

Concours CCP 2011 option PC Physique 1

Francis BROUCHIER

20 juin 2011

Les figures de l'énoncé étant suffisamment claires ne seront pas reproduites dans le corrigé. Le lecteur est prié de garder l'énoncé sous les yeux. S'il croit déceler une erreur dans le corrigé il est prié de la signaler à l'auteur. (francis.bouchier@prepas.org)

PROBLÈME I UN MODÈLE D'ÉCRANTAGE

I.1 Champ électrique créé par la surface chargée d'un conducteur métallique

I.1.1 Soient deux éléments de surface du conducteur symétriques par rapport à O . Les champs $d\vec{E}_1$ et $d\vec{E}_2$ sont symétriques par rapport à Ox , leur somme est donc portée par Ox . En répétant ce raisonnement on démontre que le champ $\vec{E}_0$ est porté par Ox au voisinage du conducteur.

Considérons un cylindre de génératrices perpendiculaires à la surface du conducteur et de surface de base Σ parallèle à cette surface. Ce cylindre a une partie à l'intérieur du conducteur et l'autre dans le vide. Appliquons le théorème de Gauss : le flux sortant de ce cylindre est égal à la charge à l'intérieur divisée par ϵ_0 . Dans le conducteur le champ étant nul le flux est nul. Dans le vide le champ est tangent aux génératrices du cylindre, le flux est aussi nul. Le champ est perpendiculaire à la surface de base et vaut ΣE_0 . On pourra donc écrire :

$$\Sigma E_0 = \frac{\sigma \Sigma}{\epsilon_0} \quad \boxed{\vec{E}_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x}$$

I.1.2

$$\vec{E}_0 = -\vec{\text{grad}} V_0 \quad \vec{E}_0 = -\frac{dV_0}{dx} \vec{e}_x \quad dV_0(x) = -E_0 \cdot dx \quad \boxed{V_0(x) = -E_0 \cdot x + cste}$$

Écrantage par une densité volumique de charge uniforme

I.2.1 Le problème ayant la symétrie de révolution autour de l'axe Ox le champ créé par la distribution de charge uniforme est porté par Ox . Le champ total est donc porté par Ox . De la même façon le flux du champ électrique sortant du cylindre précédemment défini vaut $E_{tot} \cdot \Sigma$. La charge sur la surface métallique vaut toujours $\sigma \Sigma$ et la charge dans le volume du cylindre à l'extérieur du métal est $\rho \Sigma x$ de sorte que :

$$\boxed{\vec{E}_{tot}(x) = \frac{\sigma + \rho x}{\epsilon_0} \vec{e}_x}$$

Le raisonnement du début de la question **I.1.1** est encore valable car pour $x > L$ il n'y a plus de charges dans le vide et avec le modèle choisi par l'énoncé $\vec{E}_0(x)$ est uniforme.

I.2.2 Lorsque $x > L$ $\vec{E}_{tot}(x > L) = \vec{E}_{tot}(x = L)$ quand $x < L$. En effet comme il n'y a pas pour $x = L$ de charges surfaciques ou linéiques le champ électrique est continu :

$$\boxed{\vec{E}_{tot}(x > L) = \frac{\sigma + \rho L}{\epsilon_0} \vec{e}_x} \quad \vec{E}_{tot}(x > L) = \vec{0} \quad \boxed{\sigma + \rho L = 0}$$

I.2.3

$$dV_{tot}(x) = -E_{tot}(x)dx \quad 0 < x < L \quad dV_{tot}(x) = -\frac{\sigma + \rho x}{\epsilon_0} dx = (-E_0 + \frac{E_0}{L}x)dx \quad \boxed{V_{tot}(x) = -E_0x + E_0 \frac{x^2}{2L} + cste}$$

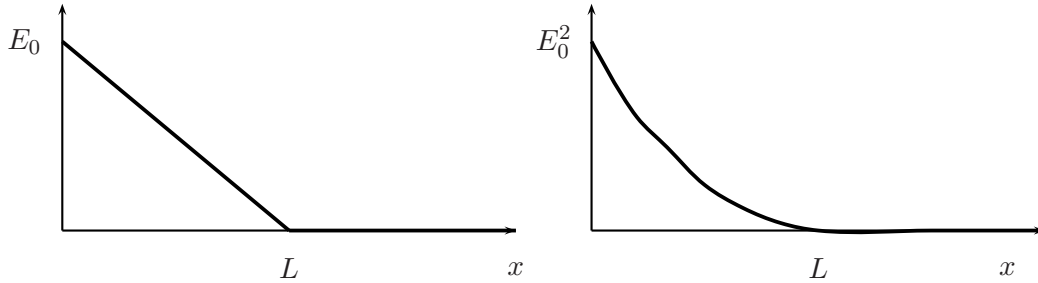
Pour $x > L$ le champ électrique étant nul la fonction potentiel est constante, de plus elle est continue dans tout l'espace, sans quoi le champ électrique pourrait devenir infini. On choisit conventionnellement

$$V_{tot}(L) = 0.$$

Pour $x > L$ on a $V_{tot}(x) = V_{tot}(L) = 0$

$$x < L \quad V_{tot}(L) = -E_0 L \left(1 - \frac{L}{2L}\right) + cste \quad cste = E_0 \frac{L}{2} \quad \boxed{V_{tot}(x) = -E_0 x \left(1 - \frac{x}{2L}\right) + E_0 \frac{L}{2}}$$

I.2.4 $\|\vec{E}_{tot}(x)\| = E_0(1 - x/L)$ pour $x < L$ et 0 pour $x > L$. Le carré vaut donc $E_0^2(1 - x/L)^2$ dans le premier cas et 0 dans le second.



I.2.5

$$u = \int_0^\infty \frac{\varepsilon_0 E_{tot}^2(x)}{2} dx = \int_0^L \frac{\varepsilon_0 E_{tot}^2(x)}{2} dx \quad u = \frac{\varepsilon_0 E_0^2 L}{6} \quad \boxed{u = \frac{\sigma^2 L}{6\varepsilon_0}}$$

I.3 Entropie d'un gaz parfait

I.3.1 D'après l'énoncé $dU = TdS - PdV = C_v dT$

$$\frac{PV}{T} = nR \quad dU = \frac{PV}{T(\gamma - 1)} dT \quad TdS - PdV = \frac{PV}{T(\gamma - 1)} dT \quad \boxed{dS = \frac{PV}{T^2(\gamma - 1)} dT + \frac{PdV}{T}}$$

I.3.2 Transformation isotherme $dT = 0$

$$dS = \frac{PdV}{T} \quad P = \frac{nRT}{V} \quad dS = nR \frac{dV}{V} \quad \Delta S = \int_{V_i}^{V_f} nR \frac{dV}{V} \quad \boxed{\Delta S = nR \ln \frac{V_f}{V_i}}$$

I.3.3

$$c = \frac{n}{V} \quad V = \frac{n}{c} \quad dS = nR \frac{-n \cdot dc}{c^2} \frac{c}{n}$$

$$\boxed{dS = -nR \frac{dc}{c}} \quad \boxed{\Delta S = -nR \ln \frac{c_f}{c_i}}$$

Le nombre de moles reste constant. La concentration est inversement proportionnelle au volume c_f/c_i est l'inverse de V_f/V_i d'où le signe $-$ devant nR .

I.4 Entropie et énergie libre d'un gaz parfait inhomogène

I.4.1

$$V_1 = \Sigma x \quad V_2 = \Sigma(X - x) \quad \boxed{c_1 = \frac{n_1}{\Sigma x}} \quad \boxed{c_2 = \frac{n_2}{\Sigma(X - x)}}$$

I.4.2

$$c_1 = c_2 \quad n_1(X - y) = n_2 y \quad n_1 X = (n_1 + n_2)y \quad \boxed{y = \frac{n_1}{n_1 + n_2} X} \quad \boxed{c_0 = \frac{n_1 + n_2}{\Sigma X}}$$

I.4.3 On a toujours une transformation isotherme (on monotherme comme le dit le programme). On part de la position y , donc $c_i = c_0$ pour les deux compartiments. ΔS est la somme des ΔS_i de chacun des compartiments :

$$\boxed{\Delta S = -n_1 R \ln \frac{c_1}{c_0} - n_2 R \ln \frac{c_2}{c_0}}$$

I.4.4

$$\Delta S = -n_1 R \ln \frac{n_1 X}{(n_1 + n_2)x} - n_2 R \ln \frac{n_2 X}{(n_1 + n_2)(X - 2x)} \quad \frac{d(\Delta S)}{dx} = \frac{n_1 R}{x} - \frac{n_2 R}{X - x} = \frac{(n_1 + n_2)R}{x(X - x)}(y - x)$$

Le produit $x(X-x)$ est positif, donc pour $x < y$ la dérivée est positive et ΔS croît. Pour $x > y$ la dérivée est négative et ΔS décroît. Pour $x = y$ $c_1 = c_2 = c_0$ les logarithmes sont nuls et $\Delta S = 0$. C'est la valeur maximale, pour toute autre valeur de x ΔS est négatif.

I.4.5 Dans le cas d'une transformation monotherme (isotherme) le programme définit un potentiel thermodynamique $F^* = U - T_0.S$ qui devient l'énergie libre dans ce cas. On peut donc écrire :

$$F = U - T.S = U_1 + U_2 - T(S_1 + S_2) = \frac{n_1 R}{\gamma - 1} T + \frac{n_2 R}{\gamma - 1} T - T(S_1 + S_2) = T \left[\frac{(n_1 + n_2) R}{\gamma - 1} - \Delta S \right]$$

Le ΔS est maximal pour $x = y$. Le premier de deux termes entre [] est constant, donc quand ΔS est maximal F est minimal. La paroi occupe donc la position $y = n_1 X / (n_1 + n_2)$. Lorsque l'énergie libre est minimale, tout déplacement de la paroi par une action extérieure tend à augmenter sa valeur. Le système réagit contre cette action et tend à ramener à l'équilibre. L'équilibre est donc stable.

D'ailleurs on voit mal, s'il était instable, comment la paroi pourrait se déplacer d'elle-même vers $x = 0$ ou vers $x = X$ en faisant occuper au gaz un volume nul (et lui donner une pression infinie).

I.5 Longueur d'écran de Debye et Hückel

I.5.1 Les anions sont en excès de concentration, les cations sont en défaut de concentration. La densité volumique de charges correspond à une concentration $2\delta c$ de charges négatives qui est le nombre de moles par unité de volume. Pour avoir la charge par unité de volume on multiplie par $\mathcal{F}$. Ainsi $\rho = -2\mathcal{F}\delta c$. En tenant compte de la relation entre σ et l'épaisseur L d'écrantage on trouve $\sigma - 2\mathcal{F}\delta c L = 0$.

I.5.2 La concentration des cations étant $c_0 - \delta c$ dans le volume ΣL le nombre de moles de cations est $n_1 = L\Sigma(c_0 - \delta c)$. De même pour les anions $n'_1 = L\Sigma(c_0 + \delta c)$.

I.5.3 $\Delta S = -n_1 R \ln(c_1/c_0) - n_2 R \ln(c_2/c_0)$ puis $c_1/c_0 = (c_0 + c_1 - c_0)/c_0 = 1 + (c_1 - c_0)/c_0$. En développant les logarithmes au second ordre près il vient :

$$\Delta S \sim n_1 R \left[-\frac{c_1 - c_0}{c_0} + \frac{(c_1 - c_0)^2}{2c_0^2} \right] + n_2 R \left[-\frac{(c_2 - c_0)}{c_0} + \frac{(c_2 - c_0)^2}{2c_0^2} \right]$$

Pour les anions $c_2 \sim c_0$.

$$(\Delta S)_{\text{cations}} \sim L\Sigma R(c_0 - \delta c) \left[\frac{\delta c}{c_0} + \frac{(\delta c)^2}{2c_0^2} \right] \quad (\Delta S)_{\text{anions}} \sim L\Sigma R(c_0 + \delta c) \left[-\frac{\delta c}{c_0} + \frac{(\delta c)^2}{2c_0^2} \right]$$

$$(\Delta S)_{\text{anions}} + (\Delta S)_{\text{cations}} \sim LR\Sigma \frac{(\delta c)^2}{c_0}$$

I.5.4 L'énergie électrostatique par unité de surface vaut $u = \sigma^2 L / (6\epsilon_0)$. L'énergie électrostatique pour la surface Σ vaut donc $\sigma^2 L \Sigma / (6\epsilon_0)$. Par ailleurs $\sigma = 2\mathcal{F}\delta c L$ soit $\delta c = \sigma / (2\mathcal{F}) L$. En remplaçant dans l'expression de F on a :

$$F = \sigma^2 \Sigma \left[\frac{L}{6\epsilon_0} + \frac{RT}{4\mathcal{F}^2 L c_0} \right]$$

Calculons la dérivée de F :

$$\frac{dF}{dL} = \sigma^2 \Sigma \left[\frac{1}{6\epsilon_0} - \frac{RT}{4\mathcal{F}^2 L^2 c_0} \right] \quad L \rightarrow 0 \quad \frac{dF}{dL} < 0 \quad L \rightarrow \infty \quad \frac{dF}{dL} > 0$$

il y a un extremum pour $dF/dL = 0$. F commence à décroître puis après à croître : cet extremum est donc un minimum. La valeur d'équilibre correspond au minimum de l'énergie libre soit :

$$L_{DH} = \sqrt{\frac{3\epsilon_0 RT}{2\mathcal{F}^2 c_0}}$$

I.5.5. Application numérique : Avec les valeurs numériques de l'énoncé on trouve $L_{DH} = 1.52 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ pour l'eau on multiplie par $\sqrt{70}$ soit $L_{DH} = 1,27 \text{ nm}$.

PROBLÈME II

LE MOMENT CINÉTIQUE INTRINSÈQUE DE LA LUMIÈRE

II.1 Polarisation de la lumière

II.1.1 A priori il suffit de deux polarisations rectilignes faisant entre elles, par exemple, un angle de 90° pour obtenir tous les types de polarisation. Si ces deux ondes sont en phase on obtient une polarisation rectiligne faisant un angle différent avec les précédentes. Si ces deux ondes sont déphasées on obtient une polarisation elliptique (éventuellement circulaire).

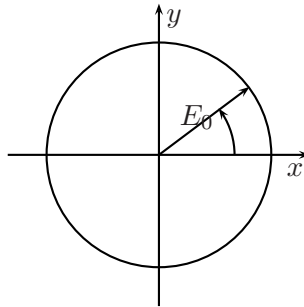
Historiquement le premier moyen utilisé pour obtenir une onde polarisée rectilignement à partir d'une onde monochromatique quelconque est la réflexion sur l'interface verre-air sous l'incidence de Brewster qui ne réfléchit qu'une seule polarisation. Puis on a utilisé le prisme de Nicol plus performant. Actuellement on dispose de "Polaroids" (marque déposée) beaucoup plus simples d'emploi et qui sont, entre autres, utilisés pour la vision en 3D des films.

II.1.2 $\sqrt{2}/2$ est le cosinus de $\pi/4$ la direction de l'onde est donc $\vec{e}_x \cos(\pi/4) + \vec{e}_y \cos(\pi/4)$. Cette onde est polarisée selon la première bissectrice des axes Ox, Oy . Si sa norme est E_0 , la projection de cette norme sur les axes est $E_0\sqrt{2}/2 = E_0/\sqrt{2}$ d'où :

$$\vec{E}(z, t) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x + \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y$$

II.1.3 $\exp(-j\pi/2) = -j$ soit $-j[\cos(\omega t - kz) + j \sin(\omega t - kz)]$ a pour partie réelle $\sin(\omega t - kz)$, ce qui donne :

$$\vec{E}(z, t) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x + \frac{E_0}{\sqrt{2}} \sin(\omega t - kz) \vec{e}_y$$



II.1.4 Certains milieux transparents n'ont pas le même indice de réfraction suivant deux axes perpendiculaires entre eux. Suivant ces axes la vitesse de la lumière n'est pas la même. A la traversée d'une faible épaisseur il y a une différence de phase entre ces ondes polarisées rectilignement suivant ces axes. Par un choix convenable de l'épaisseur on peut avoir un déphasage de $\pi/2$ en conservant la même amplitude, ce qui permet d'obtenir le résultat demandé. De telles lames sont appelées "lames quart d'onde".

Pour répondre à la question il suffit d'utiliser une lame quart d'onde.

II.2 Couple de polarisation

II.2.1

$$\vec{P} = q \cdot \overline{NM} \quad \vec{\sigma} = \vec{P} \wedge \vec{E}$$

II.2.2

$$\underline{\varepsilon} - 1 = \varepsilon' - 1 - j\varepsilon'' = A(\cos \Psi + j \sin \Psi) \quad A = \sqrt{(\varepsilon' - 1)^2 + \varepsilon''^2} \quad \sin \Psi = -\frac{\varepsilon''}{A}$$

$\varepsilon' > 1$ milieu diélectrique normal

$\varepsilon' = 1$ vide ou milieu très dilué

$\varepsilon' < 1$ milieu soumis à des rayons X

II.2.3

$$\vec{P} = \varepsilon_0 A (\cos \Psi + j \sin \Psi) \frac{E_0}{\sqrt{2}} \exp(j(\omega t - kz)) [\vec{e}_x - j \vec{e}_y]$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0 A \frac{E_0}{\sqrt{2}} [\cos(\omega t - kz) \cos \Psi \vec{e}_x - \sin \Psi \sin(\omega t - kz) \vec{e}_x + \sin \Psi \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y + \cos \Psi \sin(\omega t - kz) \vec{e}_y]$$

II.2.4 Pour simplifier les calculs nous poserons $\omega t - kz = \alpha$ et pour calculer la moyenne temporelle du produit demandé nous utiliserons la méthode de l'article paru dans le bulletin vert de l'UPS de janvier 2011 :

$$(\vec{P} \wedge \vec{E})_{moyen} = \Re\left[\frac{\vec{P} \wedge \vec{E}^*}{2}\right]$$

où $\vec{E}^*$ représente le complexe conjugué de $\vec{E}$.

$$\vec{E} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}(\exp(j\alpha)\vec{e}_x - j\exp(j\alpha)\vec{e}_y) \quad \vec{E}^* = \frac{E_0}{\sqrt{2}}(\exp(-j\alpha)\vec{e}_x + j\exp(-j\alpha)\vec{e}_y)$$

$$\vec{P} \wedge \vec{E}^* = \varepsilon_0 A(\cos \Psi + j \sin \Psi) j E_0^2 \vec{e}_z$$

$$\boxed{[\vec{P} \wedge \vec{E}]_{moyen} = -\varepsilon_0 A \sin \Psi \frac{E_0^2}{2} \vec{e}_z}$$

Le signe "-" dans l'expression indique que $\vec{P}$ est en retard de phase sur $\vec{E}$.

II.3 Couple exercé sur une bille

II.3.1 Le moment des forces appliquées au solide par rapport au point fixe O est égal à la dérivée par rapport au temps du moment cinétique du solide en O .

Dans le cadre du système SI, la force s'exprime en "*Newton*", le moment d'une force est en "*N.m*".

Le moment cinétique est le moment de la quantité de mouvement de la forme $OM \wedge m\vec{v}$. Cela fait pour unité "*kg.m².s⁻¹*".

II.3.2 $\lambda = 2\pi c/\omega$ soit $\omega = 2\pi c/\lambda$. l'énergie d'un photon est $\hbar\omega$, en une seconde le faisceau lumineux transporte une énergie $\Pi = N.\hbar\omega$, où N est le nombre de photons par seconde. Pendant un temps dt le nombre de photons est $dN = \Pi dt/(\hbar\omega)$. De la sorte $d\sigma = \hbar dN = \hbar \Pi dt/(\hbar\omega)$ le moment des forces vaut alors

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\Pi}{\omega} = \frac{\Pi\lambda}{2\pi c}$$

Application numérique : $\boxed{\text{moment des forces} = 4,24 \cdot 10^{-16} \text{ N.m}}$.