

Seconde épreuve de Physique

Filière PSI

Durée de l'épreuve : 4 heures

Solution proposée

Le traitement des déchets

I : Acheminement des déchets

1. $D_m = 25 \text{ t} \cdot \text{j}^{-1} = 2,89 \cdot 10^{-1} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$.

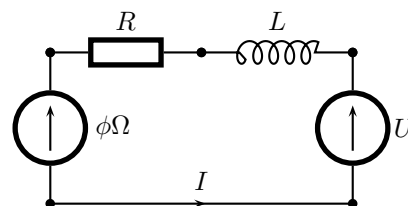
2. Le système défini par l'énoncé est ainsi étendu pour former un système fermé : en plus des déchets contenus à tout instant sur le tapis (masse M , vitesse $\vec{V}$), il comprend à l'instant t une masse $\delta m = D_m \delta t$ qui va arriver sur le tapis pendant la durée δt (avec une vitesse négligeable). À l'instant $t + \delta t$, le système comprend, du fait du régime permanent, une même masse M de déchets avec une même vitesse $\vec{V}$ sur le tapis, plus une masse δm qui vient de quitter le tapis à la vitesse $\vec{v} = v\hat{e}_x$. On a donc $\vec{F}\delta t = \delta\vec{P} = [M\vec{V} + \delta m\vec{v} - M\vec{V}]$ ou encore

$$\vec{F} = F\hat{e}_x \text{ avec } F = D_m v.$$

3. En l'absence de glissement du tapis roulant sur les cylindres qui l'entraînent, $v = a\Omega$.

4. La puissance est fournie par la source de tension qui alimente l'induit ; elle est consommée par l'effet Joule dans le circuit induit et par le transducteur qui transforme une partie de la puissance électrique en puissance mécanique, d'où le sens conventionnel du schéma ci-contre (puisque $\phi > 0$, et si $\Omega > 0$). Par application de la loi des mailles, on en déduit

$$U = RI + L \frac{dI}{dt} + \phi\Omega.$$



5. On applique le théorème du moment cinétique au cylindre moteur, en projection sur l'axe de rotation $\hat{e}_z$, sous la forme $J \frac{d\Omega}{dt} = \phi I + \Gamma_f + \Gamma_r$ en fonction des couples de frottement Γ_f et résistant Γ_r , exercé par le tapis, $\Gamma_r = -af$. On applique une deuxième fois le même théorème à l'autre cylindre, qui tourne à la même vitesse $\Omega = v/a$ donc $J' \frac{d\Omega'}{dt} = \Gamma'_f + \Gamma'_r$ avec $\Gamma'_f = -af'$. On applique alors le théorème de la résultante à la partie horizontale du tapis, en mouvement à vitesse constante, qui reçoit la force $-F$ des déchets (en projection sur $\hat{e}_x$) et les forces $-f$ et $-f'$ des cylindres (on utilise le principe des actions réciproques) d'où $-F + f + f' = 0$.

Enfin, l'énoncé affirme que $\Gamma_f + \Gamma'_f = -\lambda\Omega$. On obtient donc $(J + J') \frac{d\Omega}{dt} = \phi I - \lambda\Omega - D(t)a^2\Omega$.

6. En régime permanent, $D(t) = D_m$ et I et Ω sont constants donc $\phi I = \Omega_p (\lambda + D_m a^2)$ avec $U = RI + \phi\Omega_p$;

on en déduit $\Omega_p = \frac{\phi U}{R(\lambda + D_m a^2) + \phi^2}$. L'augmentation du débit de déchets provoque un ralentissement de la vitesse Ω_p .

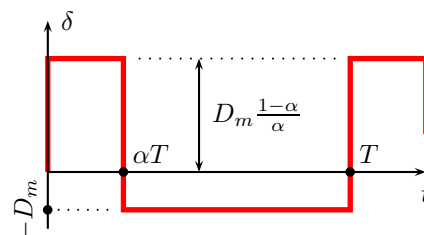
7. Par définition de la moyenne, $D_m = \frac{\alpha T D_{\max} + 0}{T}$ donc $D_{\max} = \frac{D_m}{\alpha}$.

8. $D_{\max} = 4D_m$ d'où le tracé ci-contre (créneau de moyenne nulle).

9. L'équation (E_1) impose $U = RI_m + \phi\Omega_m$ en valeurs moyennes, puisque la moyenne d'une dérivée est nulle, $\frac{1}{T} \int_0^T T \frac{df}{df} dt = \frac{f(T) - f(0)}{T} = 0$ à cause de la périodicité de f .

On développe de même l'équation mécanique (E_2) en remarquant que $D(t)\Omega(t) = D_m\Omega_m + D_m\omega(t) + \Omega_m\delta(t) + \omega(t)\delta(t)$, d'où l'équation vérifiée par les seules valeurs moyennes $0 = \phi I_m - \lambda\Omega_m - a^2 D_m \Omega_m - A$.

10. Dans l'hypothèse proposée, les équations vérifiées par Ω_m et Ω_p sont les mêmes, $\Omega_m = \Omega_p$.



11. Faisant la différence entre (E_1) et sa valeur moyenne, il vient $Ri + L \frac{di}{dt} + \phi\omega = 0$; de même pour (E_2) ,

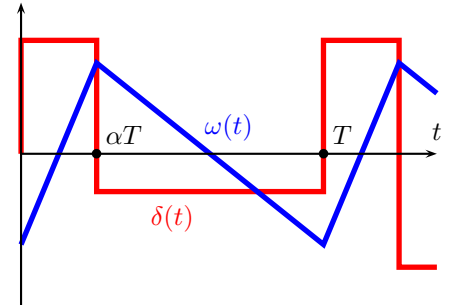
on trouve
$$(J + J') \frac{d\omega}{dt} = \phi i - \lambda\omega - a^2 \left[D_m\omega - \Omega_m\delta - \underbrace{\omega\delta}_{\text{négligé}} \right].$$

12. En termes d'ordres de grandeur, $|L di/dt| \sim \frac{Li_{\max}}{T}$ donc on peut négliger le terme d'inductance propre si $Ri_{\max} \gg \frac{Li_{\max}}{T}$ ou $f \ll f_0$, c'est-à-dire si la fréquence d'alimentation par la trémie est nettement plus faible que la fréquence caractéristique du circuit (R, L) .

13. On reporte $i = -\phi\omega/R$ dans l'équation (E'_2) simplifiée : $(J + J') \frac{d\omega}{dt} = - \left[\frac{\phi^2}{R} + \lambda + a^2 D_m \right] \omega - a^2 \Omega_m \delta$ qui

prend la forme demandée si on pose
$$\tau = \frac{J + J'}{\frac{\phi^2}{R} + \lambda + a^2 D_m} \quad \text{et} \quad \kappa = \frac{a^2 \Omega_m}{J + J'}.$$

14. On peut maintenant négliger le terme ω/τ , c'est-à-dire remplacer les solutions exactes de l'équation d'évolution de ω par des solutions affines par morceaux (approximation d'une suite d'exponentielles par une fonction en dents de scie). Pour $0 < t < \alpha T$, $\delta = D_m \frac{1-\alpha}{\alpha}$ et on peut donc écrire $\omega(t) = \omega_0 - \kappa D_m \frac{1-\alpha}{\alpha} t$ avec donc $\omega_1 = \omega_0 - \kappa D_m (1-\alpha)T < 0$; $\omega(t)$ est continue à cause de la continuité de l'énergie cinétique $\frac{1}{2}J\omega^2$ donc pour $\alpha T < t < T$, $\delta = -D_m$ et $\omega(t) = \omega_1 + \kappa D_m (t - \alpha T)$. Les tracés correspondants, pour deux fonctions de moyennes nulles, figurent ci-contre.



Finalement, le raccordement continu en $t = T$ impose $\omega_0 = \omega_1 +$

$\kappa D_m T (1 - \alpha)$ donc
$$\beta = \frac{\kappa D_m T}{\Omega_m} (1 - \alpha) \quad \text{soit aussi} \quad \beta = \frac{a^2 D_m T}{J + J'} (1 - \alpha).$$

α est proche de 1 (alimentation continue du tapis roulant) ou si l'inertie des rouleaux est élevée (c'est-à-dire si $J + J' \gg a^2 D_m T = \mathcal{M}a^2$, où $\mathcal{M}$ est la masse déposée par période sur le tapis roulant).

II : Incinération des déchets

II.A – Comportement du four en régime libre

15. Le bilan thermique est une forme particulière du premier principe $dH = \delta Q + \delta W_u$ en l'absence de travail utile ; par ailleurs, pour un système condensé (les parois du four), $dH = C_0 dT_s$ tandis que $\delta Q = \mathcal{P}_f dt$.

Finalement,
$$C_0 \frac{dT_s}{dt} + G [T_s - T_{\text{ext}}] = 0 \quad \text{a pour solution} \quad T_s(t) = T_{\text{ext}} + \{T_s(0) - T_{\text{ext}}\} \exp\left(-\frac{t}{\tau_\ell}\right) \quad \text{avec}$$

$$\tau_\ell = \frac{C_0}{G}.$$

16. On peut par exemple rechercher l'intersection de la tangente à l'origine avec l'asymptote ; on trouve alors $t = \tau_\ell$ donc $\tau_\ell = 4 \text{ h}$.

17.
$$G = \frac{C_0}{\tau} = 1,74 \cdot 10^3 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1}.$$

18. En régime permanent, le flux thermique à travers un isolant d'épaisseur constante est lui-même une constante en tout point de l'isolant : $j = -\frac{\mathcal{P}_f}{S}$ est, par ailleurs, lié à l'écart de température par la loi de Fourier, $\vec{j} = -\lambda \vec{\nabla} T$. À gradient constant, la température a donc une variation affine dans le milieu qui constitue l'isolant,

et $j = \frac{T_s - T_{\text{ext}}}{e}$ donc $\mathcal{P}_f = G [T_{\text{ext}} - T_s]$ avec
$$G = \frac{\lambda S}{e} \quad \text{soit numériquement} \quad G = 1,90 \cdot 10^2 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1}.$$

19. Le modèle proposé ici sous-estime manifestement les fuites thermiques, à travers les parties du four non isolées par des briques, ou par des phénomènes de type radiatif.

II.B – Thermodynamique d'un système ouvert

20. On adopte à nouveau le mode de raisonnement de la question 2 : le système fermé envisagé est constitué, à l'instant t , du système ouvert $\mathcal{S}$ et de toutes les masses $\sum D_i^e dt$ qui vont y entrer entre t et $t + \delta t$; à l'instant $t + \delta t$, on doit ajouter à $(\mathcal{S})$ les masses $\sum D_i^s dt$ qui sont sorties du système pendant le même temps. Le premier principe $dU = \delta Q + \delta W_u + \delta W_p$ appliqué à ce système impose le calcul :

- de la variation d'énergie interne $dU = \delta t \left[\frac{dU_S}{dt} + \sum_i D_i^s u_i^s - \sum_i D_i^e u_i^e \right]$, en fonction des énergies internes massiques u_i^s et u_i^e ;
- du transfert thermique reçu, $\delta Q = \mathcal{P}_{th} \delta t$;
- du travail « utile » reçu, $\delta W_u = \mathcal{P}' \delta t$;
- du travail des forces de pression reçues par le système, moteur sur les zones d'entrée et résistant sur les zones de sortie, $\delta W_p = \sum_i P_i^s \delta V_i^s - \sum_i P_i^e \delta V_i^e$.

Il suffit alors de remarquer que $D_i^s \delta t = \rho_i^s \delta V_i^s$ et $h_i^s = u_i^s + P_i^s / \rho_i^s$ où ρ_i^s est la masse volumique de l'espèce i

sortant du système pour recopier ce premier principe sous la forme
$$\frac{dU_S}{dt} = \sum_{i=1}^n D_i^s h_i^s - \sum_{i=1}^n D_i^e h_i^e + \mathcal{P}_{th} + \mathcal{P}'$$
.

21. Le seul paramètre thermodynamique est la température du four donc
$$\frac{dU_S}{dt} = C_0 \frac{dT_s}{dt}$$
.

22. Sans changement,
$$\mathcal{P}_{th} = G [T_{ext} - T_s(t)] + \mathcal{P}_{ch} - \mathcal{P}_{ref}$$
.

23. En régime permanent et du fait de l'absence de matière, tous les débits entrants sont égaux aux débits sortants, $D_i^e = D_i^s$; en particulier, $D_{air}^e = D_{air}^s = D_{air}$; par ailleurs, pour un gaz parfait, $dh = c dT$ donc $h_{air}^e - h_{air}^s = c_{air} (T_{ext} - T_s(t))$ donc
$$D_{air}^e h_{air}^e - D_{air}^s h_{air}^s = D_{air} c_{air} [T_{ext} - T_s(t)]$$
.

24. De la même manière, on intègre $dh = c dT$ de part et d'autre de la température de réaction pour trouver
$$h_e - h_s = c^e (T_{ext} - T_0) + q + c^s (T_0 - T_s(t))$$
. On en déduit, en régime permanent et si $c^e \simeq c^s$, l'expression
$$D^e h^e - D^s h^s = D [c (T_{ext} - T_s(t)) + q]$$
.

25. On regroupe les résultats précédents, en l'absence de tout travail utile, pour recopier le bilan thermique sous la forme $C_0 \frac{dT_s}{dt} = G [T_{ext} - T_s(t)] + D_{air} c_{air} [T_{ext} - T_s(t)] + D [c (T_{ext} - T_s(t)) + q] + \mathcal{P}_{ch} - \mathcal{P}_{ref}$ qu'on peut aussi écrire
$$C_0 \frac{dT_s}{dt} + (G + Dc + D_{air} c_{air}) T_s(t) = (G + Dc + D_{air} c_{air}) T_{ext} + Dq + \mathcal{P}_{ch} - \mathcal{P}_{ref}$$
.

II.C – Essai du four en charge

26. En régime permanent,
$$T_\infty = T_{ext} + \frac{Dq}{G + Dc + D_{air} c_{air}}$$
 ou, numériquement,
$$T_\infty = 540^\circ \text{C}$$
. On peut

aussi recopier cette équation différentielle sous la forme $\tau_\infty \frac{dT_s}{dt} + T_s = T_\infty$ avec
$$\tau_\infty = \frac{C_0}{G + Dc + D_{air} c_{air}}$$
 soit,

numériquement
$$\tau = 6,36 \cdot 10^2 \text{ s ou } 10,6 \text{ mn}$$
.

27. Le développement de $T_s(t) = T_\infty + \theta(t)$ et $D(t) = D_m + \delta(t)$ dans l'équation-bilan thermodynamique ci-dessus amène à écrire $C_0 \frac{d\theta}{dt} + (G + D_m c + D_{air} c_{air}) \theta(t) + c \delta(t) [T_\infty + \theta(t)] = c \delta(t) T_{ext} + \delta(t) q$ qui s'écrit effectivement
$$\frac{d\theta}{dt} + \frac{\theta}{\tau_\infty} = \left[\frac{c(T_{ext} - T_\infty) + q}{C_0} \right] \delta(t) - \underbrace{\frac{c}{C_0} \theta(t) \delta(t)}_{\text{négligé}}$$
 avec donc
$$\tau'_\infty = \tau_\infty$$
.

28. En notations complexes, on peut chercher une solution de cette équation en régime harmonique forcé sous la forme $\underline{\theta} = \frac{c(T_{ext} - T_\infty) + q}{C_0} \frac{\underline{\delta}}{\frac{1}{\tau_\infty} + i\omega}$ où $\tau_\infty \sim 10 \text{ mn} \gg \frac{2\pi}{\omega} \simeq 1 \text{ s}$; on peut donc, dans l'équation ci-dessus (qui est effectivement un filtre passe-bas du premier ordre de coupure $\omega_c = 1/\tau_\infty$) considérer que $\omega \gg \omega_c$ et donc négliger l'amplitude $\underline{\theta}$ des oscillations de la température :
$$T_s(t) \simeq T_\infty$$
.

29. Il suffit de remplacer q par q' ,
$$T'_\infty = T_{ext} + \frac{Dq'}{G + Dc + D_{air} c_{air}} = 587^\circ \text{C}$$
.

30. On a
$$\Delta h_{eau} = c_{eau} (T^* - T_{ext}) + \Lambda + c_{vap} (T_{max} - T^*)$$
 où $T^* = 100^\circ \text{C}$ est la température de changement d'état ; numériquement
$$\Delta h_{eau} = 4,42 \cdot 10^6 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$$
 ; l'échange thermique entre l'intérieur du four et l'eau étant supposé total (pas de pertes thermiques),
$$\mathcal{P}_{ref} = D_{eau} \Delta h_{eau} = 2,21 \cdot 10^6 \text{ W}$$
.

31. Supposant *a priori* le refroidissement suffisamment rapide (au regard de τ_∞), on peut négliger tous les transferts thermiques sauf ceux associés au refroidissement par l'eau pendant cette phase ; de l'équation $C_0 \frac{dT}{dt} \simeq$

$-\mathcal{P}_{ref}$ qui en découle on déduit la durée de refroidissement
$$\Delta t = C_0 \frac{T_{max} - T_{min}}{\mathcal{P}_{ref}} = 56,8 \text{ s}$$
 ; on constate que

$\Delta t \ll \tau_\infty$, ce qui valide l'hypothèse faite ici.