_1}$$



$\Rightarrow$ l'intensité est maximale pour $x=0$ et $y=0$, soit au foyer image de la lentille (= image géométrique de la source).

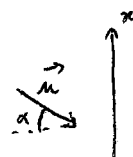
l'intensité est nulle pour la 1^{ère} fois en $x = \pm \frac{\lambda \beta_1}{a}$

et $y = \pm \frac{\lambda \beta_1}{a}$.



C-5) Cette fois-ci, $\beta \neq 0$

$$\vec{u} \cdot \vec{u}_x = \beta = -\sin \alpha$$

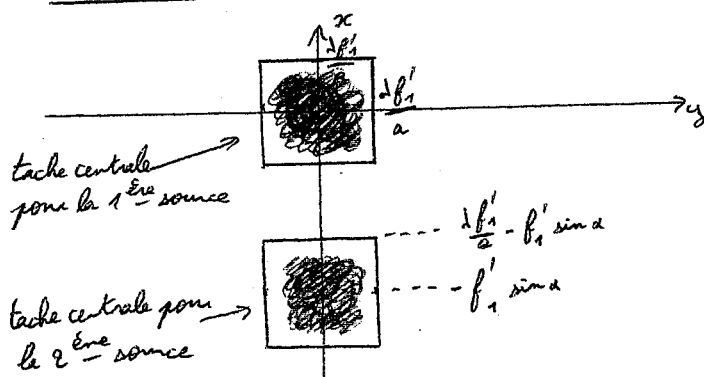


$$\Rightarrow \underline{a}(\eta) = a_0 \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi x}{\lambda} \left(\frac{x}{\beta_1} + \sin \alpha \right) \right) \operatorname{sinc} \left(\frac{\pi y}{\lambda \beta_1} \right)$$

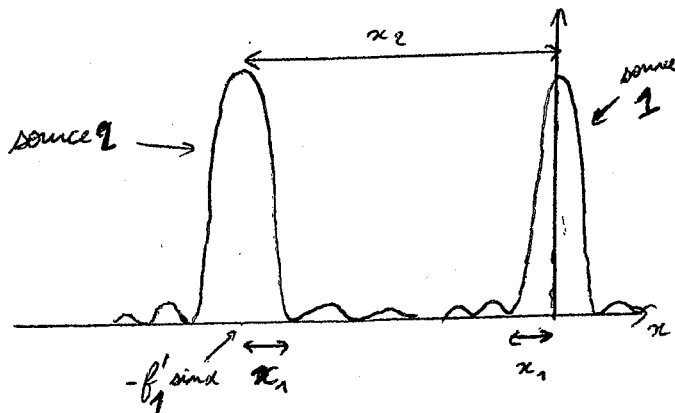
C-6) Les 2 sources sont incohérentes car distinctes $\Rightarrow$ on peut sommer les intensités, chaque source donnera sa propre figure de diffraction.

Pour la 2^{ème} source, l'intensité est maximale en

$$x = -\beta_1 \sin \alpha \text{ et } y = 0$$



Pour savoir si les images sont séparées, on utilise le critère de Rayleigh:



les images sont séparées si $x_2 > x_1$

$$\Rightarrow f_1' \sin \alpha > \frac{1}{2} f_1'$$

$$\Rightarrow \sin \alpha > \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha > \text{Arcsin} \frac{1}{2} = \alpha_{\min} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha_{\min} = \frac{1}{2} = 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$$

Détection d'une radio source

C-7) A la sortie du sommateur, on a $\rho_1(t) + \rho_2(t)$.

On envoie ce signal sur les 2 entrées du multiplieur.

$\Rightarrow$ en sortie du multiplieur, on a:

$$k (\rho_1(t) + \rho_2(t)) (\rho_1(t) + \rho_2(t)) = k (\rho_1(t) + \rho_2(t))^2$$

$$= k (S_0 \cos \omega t + S_0 \cos(\omega t + \varphi))^2$$

$$= k S_0^2 (\cos^2 \omega t + \cos^2(\omega t + \varphi) + 2 \cos \omega t \cos(\omega t + \varphi))$$

$$\text{or } \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad \text{et } 2 \cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$$

$$\Rightarrow \text{signal} = k S_0^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\omega t + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\omega t + 2\varphi) + \cos(2\omega t + \varphi) + \cos \varphi \right)$$

$$= k S_0^2 \left(1 + \cos \varphi + \frac{1}{2} \cos 2\omega t + \frac{1}{2} \cos(2\omega t + 2\varphi) + \cos(2\omega t + \varphi) \right)$$

$$\text{or } \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\Rightarrow \text{signal} = k S_0^2 \left(1 + \cos \varphi + \frac{1}{2} \cos 2\omega t + \frac{1}{2} \cos 2\varphi \cos 2\omega t - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \sin 2\omega t + \cos \varphi \cos 2\omega t - \sin \varphi \sin 2\omega t \right)$$

$$\Rightarrow \text{signal} = k S_0^2 (1 + \cos \varphi) + k S_0^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2\varphi}{2} + \cos \varphi \right) \cos 2\omega t - k S_0^2 \left(\frac{\sin 2\varphi}{2} + \sin \varphi \right) \sin 2\omega t$$

$$= \text{signal constant} + \text{signal de pulsation } 2\omega$$

Si on prend un filtre passe-bas de pulsation de coupure $\omega_c \ll 2\omega$, le signal de pulsation 2ω sera coupé. Il restera le signal constant.

$\Rightarrow$ Si $\omega_c \ll 2\omega$, en sortie du filtre on aura: $\langle \text{signal en sortie du multiplieur} \rangle$

$$= \langle k (\rho_1(t) + \rho_2(t))^2 \rangle = k \langle (\rho_1(t) + \rho_2(t))^2 \rangle$$

$$= k I \quad \text{proportionnel à } I$$

C-8) La radio source étudiée (le pulsar) a un axe magnétique qui n'est pas tout à fait aligné avec l'axe de rotation du pulsar. Ainsi, l'onde émise par le pulsar balaie un cône $\Rightarrow \theta$ évolue de façon périodique. Sa période est la période de rotation du pulsar.

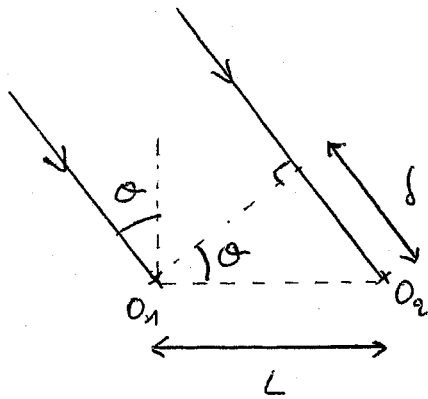
Ainsi, θ , et donc φ , dépendent du temps. Toutefois, cf B-7), $\Omega_\theta \approx 6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \Rightarrow T_\theta \approx 1 \text{ s}, f_\theta \approx 1 \text{ Hz}$

$\Rightarrow f_\theta \ll 2f$ avec f la fréquence de l'onde émise par le pulsar ($\lambda = 20 \text{ cm} \Rightarrow f = \frac{c}{\lambda} \approx 10^9 \text{ Hz}$)
Pour le filtre passe-bas, f_c doit être telle que:

$$f_\theta \ll f_c \ll 2f$$

$$* I = S_0^2 (1 + \cos \varphi) \text{ d'après C-7)}$$

avec $\varphi = \frac{2\pi \delta}{\lambda}$ avec δ la différence de marche entre les 2 rayons.



$$\Rightarrow \delta = L \sin \theta$$

$$\Rightarrow I = S_0^2 \left(1 + \cos \frac{2\pi L \sin \theta}{\lambda} \right) = S_0^2 \left(1 + \cos \frac{2\pi L \theta}{\lambda} \right)$$

$\theta \ll 1$

interfrange angulaire $\Delta \theta$?

$$\Delta \varphi = 2\pi \Rightarrow \Delta \left(\frac{2\pi L \theta}{\lambda} \right) = \frac{2\pi L}{\lambda} \Delta \theta = 2\pi$$

$$\Rightarrow \Delta \theta = \frac{\lambda}{L} = 0,020 \text{ rad}$$