

Sujet CCP MP 2011

Physique II

A Optique : Propriétés et applications de l'appareil photographique.

A I Etude de deux composants essentiels, l'objectif et le pentaprisme.

Note : Le pentaprisme ne fait l'objet d'aucune étude dans ce paragraphe, le titre est inadéquat.

I) Objectif assimilé à une lentille mince.

I.1)

- On utilise la relation de conjugaison de Descartes $\frac{1}{P_i} - \frac{1}{P_o} = \frac{1}{f_{il}} = \frac{1}{f_{il}+t} + \frac{1}{x}$
donc $t = \frac{f_{il}^2}{x-f_{il}}$

I.2)

- $\Delta t(100 f_{il}) = \frac{f_{il}^2}{100 f_{il} - f_{il}} = \frac{f_{il}}{99} \approx 0.51 \text{ mm}$
- Nous sommes à la limite du déplacement nécessaire. La mise au point n'est donc pas utile.

I.3)

- $\Delta t(10 f_{il} || 100 f_{il}) = \frac{f_{il}^2}{10 f_{il} - f_{il}} - \frac{f_{il}^2}{100 f_{il} - f_{il}} = \frac{f_{il}}{9} - \frac{f_{il}}{99} = \frac{10}{99} f_{il} \approx 5.1 \text{ mm}$
- Le déplacement de mise au point est ici nécessaire.

II.1) Lentilles accolées

II.1.a)

- Considérons le schéma $A_1 \xrightarrow{L_2} A_2 \xrightarrow{L_3} A_3$
Nous avons $\frac{1}{O_2 A_2} - \frac{1}{O_2 A_1} = \frac{1}{f_{i2}}$ et $\frac{1}{O_2 A_3} - \frac{1}{O_2 A_2} = \frac{1}{f_{i3}}$.
Soit en sommant les deux relations précédentes : $\frac{1}{O_2 A_3} - \frac{1}{O_2 A_1} = \frac{1}{f_{i2}} + \frac{1}{f_{i3}} = \frac{1}{f_{i23}}$
donc $f_{i23} = \frac{f_{i2} f_{i3}}{f_{i2} + f_{i3}}$.
- Application numérique : $f_{i23} \approx 84 \text{ mm}$
- La lentille équivalente est bien entendu convergent. (vergence positive)
(graphe à insérer)

II.1.b)

- Pour que le système soit afocal, il faut que le foyer image de L_{23} corresponde au foyer objet de L_4 . On en déduit $\overline{O_2 O_4} = f_{i23} - f_{i4} = 24 \text{ mm}$.

II.1.c)

- Nous sommes en présence d'une lunette de Lippershey (ou de Galilée).
Le rapport des rayons cylindriques vaut $G_{ta} = -\frac{f_{i4}}{f_{i23}} = 0.71$.

II.2)

- L'association proposée est identique à la précédente si on inverse la position relative des lentilles car $L_{23} = L_{34}$.
- Nous avons donc $G_{tb} = \frac{1}{G_{ta}} = -\frac{f_{i23}}{f_{i4}} = 1.4$

II.3)

- Lunette $G = \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{f_{i23}}{f_{i4}} = 1.4$, $G = \frac{1}{G_{ta}}$.
- Pour la configuration b c'est l'inverse.

II.4)

II.4.a)

- L'ensemble L_{234} est afocal, un objet à l'infini a donc une image à l'infini. La distance $O_4 O_1$ importe donc peu. La matrice doit être placée à la distance focale de L_1 par rapport à L_1 .

II.4.b)

- On accole L_4 et L_1 .

II.4.c)

- Probable erreur d'énoncé.
Le rayon limitant l'objet à l'infini arrive sur L_1 avec l'angle α . La taille de l'image est obtenue simplement par $\overline{A_{i1}B_{i1}} = f_{i1} \tan \alpha \approx f_{i1} \alpha = 4.4 \text{ mm}$.
Ce résultat ne dépend nullement de G_{aa} ou de G_{ab} .
- Forme probable de l'énoncé, l'angle α est l'angle d'incidence sur L_2 et non sur L_1 .
Nous avons alors dans la configuration a : $\overline{A_{i1}B_{i1}} = G_{aa} f_{i1} \alpha \approx 6.1 \text{ mm}$
Dans la configuration b $\overline{A_{i1}B_{i1}} = G_{ab} f_{i1} \alpha \approx 3.1 \text{ mm}$

II.4.d)

- Distance focale équivalente : Un objet vu de l'infini sous l'angle α donne une image d'une taille $\overline{A_{i1}B_{i1}}$. Si nous disposons d'une seule lentille convergente nous avons $\overline{A_{i1}B_{i1}} = f_i \alpha$ où f_i est la distance focale de la lentille.
- Config a : $\overline{A_{i1}B_{i1}} = G_{aa} f_{i1} \alpha \approx 6.1 \text{ mm}$ donc : $f_{ia} = G_{aa} f_{i1} \approx 62.5 \text{ mm}$
- Config b : $\overline{A_{i1}B_{i1}} = G_{ab} f_{i1} \alpha \approx 3.1 \text{ mm}$ donc : $f_{ib} = G_{ab} f_{i1} \approx 40 \text{ mm}$

II.4.e) Champ angulaire

- Nous avons $\text{Champ} = 2\alpha = 2 \arctan\left(\frac{d}{2f}\right)$.
- AN : Pour une pellicule classique nous avons $d = 43.3 \text{ mm}$
Soit $\text{Champ} = 2\alpha = 0.8 \text{ rad} = 47^\circ$ pour $f_{i1} = 50 \text{ mm}$
Soit $\text{Champ} = 2\alpha = 0.67 \text{ rad} = 38^\circ$ pour $f_{ia} = 62.5 \text{ mm}$
Soit $\text{Champ} = 2\alpha = 1 \text{ rad} = 56^\circ$ pour $f_{ib} = 40 \text{ mm}$
- Ces valeurs sont largement supérieures à celles tolérées par les conditions dites de Gauss.

II.5)

- Un objectif bifocal est un compromis entre une mono-lentille et un zoom. Plus compliqué que le premier, il reste beaucoup plus simple et moins cher que le second.

III Objectifs dédiés spécifiquement à la macrophotographie

III.1)

- Nous avons $p_{i1} = f_{i1} + t = 56 \text{ mm}$ si le tirage est correct.
Vérifions le avec $p_{i1} = \frac{x f_{i1}}{x - f_{i1}} \approx 60 \text{ mm}$ et $G_{t1} = -\frac{1}{5}$
Le tirage n'est pas correct, pour que l'image soit nette il faudrait que le capteur soit associé à un tirage de 10mm et non de 6mm.

III.2)

- Nous supposons que le tirage est correct et se confond avec l'image finale de l'objet.
L'antécédent à travers L_1 vérifie $x_1 = \frac{f_{i1}(f_{i1}+t)}{t} \approx 466.7 \text{ mm}$

Nous calculons de même l'antécédent à travers L_5 $x = \frac{\left(\frac{f_{i1}(f_{i1}+t)}{t} - e\right) f_{i5}}{\frac{f_{i1}(f_{i1}+t)}{t} - e + f_{i5}} = \frac{(f_{i1}(f_{i1}+t) - et) f_{i5}}{f_{i1}(f_{i1}+t) - t(e - f_{i5})}$

III.3)

- AN : $e = 5 \text{ cm}$ et $f_{i5} = 20 \text{ cm}$, nous avons $x = 135 \text{ mm}$
- AN : $e = 5 \text{ cm}$ et $f_{i5} = 50 \text{ cm}$, nous avons $x = 227 \text{ mm}$

III.4)

- L'ajout d'une lentille additionnelle permet de rapprocher l'appareil de l'objet et d'améliorer ainsi le grossissement.

A II Quelques paramètres importants d'un appareil photo

I) Profondeur de champ/résolution

I.1)

- Utilisons la proportionnalité des triangles semblables (Thalès).

Nous avons $\frac{d_{O1} - d_0}{d_{O1}} = \frac{\varepsilon_0}{D} \Rightarrow d_{O1} = \frac{d_0}{1 - \frac{\varepsilon_0}{D}} = \frac{d_0}{1 - \frac{\varepsilon}{|G_t|D}}$

De même $\frac{d_0 - d_{O2}}{d_{O2}} = \frac{\varepsilon_0}{D} \Rightarrow d_{O2} = \frac{d_0}{1 + \frac{\varepsilon_0}{D}} = \frac{d_0}{1 + \frac{\varepsilon}{|G_t|D}}$

- La différence nous donne la profondeur de champ : $\Delta d = d_0 \frac{\frac{2\varepsilon}{|G_t|D}}{1 - \left(\frac{\varepsilon}{|G_t|D}\right)^2}$.

I.2) Influence de la diffraction

I.2.a)

- Cours : $I = I_0 \text{sinc}^2(\pi \alpha a)$ où α est la fréquence spatiale $\alpha = \frac{\sin \theta}{\lambda} = \frac{\theta}{\lambda} = \frac{x}{f_{il} \lambda}$
Soit $I = I_0 \text{sinc}^2\left(\pi \frac{ax}{f_{il} \lambda}\right)$.
- La tache centrale de diffraction a pour largeur $\frac{2f_{il} \lambda}{a}$.

I.2.b) Confusion de l'énoncé.

Il est fait référence à l'ouverture numérique noté N.O. sans aucune définition de cette grandeur que les étudiants n'ont pas à connaître. En fait, on note N.O. en photographie, la grandeur sans dimension appelé nombre d'ouverture et définie par f/D . Vu les valeurs fournies (1.4 et 2.8) qui sont des nombres d'ouverture classiques, c'est le nombre d'ouverture et non l'ouverture numérique qu'il faut exploiter ici.

- D'après l'énoncé $\Delta x = \frac{2f_{il} \lambda}{a} = \frac{f_{il} \lambda}{D_d} = N.O. \cdot \lambda$
- AN : Pour $NO = [1.4, 2.8]$, on obtient $\Delta x = [0.77 \mu m, 1.5 \mu m]$
- Sauf erreur de lecture le grain ε n'est pas donné dans l'énoncé, difficile donc de comparer...

II) Eclairage du plan image

Note : l'énoncé fait un usage explicite de l'angle solide sans le définir. Ces notions sont désormais hors programme et auraient dû être définies.

II.1)

- Nous avons $d\Omega = \frac{u \cdot dS}{r^2} = \sin \theta d\theta d\phi$, donc $E' = \frac{d\Phi}{dS} = L_i \iint_{[0,0]^{[\beta_i, 2\pi]}} \cos \theta d\Omega = 2\pi L_i \int_0^{\beta_i} \cos \theta \sin \theta d\theta$
 $E' = \pi L_i \int_0^{\beta_i} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{2} L_i (1 - \cos 2\beta_i)$.
Les angles sont supposés être petits : $\cos 2\beta_i \approx 1 - 2\beta_i^2$
donc $E' = \pi \tau L_o \beta_i^2$

II.2)

- On utilise ensuite les relations fournies par l'énoncé, on remarquera que ces dernières furent certes aux programmes de CPGE avant la réforme de 95, mais qu'elles sont aujourd'hui hors du champ « contextuel » d'un élève de MP.
- Sinus d'Abbe (stigmatisme) $n_0 \sin \beta_0 = G_t n_i \sin \beta_i \Rightarrow \beta_0 \approx G_t \beta_i$, car $n_0 = n_i$ et hypothèses de Gauss sur de petits angles.
Par ailleurs $G_t = 2(N.O.) \sin \beta_0 \approx 2(N.O.)\beta_0$.
Nous déduisons $\beta_i \approx \frac{\beta_0}{G_t} = \frac{1}{2(N.O.)}$
Enfin $E' = \pi \tau L_o \beta_i^2 = \frac{\pi \tau L_o}{4(N.O.)^2}$ (C.Q.F.D.)
- Un enregistrement nécessite une exposition lumineuse minimale, cette exposition évoluant comme $T/(NO)^2$, le temps de pose évolue donc comme le carré du nombre d'ouverture.
- Sur une prise rapide, il faut donc un petit nombre d'ouverture mais la profondeur de champ est alors très réduite et nécessite un ciblage photo précis.
- Sur une prise lente, il faut un grand nombre d'ouverture, la profondeur de champ est alors importante, pas de ciblage nécessaire, mais la résolution est mauvaise (diffraction).

B Electromagnétisme

B I Boule chargée au repos

I.1)

- Une simple proportionnalité car la densité volumique de charges est uniforme : $Q = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$.

I.2)

- Le Champ **E** est à symétrie directe, il appartient à tout plan de symétrie laissant invariante la distribution de charges. Tout plan diamétral est un plan de ce type, le champ **E** est donc porté par le vecteur radial issu du repère sphérique de centre C.
Dans ce même repère, la distribution est invariante par rotation selon θ et ϕ , il en est de même pour le champ. Donc : $\mathbf{E}(M) = E(r)\mathbf{e}_r$
- En C, nous aurons : $\mathbf{E}(C) = \mathbf{0}$ (seul vecteur commun à tte direction)

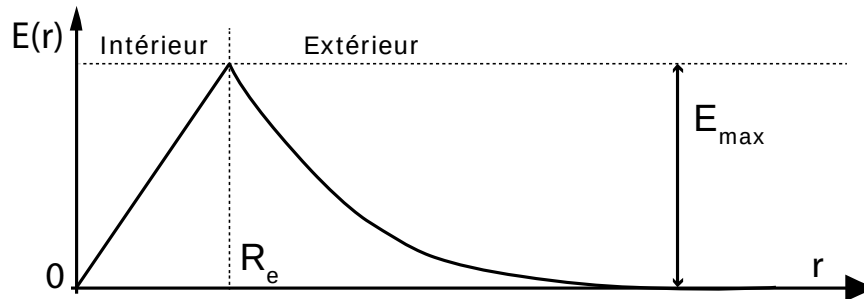
I.3)

- On considère une surface de Gauss de forme sphérique, de rayon r et de centre C.
Le flux s'exprime sous la forme $\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi r^2 E(r)$
- Pour $r < R$, nous avons $4\pi r^2 E(r) = \frac{q(r)}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{r^3}{R^3}$, soit $\mathbf{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{r}{R} \mathbf{e}_r = E_{\max} \frac{r}{R} \mathbf{e}_r$ avec $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} = E_{\max}$.
- Pour $r > R$, nous avons $4\pi r^2 E(r) = \frac{q(R)}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}$, soit $\mathbf{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{R^2}{r^2} \mathbf{e}_r = E_{\max} \frac{R^2}{r^2} \mathbf{e}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r$.

I.4)

- AN : $E(R_e) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R_e^2} = 1.6 \cdot 10^{20} \text{ V.m}^{-1}$

I.5)



I.6)

- La configuration d'étude est celle de l'électrostatique, la distribution de charges n'est pas mobile, le champ **B** est donc nul.

I.7)

- L'énoncé nous invite à déterminer les énergies demandées en ayant recours à la densité volumique d'énergie électrique $w_e = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$.
- A l'intérieur $w_e = \frac{\epsilon_0 E_{\max}^2}{2} \left(\frac{r}{R}\right)^2$, soit $W_1 = \int_0^R w_e d\tau = \frac{\epsilon_0 E_{\max}^2}{2} \int_0^R \left(\frac{r}{R}\right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{\epsilon_0 E_{\max}^2}{2} \frac{4\pi}{5} R^3 = \frac{Q^2}{40\pi\epsilon_0 R}$.
- A l'extérieur $w_e = \frac{\epsilon_0 E_{\max}^2}{2} \frac{R^4}{r^4}$, soit $W_2 = \int_R^\infty w_e d\tau = \frac{\epsilon_0 E_{\max}^2}{2} \int_R^\infty \frac{R^4}{r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{\epsilon_0 E_{\max}^2}{2} 4\pi R^3 = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$.
- Bilan $W = W_1 + W_2 = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R}$

I.8)

- AN : $W = mc^2 = \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 R_e} \Rightarrow R_e = \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 mc^2} \approx 1.7 \cdot 10^{-15} \text{ m}$

B II Boule chargée en mouvement de translation

II.1)

- Nous avons $\mathbf{j}_{int} = \rho \mathbf{v} = \frac{3Q}{4\pi R^3} \mathbf{v}$ et $\mathbf{j}_{ext} = \mathbf{0}$.

II.2)

- Loi de Biot et Savart : $\mathbf{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\text{sphère}} \frac{\mathbf{j}(P) \wedge \mathbf{PM}}{PM^3} d\tau = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{j}_{int} \wedge \iiint_{\text{sphère}} \frac{\mathbf{PM}}{PM^3} d\tau$
L'intégrale restante se calcule par analogie avec l'électrostatique du I :

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\text{sphère}} \rho \frac{\mathbf{PM}}{PM^3} d\tau = \mathbf{E}_{ext}(M) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r$$

donc $\iiint_{\text{sphère}} \frac{\mathbf{PM}}{PM^3} d\tau = \frac{4\pi R^3}{3} \frac{\mathbf{CM}}{CM^3}$

Soit $\mathbf{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{j}_{int} \wedge \frac{4\pi R^3}{3} \frac{\mathbf{CM}}{CM^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Qv}{r^2} \sin \theta \mathbf{e}_z$

II.3)

- La valeur du champ précédent est correcte pour tout M appartenant à xOy. Elle est invariante par rotation autour de l'axe x en raison des symétries.

$$\mathbf{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Qv}{r^2} \sin \theta \mathbf{e}_\phi$$

Nous aurons donc $C_{B_{ext}} = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi R \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Qv}{r^2} \sin \theta$

Si le calcul de la circulation se fait à $t=0$, le point C et le centre du repère sont confondus, nous avons alors $\theta = \pi/2$ donc $C_{B_{ext}} = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi R \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Qv}{R^2} = \frac{\mu_0}{2} \frac{Qv}{R}$

II.4)

- Calculons $\Phi_j = \iint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \frac{3Q}{4\pi R^3} \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_x \pi R^2 = \frac{3Qv}{4R}$

II.5)

- Nous exploitons le théorème d'Ampère dans sa forme simplifiée :

$$C_{B_{ext}} = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \iint \mathbf{Rot} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \iint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \Phi_j$$

$$\frac{\mu_0}{2} \frac{Qv}{R} = \frac{3\mu_0 Qv}{4R} \Rightarrow \text{Faux.}$$

Le théorème d'Ampère est ici non vérifié car nous n'avons pas pris en compte les courants de déplacement ou courants de Hertz $\mathbf{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$.

Note : l'évocation de l'énoncé est maladroite, c'est le théorème d'Ampère de la magnétostatique du vide qui est faux, pas le théorème d'Ampère « généralisé ».

II.6)

II.6.1)

- C'est le courant de Hertz, ou le courant de déplacement.

II.6.2)

- $\mathbf{E}_{int}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{r}{R} \mathbf{e}_r = E_{max} \frac{r}{R} \mathbf{e}_r = E_{max} \frac{1}{2R} \mathbf{grad}_M(r^2)$
- $\mathbf{E}_{ext}(r) = -E_{max} R^2 \mathbf{grad}_M\left(\frac{1}{r}\right)$

II.6.3) Changement de perspective, nous nous plaçons dans C et suivons le mouvement de M (-vt)

- $\mathbf{CM} = \begin{vmatrix} r \cos \theta - vt \\ r \sin \theta \end{vmatrix} \Rightarrow \|\mathbf{CM}\|^2 = r^2 - 2vtr \cos \theta + (vt)^2$
- $\mathbf{E}_{int}(r) = E_{max} \frac{1}{2R} \mathbf{grad}_M(\|\mathbf{CM}\|^2) = E_{max} \frac{1}{2R} \mathbf{grad}_M(r^2 - 2vtr \cos \theta + (vt)^2)$
- Soit $\frac{\partial \mathbf{E}_{int}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(E_{max} \frac{1}{2R} \mathbf{grad}_M(r^2 - 2vtr \cos \theta + (vt)^2) \right) = E_{max} \frac{1}{2R} \mathbf{grad}_M \left(\frac{\partial}{\partial t} (r^2 - 2vtr \cos \theta + (vt)^2) \right)$
- $\frac{\partial \mathbf{E}_{int}}{\partial t} = E_{max} \frac{1}{2R} \mathbf{grad}_M(-2vr \cos \theta + 2v^2 t) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \mathbf{grad}_M(vr \cos \theta - v^2 t)$
- $\mathbf{E}_{ext}(r) = -E_{max} R^2 \mathbf{grad}_M\left(\frac{1}{\|\mathbf{CM}\|}\right) = -E_{max} R^2 \mathbf{grad}_M\left(\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2vtr \cos \theta + (vt)^2}}\right)$
- Soit $\frac{\partial \mathbf{E}_{ext}}{\partial t} = -E_{max} R^2 \mathbf{grad}_M \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2vtr \cos \theta + (vt)^2}} \right) \right)$
- $\frac{\partial \mathbf{E}_{ext}}{\partial t} = 2E_{max} R^2 \mathbf{grad}_M \left(\frac{vr \cos \theta - v^2 t}{[r^2 - 2vtr \cos \theta + (vt)^2]^{\frac{3}{2}}} \right) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{grad}_M \left(\frac{vr \cos \theta - v^2 t}{[r^2 - 2vtr \cos \theta + (vt)^2]^{\frac{3}{2}}} \right)$
- Nous en déduisons : $A = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}$

II.6.4)

- $\left[\frac{\partial \mathbf{E}_{int}}{\partial t} \right]_{radial} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \frac{\partial}{\partial r} (vr \cos \theta - v^2 t) = -\frac{Qv \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 R^3}$
- $\left[\frac{\partial \mathbf{E}_{ext}}{\partial t} \right]_{radial} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{vr \cos \theta - v^2 t}{[r^2 - 2vtr \cos \theta + (vt)^2]^{\frac{3}{2}}} \right)$

Vu le caractère sympathique de l'expression, je me limite au cas $t=0$.

$$\left[\frac{\partial \mathbf{E}_{ext}}{\partial t} \right]_{radial} (t=0) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{vr \cos \theta}{r^3} \right) = \frac{2Qv \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

- $[J_{int}]_{radial} = \frac{3Q}{4\pi R^3} \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_r = \frac{3Qv}{4\pi R^3} \cos \theta$
- $[J_{ext}]_{radial} = 0$
- $[J_{int}]_{radial} = \frac{3Qv \cos \theta}{4\pi R^3} - \frac{Qv \cos \theta}{4\pi R^3} = \frac{Qv \cos \theta}{2\pi R^3}$ et $[J_{ext}]_{radial} = \frac{Qv \cos \theta}{2\pi R^3}$.

II.6.5)

- Reprenons

$$C_{B_{ext}} = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r \sin \theta B(r, \theta) = \iint \mathbf{Rot} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \iint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \Phi_j$$

Sur une portion d'hémisphère de base Γ , nous avons : $\Phi_j = \iint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \iint J_{radial} \cdot dS_{radial}$

- A l'extérieur $[J_{ext}]_{radial} = \frac{Qv \cos \theta}{2\pi r^3}$, soit $\Phi_j = \int_0^\theta \frac{Qv \cos \psi}{2\pi r^3} 2\pi r^2 \sin \psi d\psi = \frac{Qv}{4r} (1 - \cos 2\theta)$
- A l'intérieur $[J_{int}]_{radial} = \frac{Qv \cos \theta}{2\pi R^3}$, soit $\Phi_j = \int_0^\theta \frac{Qv \cos \psi}{2\pi R^3} 2\pi r^2 \sin \psi d\psi = \frac{Qvr^2}{4R^3} (1 - \cos 2\theta)$

- Nous en déduisons $B_{int}(r, \theta) = \frac{\mu_0 Q v r (1 - \cos 2\theta)}{8\pi R^3 \sin \theta} = \frac{\mu_0 Q v r}{4\pi R^3} \sin \theta$
de même $B_{ext}(r, \theta) = \frac{\mu_0 Q v}{4\pi r^2} \sin \theta$

II.7)

- L'énergie magnétique a pour densité $w_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$
Soit $W_{1m} = \int_0^R \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau = \frac{\mu_0}{2} \left(\frac{Qv}{4\pi R^3} \right)^2 \int_0^\pi \int_0^R r^2 (\sin \theta)^2 2\pi r^2 \sin \theta dr d\theta = \frac{\mu_0}{2} \left(\frac{Qv}{4\pi R^3} \right)^2 \frac{2\pi R^5}{5} \int_0^\pi (\sin \theta)^3 d\theta$
 $W_{1m} = \frac{\mu_0}{2} \left(\frac{Qv}{4\pi R^3} \right)^2 \frac{2\pi R^5}{5} \frac{4}{3} = \frac{\mu_0 (Qv)^2}{4\pi R} \frac{1}{15}$
Soit $W_{2m} = \int_R^\infty \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau = \frac{\mu_0}{2} \left(\frac{Qv}{4\pi} \right)^2 \int_0^\pi \int_R^\infty r^{-4} (\sin \theta)^2 2\pi r^2 \sin \theta dr d\theta = \frac{\mu_0}{2} \left(\frac{Qv}{4\pi} \right)^2 \frac{2\pi}{R} \int_0^\pi (\sin \theta)^3 d\theta$
 $W_{2m} = \frac{\mu_0 (Qv)^2}{4\pi R} \frac{1}{3}$
Au final $\Rightarrow W_m = W_{1m} + W_{2m} = \frac{\mu_0 (Qv)^2}{4\pi R} \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{5} \right) = \frac{\mu_0 (Qv)^2}{10\pi R}$

II.8)

- Application numérique : $R_e = \frac{\mu_0 e^2}{5\pi m} \approx 2.3 \cdot 10^{-15} m$

B III Boule chargée en mouvement de rotation

Note : le schéma de la figure 2 est particulièrement confus. Toutes les composantes sont dans le plan à l'exception de l'axe z. Nous avons deux repères, l'implicite cartésien (0,z,x,y) et l'explicite sphérique (O,r,θ,φ). Ici l'axe y joue le rôle usuellement dévolu à l'axe z.

III.1)

- Le volume élémentaire hachuré a une surface de base $d^2S = r dr d\theta$, il est engendré par la rotation de cette base autour de l'axe y sur un cercle de rayon $r \sin \theta$. Ce volume vaut $d^2V = 2\pi r \sin \theta d^2S = 2\pi r^2 dr \sin \theta d\theta$.
- La charge élémentaire vaut $d^2Q = \rho d^2V = \rho 2\pi r^2 dr \sin \theta d\theta$.
- Cette charge a une période de rotation T, elle traverse donc une surface de contrôle tous les T. L'intensité vaut $d^2I = \frac{d^2Q}{T} = \rho \omega r^2 dr \sin \theta d\theta$.
- Le champ en C s'obtient en sommant les champs créés par chacune des spires élémentaires :

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 d^2I}{2r \sin \theta} \sin^3 \theta \mathbf{e}_y = \frac{1}{2} \mu_0 \rho \omega r dr \sin^3 \theta d\theta \mathbf{e}_y$$

donc $\mathbf{B} = \frac{1}{2} \mu_0 \rho \omega \int_0^R r dr \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \mathbf{e}_y = \frac{1}{2} \mu_0 \rho \omega \frac{R^2}{2} \frac{4}{3} \mathbf{e}_y = \frac{\mu_0 \rho \omega R^2}{3} \mathbf{e}_y$

III.2)

- Moment magnétique d'une spire élémentaire $d^2\mathcal{M} = d^2I \mathbf{S} = \rho \omega r^2 dr \sin \theta d\theta \pi r^2 \sin^2 \theta \mathbf{e}_y$
Soit $d^2\mathcal{M} = \pi \rho \omega r^4 dr \sin^3 \theta d\theta \mathbf{e}_y$.
- On intègre sur toute la distribution $\mathcal{M} = \pi \rho \omega \frac{R^5}{5} \frac{4}{3} \mathbf{e}_y = \pi \rho \omega \frac{4R^5}{15} \mathbf{e}_y$

III.3)

- Nous avons $\mathbf{L} = J \omega \mathbf{e}_y = \frac{2}{5} m R^2 \omega \mathbf{e}_y$, donc $\mathcal{M} = \frac{2\pi \rho}{3m} R^3 \frac{2m \omega R^2}{5} \mathbf{e}_y = \frac{2\pi \rho}{3m} R^3 \mathbf{L} = \frac{Q}{2m} \mathbf{L}$
où Q est la charge totale de la sphère.

III.4)

- Application numérique : $\mathcal{M}_s \approx 8 \cdot 10^{-24} A.m^2$
- Il y a un écart d'un facteur 2, nous aurions donc $\mathcal{M}_s = \frac{Q}{m} \mathbf{S}$
- Le facteur 2 ne peut s'expliquer dans le cadre de la mécanique classique, il porte le nom de facteur de Landé et dépend de la particule élémentaire. Pour l'électron il vaut -2.0023.