

Mesures ThermiquesPremière partie : thermométrie par résistance métalliqueA/ Etude préliminaire : linéarisation.

A1. $R_d(T) = R_p R(T) / (R_p + R(T))$

A2. $\frac{d(R_d(T))}{dT} = \frac{R_p}{(R_p + R(T))^2} \left(\frac{dR(T)}{dT} (R_p + R(T)) - R(T) \frac{dR(T)}{dT} \right) = \frac{R_p^2}{(R_p + R(T))^2} \frac{dR(T)}{dT}$

$$\frac{d^2(R_d(T))}{dT^2} = \frac{R_p^2}{(R_p + R(T))^3} \left(\frac{d^2 R(T)}{dT^2} (R_p + R(T)) - 2 \left[\frac{dR(T)}{dT} \right]^2 \right)$$

pour $T = T_0$ $\frac{d^2(R_d(T))}{dT^2} = 0 \Rightarrow R_p + R(T_0) = \frac{2 \left(\frac{dR(T)}{dT} \right)_{T=T_0}^2}{\left(\frac{d^2 R(T)}{dT^2} \right)_{T=T_0}}$

A3. $\alpha(T) = \frac{1}{R(T)} \left(\frac{dR(T)}{dT} \right)$ coefficient d'augmentation relative de $R(T)$ avec T

A4. $\alpha_d(T) = \frac{1}{R_d(T)} \frac{dR_d(T)}{dT} = \frac{R_p + R(T)}{R_p R(T)} \times \frac{R_p^2}{(R_p + R(T))^2} \frac{dR(T)}{dT} = \frac{R_p}{R_p + R(T)} \alpha(T) < \alpha(T)$

On gagne en linéarité mais on perd en sensibilité.

B) Etude d'une résistance métallique au Nickel.

$$R(t) = R_0 (1 + At + Bt^2)$$

B1. $R(-50^\circ\text{C}) = 74 \Omega$ $R(150^\circ\text{C}) = 198 \Omega$ $R(350^\circ\text{C}) = 375 \Omega$

B2. C'est une branche de parabole. $\frac{dR(t)}{dt} = R_0 (A + 2Bt)$

$$\alpha(150^\circ\text{C}) = 3,8 \cdot 10^{-3} \Omega \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$$

B3. $\frac{d^2 R(t)}{dt^2} = 2R_0 B$

$$R_p = -R(t_0) + \frac{R_0^2 (A + 2Bt_0)^2}{2R_0 B}$$

$$R_p = -R_0 (1 + At_0 + Bt_0^2) + \frac{R_0}{B} (A + 2Bt_0)^2 = 644 \Omega$$

B4. $R_d = R_p R_0 (1 + At + Bt^2) / (R_p + R_0 (1 + At + Bt^2))$

$$R_d(-50^\circ\text{C}) = 66 \Omega \quad R_d(350^\circ\text{C}) = 237 \Omega$$

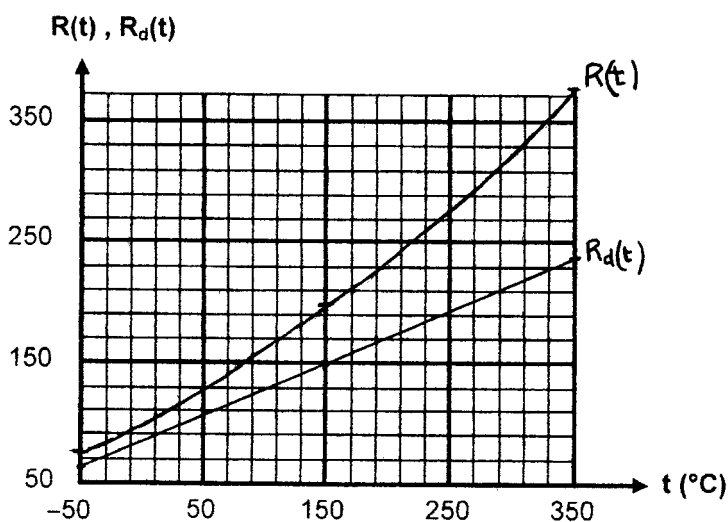
$$R_d(150^\circ\text{C}) = 151 \Omega$$

Nouveau tracé linéaire.

B5. $\begin{cases} 66 = -50a + b \\ 237 = 350a + b \end{cases} \rightarrow 400a = 171 \rightarrow a = 0,43 \Omega \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$

$$b = 87 \Omega$$

$$R_d = 87 + 0,43t$$



B6. $R_d(t_0) = R_d(t_1) + (t_0 - t_1) \frac{R_d(t_2) - R_d(t_1)}{t_2 - t_1}$

2/7

$$\frac{R_p R(t_0)}{R_p + R(t_0)} = \frac{R_p R(t_1)}{R_p + R(t_1)} + \frac{(t_0 - t_1)}{t_2 - t_1} \left(\frac{R(t_2)}{R_p + R(t_2)} - \frac{R(t_1)}{R_p + R(t_1)} \right)$$

$$\frac{R(t_0)[R_p + R(t_1)] - R(t_1)[R_p + R(t_0)]}{R_p + R(t_0)} = \frac{t_0 - t_1}{t_2 - t_1} \frac{R(t_2)(R_p + R(t_1)) - R(t_1)(R_p + R(t_2))}{R_p + R(t_2)}$$

$$\frac{R_p(R(t_0) - R(t_1))}{R_p + R(t_0)} = \frac{t_0 - t_1}{t_2 - t_1} \frac{R_p(R(t_2) - R(t_1))}{R_p + R(t_2)}$$

$$[R_p + R(t_2)][R(t_0) - R(t_1)] = \frac{t_0 - t_1}{t_2 - t_1} [R_p + R(t_0)][R(t_2) - R(t_1)]$$

$$R_p \left[R(t_0) - R(t_1) - \frac{t_0 - t_1}{t_2 - t_1} (R(t_2) - R(t_1)) \right] = -R(t_2)[R(t_0) - R(t_1)] + \frac{t_0 - t_1}{t_2 - t_1} R(t_0)[R(t_2) - R(t_1)]$$

$$\rightarrow R_p = \frac{-R(t_2)[R(t_0) - R(t_1)] + \frac{t_0 - t_1}{t_2 - t_1} R(t_0)[R(t_2) - R(t_1)]}{R(t_0) - R(t_1) - \frac{t_0 - t_1}{t_2 - t_1} (R(t_2) - R(t_1))}$$

$$\rightarrow R_p = \frac{-375(198 - 74) + \frac{1}{2} 198(375 - 74)}{198 - 74 - \frac{1}{2}(375 - 74)} = 630 \Omega$$

du même ordre de grandeur que celle obtenue précédemment.

Deuxième partie : Thermométrie par thermistance.

C/ Etude d'une thermistance.

C1. $R(T) = R_0 e^{B(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0})} \rightarrow R(T_1) = R_0 e^{B(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_0})} \quad R(T_2) = R_0 e^{B(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_0})}$
 $\frac{R(T_1)}{R(T_2)} = e^{B(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2})} \rightarrow B = \frac{\ln \frac{R(T_1)}{R(T_2)}}{\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}} = 3432 \text{ K.}$

C2. $\frac{1}{R(T)} \frac{dR(T)}{dT} = \alpha_{th}(T) = \frac{1}{R_0 e^{B(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0})}} \times -\frac{B}{T^2} R(T) = -\frac{B}{T^2} = 0,033 \text{ K}^{-1}$
 c'est environ 10 fois plus que celui de la resistance au nickel.

C3. $R(T) = R(T_1) e^{B(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_1})} \rightarrow R(278 \text{ K}) = 11450 \quad R(383 \text{ K}) = 388 \Omega$

C4. $V_C - V_D = (R_C + R(T)) i_1 = 2 R_C i_2 \rightarrow i_2 = \frac{R_C + R(T)}{2 R_C} \text{ et } i_1 + i_2 = I_G$

$$\rightarrow i_1 = \frac{2 R_C}{3 R_C + R(T)} I_G \rightarrow V_C - V_D = \frac{2 R_C (R_C + R(T))}{3 R_C + R(T)} I_G$$

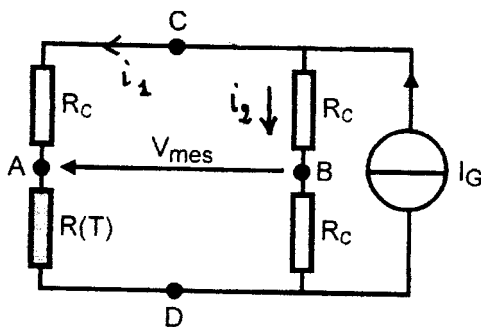
$$V_A - V_D = \frac{R(T)}{R_C + R(T)} (V_C - V_D) \quad V_B - V_D = \frac{1}{2} (V_C - V_D)$$

C5. $V_{mes} = V_A - V_B = \left(\frac{R(T)}{R_C + R(T)} - \frac{1}{2} \right) (V_C - V_D)$

$$\rightarrow V_{mes} = \frac{R(T) - R_C}{2(R_C + R(T))} \frac{2 R_C (R_C + R(T))}{3 R_C + R(T)} I_G$$

$$\rightarrow V_{mes} = \frac{R_C (R(T) - R_C)}{3 R_C + R(T)} I_G \quad > 0 \text{ si } R(T) > R_C$$

$$3 R_C V_{mes} + R(T) V_{mes} = R_C R(T) I_G - R_C^2 I_G \rightarrow R(T) = \frac{R_C (3 V_{mes} + R_C I_G)}{R_C I_G - V_{mes}}$$



C6. simpliste? tout dépend de ce qu'on appelle $R(T)$ à 25°C : est-ce la T° extérieure ou intérieure à R ?

si c'est extérieure, évidemment $R(T) = R_c \rightarrow V_{\text{mes}} = 0$.

C7. Échauffement interne de $R(T)$

$$R(T) = 5000 \left[\frac{-0,045 + 5000 \times 2 \cdot 10^{-3}}{5000 \times 2 \cdot 10^{-3} + 0,015} \right] = 4970 \Omega$$

$$\frac{1}{T} - \frac{1}{298} = \frac{1}{3432} \ln \frac{4970}{5000} \rightarrow T = 298,15 \text{ K} = 25,15^\circ\text{C} \quad \Delta T_a = 0,15^\circ\text{C}$$

C8. $\mathcal{P}_j dT - K_a \Delta T_a dT = M C_p dT$ en régime permanent $\mathcal{P}_j - \Delta T_a K_a = 0$

$$\text{C9. } \mathcal{P}_j = R(T) I_1^2 = R(T) \frac{4 R_c^2}{(3 R_c + R(T))^2} I_G^2 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ W}$$

$$K_a = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{0,15} = 0,033 \text{ W K}^{-1}$$

D/ Application bolométrique.

D1. En régime permanent: $\Phi_a + \mathcal{P}_j - K_a \Delta T = 0 \rightarrow \Phi_a + (\Delta T_a - \Delta T) K_a = 0$

$$\text{D2. } V_{\text{mes}} = -250 \text{ mV} \rightarrow R(T) = 5000 \left[\frac{-0,75 + 10}{-10,25} \right] = 4512 \Omega$$

$$\rightarrow T = \left[\frac{1}{298} + \frac{\ln \frac{4512}{5000}}{3432} \right]^{-1} = 300,7 \text{ K} \quad \Delta T = 2,7 \text{ K}$$

$$\Phi_a = K_a (\Delta T - \Delta T_a) = 0,033 (2,7 - 0,15) = 0,08 \text{ W}$$

$$\text{D3. } R'(T) = 5000 \left[\frac{-0,3 + 10}{-10,1} \right] = 4801 \Omega \rightarrow T' = 299,05 \text{ K} \quad \Delta T' = 1,05 \text{ K}$$

$$\Phi_a' = 0,03 \text{ W}$$

$$\text{D4. } \frac{T_p'}{T_p} = \left(\frac{\Phi_a'}{\Phi_a} \right)^{\frac{1}{4}} = 0,782 \rightarrow T_p' = 761 \text{ K} = 488^\circ\text{C}$$

E/ Application à un dispositif de sécurité

$$\text{E1. } V_- = \frac{R(T)}{R_1 + R(T)} V \quad V_+ = \frac{\frac{V}{R_2} + \frac{V_s}{R_4}}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} \quad \left(\text{fait intervenir } \frac{1}{R_3} \ll \frac{1}{R_2} \text{ ou } \frac{1}{R_4} \right)$$

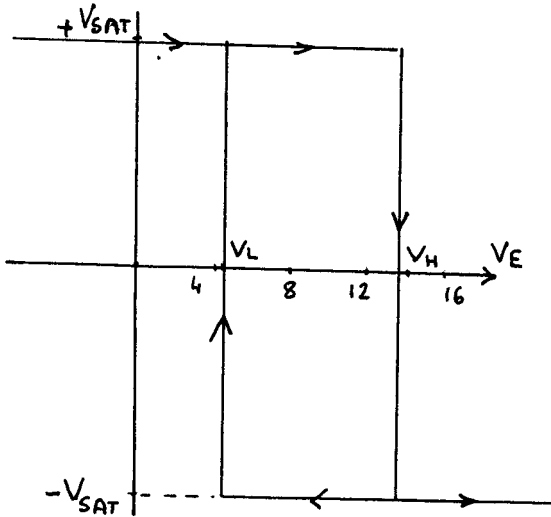
c'est peut-être pour cela que le texte ne mentionne pas R_3)

E2. L'AO n'est pas réactionné sur la borne inverseuse et se comporte donc en comparateur, ici à hystérésis. V_s ne peut prendre que les valeurs V_{SAT} ou $-V_{\text{SAT}}$

$$\rightarrow V_L = \frac{\frac{V}{R_2} - \frac{V_{\text{SAT}}}{R_4}}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} = 4,2 \text{ V} \quad \text{et} \quad V_H = \frac{\frac{V}{R_2} + \frac{V_{\text{SAT}}}{R_4}}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} = 13,7 \text{ V}$$

E3. $V_H - V_L = \Delta V$ est l'hystérésis.

4/7



$$E4. R(T) = \frac{R_1 V_E}{V - V_E}$$

$$R(T)_{V_L} = 385 \Omega$$

$$R(T)_{V_H} = 10500 \Omega$$

$$\rightarrow T_L = 383 K \rightarrow t_L = 110^\circ C$$

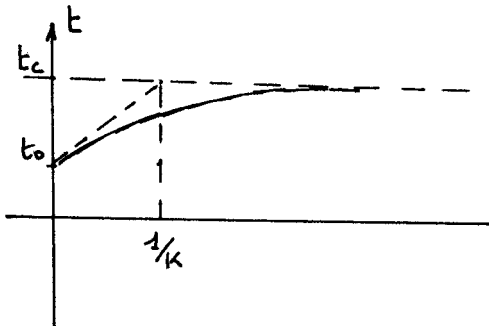
$$T_H = 280 K \rightarrow t_H = 7^\circ C$$

Le système à réguler s'arrête si la t° dépasse $110^\circ C$ et ne reprend, après refroidissement, qu'à $7^\circ C$.

Troisième partie : Thermocouple et température variable d'un fluide

$$F1. -RS(t - t_c) = \rho V c_p \frac{dt}{d\tau} \rightarrow \frac{dt}{d\tau} = -K(t - t_c) \text{ avec } K = \frac{RS}{\rho V c_p}$$

$$F2. \frac{d(t - t_c)}{t - t_c} = -K d\tau \rightarrow \ln \frac{t - t_c}{t_0 - t_c} = -K\tau \quad t - t_c = (t_0 - t_c)e^{-K\tau}$$



Le temps de réponse du capteur est de l'ordre de $1/K$.

$$F3. t_{FL} = t_1 + t_2 \sin \omega \tau$$

$$\frac{dt}{d\tau} = -K(t - t_1 - t_2 \sin \omega \tau)$$

$$\text{En posant } \theta = t(\tau) - t_1 \quad \frac{d\theta}{d\tau} = -K(\theta - t_2 \sin \omega \tau)$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} + K\theta = K t_2 \sin \omega \tau$$

$$F4. \text{ Régime transitoire : } \theta_1(\tau) = \theta_0 e^{-K\tau} \quad \theta_0 \text{ à déterminer.}$$

$$F5. \text{ Régime harmonique : } \theta_2(\tau) = A \sin(\omega \tau - \psi)$$

$$\frac{d\theta_2}{d\tau} = A\omega \cos(\omega \tau - \psi) = -KA \sin(\omega \tau - \psi) + K t_2 \sin \omega \tau \quad \forall \tau$$

$$A\omega \cos \psi = KA \sin \psi \rightarrow \tan \psi = \frac{\omega}{K}$$

$$A\omega \sin \psi = -KA \cos \psi + K t_2 \quad \text{avec } \sin \psi = \frac{\omega/K}{\sqrt{1 + \omega^2/K^2}} \text{ et } \cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2/K^2}}$$

$$A \left[\frac{\omega^2}{\sqrt{1 + \omega^2/K^2}} + \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2/K^2}} \right] = K t_2 \rightarrow A = \frac{t_2}{\sqrt{1 + \omega^2/K^2}}$$

$$F6. \theta = \theta_0 e^{-K\tau} + \frac{t_2}{\sqrt{1 + \omega^2/K^2}} \sin(\omega \tau - \psi)$$

$$\text{à } \tau = 0 \quad \theta = t_0 - t_1 \quad t_0 = \theta_0 + \frac{t_2}{\sqrt{1 + \omega^2/K^2}} \times \frac{-\omega/K}{\sqrt{1 + \omega^2/K^2}} + t_1$$

$$\rightarrow \theta_0 = t_0 - t_1 + \frac{\omega t_2}{K(1 + \omega^2/K^2)}$$

$$\rightarrow t_1 = t_1 + \left(t_0 - t_1 + \frac{\omega t_2}{K(1 + \omega^2/K^2)} \right) e^{-K\tau} + \frac{t_2}{\sqrt{1 + \omega^2/K^2}} \sin(\omega\tau - \psi)$$

F7. $S = 2\pi \frac{d}{2} L = 9,42 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$ $V = \frac{\pi d^2}{4} L = 2,36 \cdot 10^{-8} \text{ m}^3 \rightarrow K = 0,033 \text{ s}^{-1}$

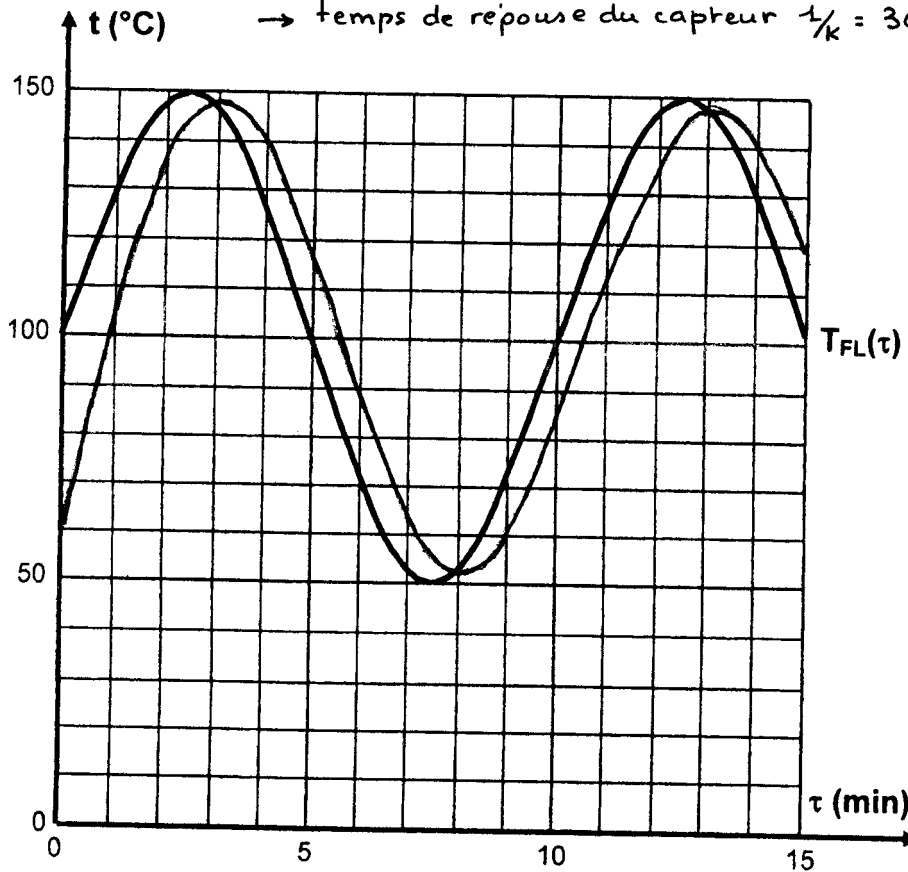
$\rightarrow$ temps de réponse du capteur $1/K = 30,3 \text{ s}$.

$$\omega = \frac{2\pi}{600} = 0,01 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\frac{\omega}{K} = 0,31. \quad \frac{\omega^2}{K^2} = 0,1$$

$$\rightarrow \theta_0 = -25,5^\circ \text{C}$$

$$\rightarrow A = 47,7^\circ \text{C}$$



$$t = 100 - 25,5 e^{-\tau/30,3} + 47,7 \sin(0,01\tau - 0,31)$$

$\uparrow$
ne se fait sentir que peu environ
1 mn 30 s.

ensuite le capteur suit avec
un retard de l'ordre de 30 s.

Quatrième partie: doigt de gant

G1. $\Phi(x) - \Phi(x+dx) - \Phi_{\text{ext}} - \Phi_{\text{int}} = 0$ en régime permanent

avec $\Phi_{\text{ext}} = h_{FL} \pi d_{\text{ext}} dx (T(x) - T_{\text{eau}})$

$\Phi_{\text{int}} = h_A \pi (d_{\text{ext}} - 2e) dx (T(x) - T_A)$

G2. $\Phi(x) - \Phi(x+dx) - h_{FL} \pi d_{\text{ext}} dx (T(x) - T_{\text{eau}}) = 0$ avec $\Phi(x) = -\lambda A \left(\frac{dT}{dx} \right)_x$

G3. $\lambda A \frac{d^2 T(x)}{dx^2} - h_{FL} \pi d_{\text{ext}} (T(x) - T_{\text{eau}}) = 0$

G4. $\xi = \frac{x}{L}$ $\theta(\xi) = \frac{T(x) - T_{\text{eau}}}{T_p - T_{\text{eau}}}$ $\rightarrow dx^2 = L^2 d\xi^2$ $d^2 T(x) = d^2 \theta(\xi) (T_p - T_{\text{eau}})$

$$\frac{\lambda A}{L^2} (T_p - T_{\text{eau}}) \frac{d^2 \theta(\xi)}{d\xi^2} - h_{FL} \pi d_{\text{ext}} (T_p - T_{\text{eau}}) \theta(\xi) = 0$$

$$\frac{d^2 \theta(\xi)}{d\xi^2} - \Omega^2 L^2 \theta(\xi) = 0 \quad \text{avec} \quad \Omega^2 = \frac{h_{FL} \pi d_{\text{ext}}}{\lambda A} \quad \text{en m}^{-2}$$

G5. $\theta = A \cosh \Omega L \xi + B \sinh \Omega L \xi$ $\theta(0) = 1$ car en $x=0$ $T = T_p$

En $x=L$ le flux à travers l'inox s'annule $\rightarrow \frac{dT}{dx} = 0 \Rightarrow \left(\frac{d\theta}{d\xi} \right)_{\xi=1} = 0$

$$\rightarrow A = 1 \quad \frac{d\theta}{d\xi} = \Omega L \rho h \Omega L \xi + \Omega L B \operatorname{ch} \Omega L \xi$$

$$0 = \rho h \Omega L + B \operatorname{ch} \Omega L \rightarrow B = -\frac{\rho h \Omega L}{\operatorname{ch} \Omega L}$$

$$\rightarrow \theta = \operatorname{ch} \Omega L \xi + \frac{\rho h \Omega L}{\operatorname{ch} \Omega L} \rho h \Omega L \xi = \frac{\operatorname{ch} \Omega L (\xi - 1)}{\operatorname{ch} \Omega L}$$

G6. $\theta(1) < 0,005 \quad \frac{1}{\operatorname{ch} \Omega L} < 0,005 \quad \operatorname{ch} \Omega L > 200 \quad \Omega L > 6$

$\Omega = 531 \text{ m}^{-1} \quad L > \frac{6}{531} = 11,3 \text{ mm} < \frac{1}{3} \text{ Dint donc réalisable.}$

G7. $\frac{d^2(T(x) - T_{\text{eau}})}{dx^2} = \Omega^2(T(x) - T_{\text{eau}}) \quad T(x) - T_{\text{eau}} = A \operatorname{ch} \Omega x + B \rho h \Omega x$

$T(0) = T_p \rightarrow A = T_p - T_{\text{eau}} \quad T_{\text{ab}} = T_{\text{eau}} \rightarrow B = -A$

$\rightarrow T(x) - T_{\text{eau}} = (T_p - T_{\text{eau}})(\operatorname{ch} \Omega x - \rho h \Omega x)$

G8. $T(L) - T_{\text{eau}} = (T_p - T_{\text{eau}})(\operatorname{ch} \Omega L - \rho h \Omega L)$

$\operatorname{ch} \Omega L' - \rho h \Omega L' = 0,005 \rightarrow e^{\frac{\Omega L'}{2}} + e^{-\Omega L'} - e^{\frac{\Omega L'}{2}} - e^{-\Omega L'} = 0,05$

$\rightarrow e^{-\Omega L'} = 0,005 \quad \Omega L' = -\ln 0,005 = 5,3 \quad L' = \frac{5,3}{531} \sim 10 \text{ mm}$

On retrouve une valeur quasi identique. Ce qui justifie l'utilisation du doigt de gant.

Cinquième partie. Thermomètre à diode.

H1. $I = I_s(e^{\frac{qV_J}{kT}} - 1) \quad \text{pour } V_J = 0,2 \text{ V} \quad \frac{qV_J}{kT} = 6,56 \quad e^{\frac{qV_J}{kT}} \gg 1$

$\rightarrow I = I_s e^{\frac{qV_J}{kT}} \rightarrow V_J = \frac{kT}{q} \ln \frac{I}{I_s}$

H2. $I_s = A T^3 e^{-E_g/kT} \rightarrow \ln I_s = \ln A + 3 \ln T - \frac{E_g}{kT}$

$\rightarrow V_J = \frac{kT}{q} \ln I - \frac{kT}{q} [\ln A + 3 \ln T - \frac{E_g}{kT}]$

$= \frac{E_g}{q} + T \frac{k}{q} (\ln I - \ln A) - \frac{3kT}{q} \ln T \quad \text{analyser ?}$

H3. $V_J(T_0 + \Delta T) = V_J(T_0) + \frac{k}{q} \ln \left(\frac{I_0}{A} \right) \Delta T - \frac{3k}{q} (\Delta T \ln T_0 + \Delta T)$

$= V_J(T_0) + \frac{k}{q} \left[\ln \left(\frac{I_0}{A} \right) - 3(1 + \ln T_0) \right] \Delta T$

H4. $R_s(T) = R_s(T_0) \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\Delta T}{T_0} \right)$

$V_D(T) = V_J(T) + R_s(T) I_0$

$V_D(T_0 + \Delta T) = V_J(T_0) + \frac{k}{q} \left[\ln \left(\frac{I_0}{A} \right) - 3(1 + \ln T_0) \right] \Delta T + R_s(T_0) I_0 + \frac{3}{2} R_s(T_0) I_0 \frac{\Delta T}{T_0}$

$= V_D(T_0) + \frac{k}{q} \left[\ln \left(\frac{I_0}{A} \right) - 3(1 + \ln T_0) \right] \Delta T + \frac{3}{2} R_s(T_0) I_0 \frac{\Delta T}{T_0}$

$S_D(T_0) = \left(\frac{\Delta V_D}{\Delta T} \right)_{T_0} = \frac{k}{q} \left[\ln \left(\frac{I_0}{A} \right) - 3(1 + \ln T_0) \right] + \frac{3}{2} R_s(T_0) \frac{I_0}{T_0}$

Pour $I_0 = 2,5 \text{ mA}$ $V_D(I_0) = 0,6 \text{ V}$ pour $T_0 = 298 \text{ K}$

7/7

$$V_D(T_0) = \frac{E_g}{q} + T_0 \frac{k}{q} \ln\left(\frac{I_0}{A}\right) - \frac{3kT_0}{q} \ln T_0 + R_S(T_0) I_0$$

$$0,6 = 1,14 + 0,026 \ln \frac{I_0}{A} - 0,077 \ln 298 + 2,5 \cdot 10^{-2}$$

$$\rightarrow \ln \frac{I_0}{A} = -4,84.$$

$$S_D(T_0) = 8,63 \cdot 10^{-5} (-4,84 - 3(6,7)) + \frac{3}{2} \frac{2,5 \cdot 10^{-2}}{298} = -2 \cdot 10^{-3} \text{ V K}^{-1}$$

H.5. $\Delta V_D(T_0) = \frac{T_0 k}{q} \frac{\Delta I_0}{I_0} + R_S(T_0) \Delta I_0 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ V} \ll 2 \cdot 10^{-3} \text{ V}$

pour aller à I_0

la dérive est de l'ordre d'une variation de T de $0,2 \text{ K}$.

FIN !