

Problème : Fibre optique à saut d'indice

I . Approche géométrique de la propagation

1. Le rayon reste confiné à l'intérieur du coeur si la réflexion à l'interface coeur-gaine est totale. C'est le cas lorsque l'angle d'incidence i est supérieur à l'angle d'incidence limite i_ℓ , i_ℓ correspondant à un rayon émergent rasant (angle de réfraction de $\frac{\pi}{2}$, soit

$$n \sin i_\ell = n_1$$

La condition de confinement est donc

$$i > \arcsin\left(\frac{n_1}{n}\right)$$

2. θ étant l'angle d'incidence sur le dioptre air-coeur en entrée de fibre, l'inclinaison r des rayons par rapport à l'axe Ox est donnée par

$$\sin \theta = n \sin r$$

or $r + i = \frac{\pi}{2}$, donc

$$\sin \theta = n \cos i$$

La condition de confinement est donc

$$\theta < \theta_\ell \text{ avec } \sin \theta_\ell = n \cos i_\ell = \sqrt{n^2 - n_1^2}$$

3. Numériquement, on a

$$ON = \sin \theta_\ell = \sqrt{1,50^2 - 1,47^2} = 0,298$$

4. Le temps de parcours est minimal pour $\theta = 0$, et maximal pour $\theta = \theta_\ell$. Dans le premier cas, le chemin optique parcouru est nL , et dans le second cas, le chemin optique parcouru est

$$\frac{nL}{\cos \theta_\ell} = \frac{nL}{\sin \theta_\ell} = \frac{n^2 L}{n_1}$$

La différence de temps de parcours δt est telle que

$$c\delta t = \frac{n(n - n_1)L}{n_1} \text{ soit } \delta t = \frac{n(n - n_1)L}{n_1 c}$$

5. On a

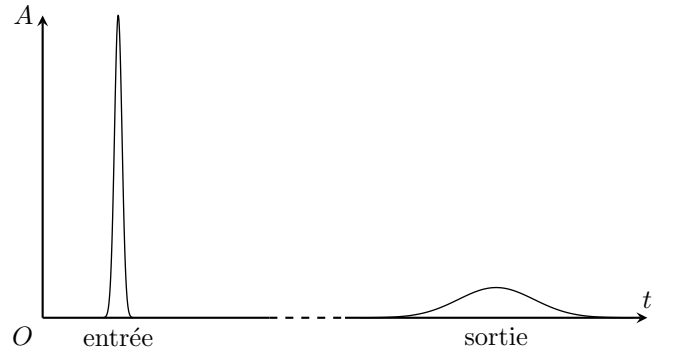
$$\left(\frac{n_1}{n}\right)^2 = 1 - 2\Delta \text{ soit approximativement } \frac{n_1}{n} \simeq 1 - \Delta$$

ce qui donne

$$\delta t \simeq \frac{n\Delta L}{(1 - \Delta)c} \simeq \frac{n\Delta L}{c}$$

6. La durée caractéristique de l'impulsion lumineuse en sortie est

$$r'_0 = t_0 + \delta t$$



Il y a étalement temporel de l'impulsion lors de la propagation.

7. Le non-recouvrement nécessite que la période $1/F$ soit supérieure à $t'_0 \simeq \delta t$, ce qui s'écrit

$$F \times \delta t < 1 \text{ soit } F \times \frac{n\Delta L}{c} < 1$$

8. Dans le cas limite, on a

$$F \times \frac{n\Delta L_{max}}{c} = 1 \text{ soit } B = L_{max}F = \frac{c}{n\Delta}$$

9. Application numérique : $\Delta = 1,98.10^{-2}$; $B = 1,01.10^{10} \text{ m.s}^{-1}$; $L_{max} = 101 \text{ m}$. On peut utiliser ce type de fibre pour des transferts de données informatiques dans un bâtiment, mais pas pour des grandes distances.

II . Approche ondulatoire de la propagation

10. La notion de rayon lumineux dans la fibre perd son sens si la longueur d'onde λ n'est pas petite devant a .

A Etude de la structure transverse de l'onde

11. La composante tangentielle de $\vec{E}$ est continue en $y = \pm a$. On a donc, en $y = -a$:

$$\forall t, \forall x, e_1(-a)e^{j(\omega t - k_{x,1}x)} = e_2(-a)e^{j(\omega t - k_{x,2}x)}$$

ce qui impose

$$k_{x,1} = k_{x,2}$$

De même, en $y = +a$:

$$\forall t, \forall x, e_2(a)e^{j(\omega t - k_{x,2}x)} = e_3(a)e^{j(\omega t - k_{x,3}x)}$$

ce qui impose

$$k_{x,2} = k_{x,3}$$

12. L'équation de propagation du champ s'écrit :

$$\begin{cases} \Delta \vec{E}_s = \frac{n_s^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_s}{\partial t^2} & \text{pour } s \neq 2 \\ \Delta \vec{E}_2 = \frac{n_2^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_2}{\partial t^2} & \text{pour } s = 2 \end{cases}$$

soit, en explicitant les laplaciens :

$$\begin{cases} -k_x^2 \vec{E}_s + \frac{d^2 e_s}{dy^2} e^{j(\omega t - k_x x)} \widehat{u_z} = -\frac{n_s^2 \omega^2}{c^2} \vec{E}_s & \text{pour } s \neq 2 \\ -k_x^2 \vec{E}_2 + \frac{d^2 e_2}{dy^2} e^{j(\omega t - k_x x)} \widehat{u_z} = -\frac{n_2^2 \omega^2}{c^2} \vec{E}_2 & \text{pour } s = 2 \end{cases}$$

On a donc bien

$$\frac{d^2 e_s}{dy^2} - \mu_s e_s = 0$$

avec

$$\begin{cases} \mu_1 = \mu_3 = k_x^2 - \frac{n_1^2 \omega^2}{c^2} \\ \mu_2 = k_x^2 - \frac{n_2^2 \omega^2}{c^2} \end{cases}$$

13. En dérivant la fonction e_2 proposée, on obtient

$$\frac{d^2 e_2}{dy^2} = -\beta^2 e_2$$

$\vec{E}_2$ est donc solution de l'équation de propagation pour

$$\beta^2 = -\mu_2 = \frac{n_2^2 \omega^2}{c^2} - k_x^2 = k^2(1 - \cos^2 r) = k^2 \sin^2 r$$

Comme $\beta > 0$ par hypothèse, on en déduit

$$\beta = k \sin r$$

En dérivant la fonction e_s proposée pour $s \neq 2$, on obtient

$$\frac{d^2 e_s}{dy^2} = \alpha^2 e_s$$

$\vec{E}_s$ est donc solution de l'équation de propagation pour

$$\alpha^2 = \mu_1 = k_x^2 - \frac{n_1^2 \omega^2}{c^2} = k^2 \left(\cos^2 r - \frac{n_1^2}{n^2} \right)$$

Comme $\alpha > 0$ par hypothèse, on en déduit

$$\alpha = k \sqrt{\cos^2 r - \frac{n_1^2}{n^2}}$$

L'expression de α^2 n'est valide qu'à condition que

$$\cos r > \frac{n_1}{n}$$

14. La valeur maximale de r est

$$r_\ell = \arccos \left(\frac{n_1}{n} \right)$$

La valeur minimale de i est

$$i_\ell = \arcsin \left(\frac{n_1}{n} \right)$$

L'existence d'ondes évanescentes dans la gaine correspond au cas de la réflexion totale dans le modèle de l'optique géométrique.

15. On détermine $\vec{B}$ à l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} -j\omega \vec{B}_s &= \overrightarrow{\text{rot}} (e_s(y) e^{j(\omega t - k_x x)} \widehat{u}_z) \\ &= e^{j(\omega t - k_x x)} \left(\frac{de_s}{dy} \widehat{u}_x + jk_x e_s(y) \widehat{u}_y \right) \end{aligned}$$

soit

$$\vec{B}_s = e^{j(\omega t - k_x x)} \left(\frac{j}{\omega} \frac{de_s}{dy} \widehat{u}_x - \frac{k_x}{\omega} e_s(y) \widehat{u}_y \right)$$

En explicitant les fonctions e_s et leurs dérivées, on obtient

$$\begin{cases} \vec{B}_1 = A e^{\alpha y} e^{j(\omega t - k_x x)} \left(\frac{j\alpha}{\omega} \widehat{u}_x - \frac{k_x}{\omega} \widehat{u}_y \right) \\ \vec{B}_2 = B e^{j(\omega t - k_x x)} \left(\frac{-\beta}{\omega} (e^{j\beta y} - \epsilon e^{-j\beta y}) \widehat{u}_x \right. \\ \quad \left. - \frac{k_x}{\omega} (e^{j\beta y} + \epsilon e^{-j\beta y}) \widehat{u}_y \right) \\ \vec{B}_3 = \epsilon A e^{-\alpha y} e^{j(\omega t - k_x x)} \left(-\frac{j\alpha}{\omega} \widehat{u}_x - \frac{k_x}{\omega} \widehat{u}_y \right) \end{cases}$$

16. Il y a continuité de $\vec{E}$ et de $\vec{B}$ en $y = a$, ce qui donne trois équations. La continuité de $\vec{E}$ et la continuité de B_y conduisent à la même équation :

$$B \left(\gamma + \frac{\epsilon}{\gamma} \right) = \frac{\epsilon}{\delta} A$$

La seconde équation traduit la continuité de B_x :

$$B \left(-\frac{\beta}{\omega} \left(\gamma - \frac{\epsilon}{\gamma} \right) \right) = \frac{-j\epsilon\alpha}{\delta\omega} A$$

A et B doivent satisfaire le système

$$\begin{cases} \epsilon A - \delta \left(\gamma + \frac{\epsilon}{\gamma} \right) B = 0 \\ \epsilon A + \frac{j\delta\beta}{\alpha} \left(\gamma - \frac{\epsilon}{\gamma} \right) B = 0 \end{cases}$$

17. Le système précédent admet une solution non triviale si son déterminant est nul.

$\epsilon = +1$ Le déterminant est nul si

$$\frac{j\delta\beta}{\alpha} \left(\gamma - \frac{1}{\gamma} \right) + \delta \left(\gamma + \frac{\epsilon}{\gamma} \right) = 0$$

or $\gamma - \frac{1}{\gamma} = 2j \sin \beta a$ et $\gamma + \frac{1}{\gamma} = 2 \cos \beta a$ ce qui permet d'écrire cette condition sous la forme

$$\tan \beta a = \frac{\alpha}{\beta}$$

soit

$$\beta a = \arctan \frac{\alpha}{\beta} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

ou encore

$$\beta a + \arctan \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$\epsilon = -1$ Le déterminant est nul si

$$-\frac{j\delta\beta}{\alpha} \left(\gamma + \frac{1}{\gamma} \right) - \delta \left(\gamma - \frac{\epsilon}{\gamma} \right) = 0$$

soit, en réintroduisant $\sin \beta a$ et $\cos \beta a$:

$$\tan \beta a = -\frac{\beta}{\alpha}$$

soit

$$\beta a = -\arctan \frac{\beta}{\alpha} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

On peut donc regrouper les deux cas par la condition

$$\beta a + \arctan \frac{\beta}{\alpha} = p \frac{\pi}{2} \quad (p \in \mathbb{Z})$$

18. f étant strictement croissante, $f_{max} = f(r_\ell)$. Pour $r = r_\ell$ on a $\alpha = 0$, donc $\arctan \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\pi}{2}$ soit

$$f_{max} = ka \sin r_\ell + \frac{\pi}{2} = ka \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n^2}} + \frac{\pi}{2}$$

f_{max} étant supérieur à $\frac{\pi}{2}$, l'équation

$$f(r) = \frac{\pi}{2}$$

admet donc une solution quelles que soient les valeurs de k et de a . C'est le cas $p = 1$.

En revanche, pour ≥ 2 , l'équation

$$f(r) = p \frac{\pi}{2}$$

n'admet de solutions que si

$$f_{max} > p \frac{\pi}{2}$$

ce qui impose une condition à a :

$$a > a_\ell(p) = \frac{p-1}{k \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n^2}}} \frac{\pi}{2} = \frac{(p-1)\lambda}{4 \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n^2}}}$$

La fibre est donc monomode si $p = 1$ est le seul cas possible, soit si $a < a_\ell(2)$. Ce n'est pas ce que dit l'énoncé, mais c'est en accord avec la proposition de la question suivante !

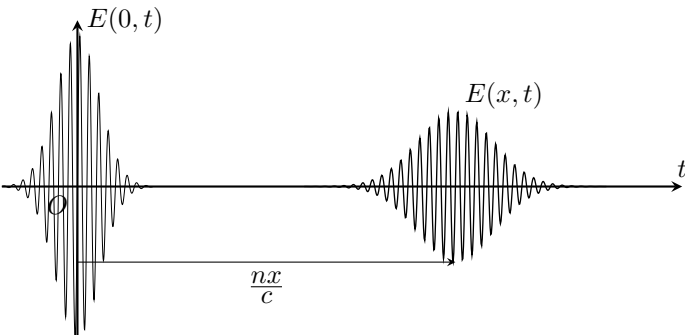
19. Numériquement, on obtient

$$a_\ell(2) = \frac{\lambda}{4 \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n^2}}} = 891 \text{ nm}$$

Pour cette dimension de fibre, l'approximation de l'optique géométrique n'est pas valide car les dimensions transversales de la fibre sont du même ordre de grandeur que la longueur d'onde.

B Dispersion intermodale

20. Après propagation dans la fibre, le paquet d'onde à l'abscisse x (en gras) est retardé par rapport au paquet d'onde à l'abscisse 0 (trait fin).



Le retard est égal à $\frac{nx}{c}$. De plus, la dispersion chromatique provoque un élargissement temporel. Il y a donc un plus grand nombre d'oscillations qui se répartissent une même énergie, donc l'amplitude des oscillations est plus faible.

III . Phénomène optique non linéaire : effet Kerr

21. Le champ intra-atomique a pour valeur caractéristique

$$E_i = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

où $r \simeq 10^{-10} \text{ m}$ est une dimension caractéristique de l'échelle atomique. On obtient numériquement $E_i \simeq 10^9 \text{ V.m}^{-1}$.

L'intensité lumineuse correspondante à $E_i/100$ est de l'ordre de

$$I \simeq 10^{11} \text{ W.m}^{-2}$$

Ces ordres de grandeur peuvent être atteints grâce à des lasers impulsionnels.

A Modélisation microscopique

22. La force de rappel peut s'écrire

$$\vec{F} = -m\omega_0^2 z \left(1 - \kappa \frac{m\omega_0^2 z^2}{\hbar\omega_0} \right) \vec{u}_z$$

$m\omega_0^2 z^2$ est une énergie, ainsi que $\hbar\omega_0$; κ est donc adimensionné.

23. L'électron est soumis à la force de rappel et à la force électrique $-e\vec{E}$. Tant qu'il n'est pas relativiste, on peut négliger la composante magnétique de la force de Lorentz. En appliquant le théorème de la résultante cinétique à cet électron, on obtient

$$m\ddot{z} + m\omega_0^2 z - \kappa \frac{m^2\omega_0^3}{\hbar} z^3 = -eE_0 \cos(\omega t - kx)$$

24. Pour $\kappa = 0$, on a

$$m\ddot{z}_0 + m\omega_0^2 z_0 = -eE_0 \cos(\omega t - kx)$$

En régime forcé, z_0 oscille à la pulsation ω , donc

$$m\ddot{z}_0 = -\omega^2 z_0$$

ce qui conduit à

$$z_0 = -\frac{eE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t - kx)$$

25. En retranchant l'équation différentielle de z_0 à l'équation différentielle de z , il reste :

$$m\ddot{z}_1 + m\omega_0^2 z_1 - \frac{m^2\omega_0^3}{\hbar} (z_0 + \kappa z_1)^3 = 0$$

soit

$$m\ddot{z}_1 + m\omega_0^2 z_1 \simeq \frac{m^2\omega_0^3}{\hbar} z_0^3$$

En linéarisant $\cos^3(\omega t - kx)$, on obtient

$$\cos^3(\omega t - kx) = \frac{3}{4} \cos(\omega t - kx) + \frac{1}{4} \cos(3\omega t - 3kx)$$

Il en résulte que z_1 est la somme d'une oscillation de pulsation ω et d'une oscillation de pulsation 3ω .

26. La composante selon Oz du vecteur polarisation est, d'une part

$$P_z = -Ne(z_0 + \kappa z_1)$$

et d'autre part¹

$$P_z = \epsilon_0 \chi E_0 \cos(\omega t - kx)$$

27. En identifiant les deux expressions de P_z , on obtient

$$\epsilon_0 \chi E_0 = \frac{Ne^2 E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \left[1 - \frac{3\xi}{4} \right]$$

soit

$$\chi = \frac{Ne^2}{m\epsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2)} \left[1 - \frac{3\xi}{4} \right]$$

On reconnaît

$$\chi = \chi_L \left[1 - \frac{3\xi}{4} \right]$$

L'indice de réfraction devient²

$$\begin{aligned} n &= \sqrt{1 + \chi_L \left[1 - \frac{3\xi}{4} \right]} \\ &= \sqrt{1 + \chi_L - \frac{3\xi\chi_L}{4}} \\ &= \sqrt{1 + \chi_L} \sqrt{1 - \frac{3\xi\chi_L}{4(1 + \chi_L)}} \\ &= n_L \sqrt{1 - \frac{3\xi\chi_L}{4(1 + \chi_L)}} \\ &= n_L \left(1 - \frac{3\xi(n_L^2 - 1)}{4n_L^2} \right) \end{aligned}$$

B Auto-modulation de phase par effet Kerr

28. Calculons la dérivée du carré du module de $\underline{A}(x, t)$ par rapport à x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial |\underline{A}(x, t)|^2}{\partial x} &= \frac{\partial \underline{A}(x, t) \underline{A}^*(x, t)}{\partial x} \\ &= \frac{\partial \underline{A}(x, t)}{\partial x} \underline{A}^*(x, t) + \underline{A}(x, t) \frac{\partial \underline{A}^*(x, t)}{\partial x} \\ &= j\Gamma |\underline{A}(x, t)|^2 \underline{A}(x, t) \underline{A}^*(x, t) \\ &\quad + \underline{A}(x, t) (-j\Gamma |\underline{A}(x, t)|^2 \underline{A}^*(x, t)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit que le module de $\underline{A}(x, t)$ est indépendant de x .

29. D'après la question précédente, $\underline{A}(x, t)$ et $\underline{A}(0, t)$ ne diffèrent que par leur argument ; on peut donc écrire

$$\underline{A}(x, t) = a(t) e^{j\psi(x, t)}$$

Dérivons par rapport à x ; on obtient

$$\begin{cases} \frac{\partial \underline{A}(x, t)}{\partial x} = ja(t) e^{j\psi(x, t)} \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \\ \frac{\partial \underline{A}(x, t)}{\partial x} = j\Gamma |a(t)|^2 a(t) e^{j\psi(x, t)} \end{cases}$$

On en déduit que

$$\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} = \Gamma |a(t)|^2$$

$\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x}$ est indépendant de x , donc en intégrant :

$$\psi(x, t) - \psi(0, t) = \Gamma a^2(t) x$$

or $\psi(0, t) = 0$ donc

$$\psi(x, t) = \Gamma a^2(t) x$$

ce qui donne tout d'abord

$$\underline{A}(x, t) = a(t) e^{j\Gamma a^2(t) x}$$

puis

$$\begin{aligned} \underline{E}(x, t) &= \underline{A}(x, t - k'_0 x) e^{j(\omega_0 t - k_0 x)} \\ &= a(t - k'_0 x) e^{j\Gamma a^2(t - k'_0 x) x} e^{j(\omega_0 t - k_0 x)} \end{aligned}$$

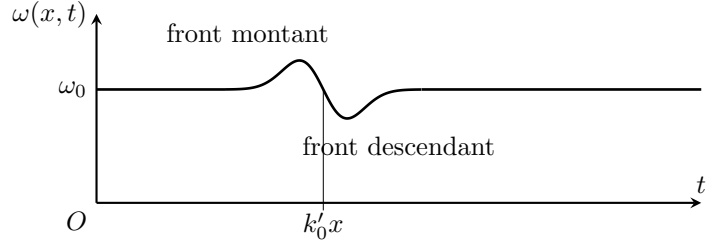
30. L'argument du champ électrique complexe est

$$\phi = \Gamma a^2(t - k'_0 x) x + \omega_0 t - k_0 x$$

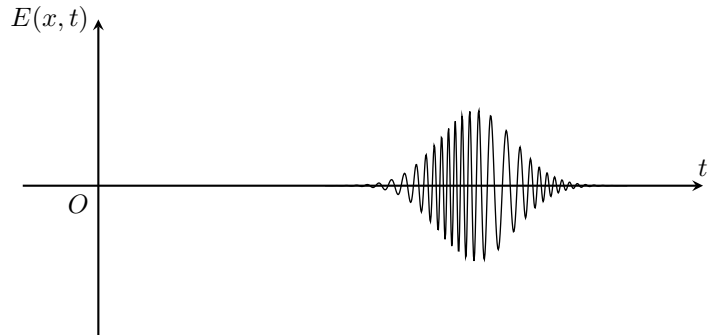
La pulsation instantanée est donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} &= \Gamma \frac{da^2(t - k'_0 x)}{dt} x + \omega_0 \\ &= \omega_0 - \frac{2\Gamma x a_0^2(t - k'_0 x)}{\tau_0^2} e^{-(t - k'_0 x)^2 / \tau_0^2} \end{aligned}$$

Son allure est représentée ci-dessous.



31. Lors du front descendant, les oscillations sont plus écartées ($\omega < \omega_0$) tandis qu'elles sont plus resserrées lors du front montant ($\omega > \omega_0$). L'allure du paquet d'onde est alors représenté ci-dessous.



1. Cette seconde expression semble peu pertinente tant que le terme de pulsation 3ω reste pris en compte.

2. χ_L et n_L étant des variables liées, il y a de multiples façons d'exprimer $n...$. On peut l'exprimer en fonction de n_L seul.

C Principe de propagation de solitons optiques

32. Les fréquences présentes dans le front montant étant plus élevées que ω_0 , la dispersion anormale tend à faire se propager plus vite le front montant que le maximum.

Les fréquences présentes dans le front descendant étant plus

faibles que ω_0 , la dispersion anormale tend à faire se propager moins vite le front descendant que le maximum.

Cet effet tend à recomprimer temporellement le paquet d'onde. Lorsque cette compression compense exactement l'élargissement par dispersion chromatique, la propagation peut s'effectuer sans déformation sur de longues distances ; on a alors produit un soliton optique.