

Première partie

cycle de Carnot

A/ diagramme de Watt

A1.

On considère un point (V_0, P_0) du diagramme de Watt et une compression à partir de ce point, jusqu'à la pression $P + \Delta P$. Cette compression se traduit par un apport de travail au fluide. Pour une compression adiabatique, ce travail entraîne une augmentation de l'énergie du fluide donc de sa température : la température finale pour la transformation adiabatique est supérieure à celle pour la transformation isotherme. La pression finale est la même donc le volume final est supérieur pour la transformation adiabatique, car $\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P > 0$. Comme le volume décroît lors d'une compression,

$$|\Delta V_{\text{isotherme}}| = V_0 - V_{\text{isotherme}} > V_0 - V_{\text{adiab. rév.}} = |\Delta V_{\text{adiab. rév.}}|$$

et

$$\left| \frac{\Delta P}{\Delta V_{\text{isotherme}}} \right| < \left| \frac{\Delta P}{\Delta V_{\text{adiab. rév.}}} \right|$$

La pente de l'adiabatique réversible est plus forte que celle de l'isotherme.

Pour un gaz parfait, une transformation isotherme est décrite par la loi du gaz parfait : $PV = nRT = \text{cste}$, d'où en prenant la différentielle logarithmique $dP/P + dV/V = 0$, puis l'expression de la pente

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T = -\frac{P}{V}$$

Pour une adiabatique réversible, $\delta Q = 0$ et $\delta W = -p_e dV = -pdV$, soit

$$dU = C_v dT = \delta Q + \delta W = -pdV$$

D'après la loi du gaz parfait, $d(PV) = nRdT$, soit

$$C_v \frac{d(PV)}{nR} = \frac{C_v}{nR} (PdV + VdP) = -pdV ; \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_{\text{adiab. rév.}} = -\frac{C_v + nR}{C_v} \frac{P}{V} = \frac{C_v + nR}{C_v} \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T$$

Enfin, toujours pour le gaz parfait, la loi de Meyer donne

$$C_p = \frac{dH}{dT} = \frac{d(U + PV)}{dT} = C_v + \frac{d(nRT)}{dT} = C_v + nR$$

d'où

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_{\text{adiab. rév.}} = -\frac{C_p}{C_v} \frac{P}{V} = \gamma \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T$$

A2.

Les isothermes du gaz parfait sont des hyperboles : $P = nRT/V$, l'isotherme T_1 étant située au-dessus de l'isotherme T_2 . Les deux isothermes sont reliées par deux adiabatiques, de pentes plus importantes, d'où l'allure du schéma.

Le travail élémentaire fourni par le fluide en évolution réversible est $\delta W = pdV$, il est positif pour une détente ($dV > 0$) et négatif pour une compression, et correspond graphiquement à l'aire située sous la courbe représentant la transformation dans le diagramme de Watt.

Pour que le cycle fournisse de l'énergie, l'aire correspondant à la détente (V croissant) doit être supérieure à l'aire correspondant à la compression, donc le cycle doit être parcouru dans le sens horaire.

L'aire du cycle représente alors le travail fourni par le moteur.

A3.

Le rendement du moteur correspond au rapport du travail fourni sur un cycle par le moteur à la chaleur qu'il absorbe depuis la source chaude pour pouvoir fonctionner.

D'après le schéma de la machine ditherme, les orientations correspondant aux transferts reçus par le fluide, les principes de la thermodynamique s'écrivent pour un cycle réversible :

– premier principe :

$$\Delta U_{\text{cycle}} = 0 = Q_1 + Q_2 + W ; W_{\text{moteur}} = -W = Q_1 + Q_2$$

– second principe :

$$\Delta S_{\text{cycle}} = 0 = \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + S_{\text{créée}} = \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2}$$

Par conséquent

$$\eta = \frac{W_{\text{moteur}}}{Q_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

Si $T_1 = 1300 \text{ K}$ et $T_2 = 300 \text{ K}$, $\eta = 0,77$.

A4.

Ce rendement est indépendant de la nature du fluide, puisque seules interviennent les températures des sources. Pour un moteur fonctionnant entre les deux mêmes sources, le second principe s'écrit, dans le cas général, comme $S_{\text{créée}} \geq 0$, $T_2 > 0$ et $Q_1 > 0$

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = -S_{\text{créée}} \leq 0 ; \frac{Q_2}{Q_1} \leq -\frac{T_2}{T_1}$$

d'où

$$\eta = \frac{W_{\text{moteur}}}{Q_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1} \leq 1 - \frac{T_2}{T_1} = \eta_{\text{max}}$$

Le rendement du cycle de Carnot est bien maximal pour des sources de températures fixées.

B/ diagramme entropique

B1.

Le second principe s'écrit pour une transformation adiabatique ($Q = 0$) et réversible ($S_{\text{créée}} = 0$)

$$\Delta S = \frac{Q}{T_{\text{source}}} + S_{\text{créée}} = 0$$

Il s'agit d'une isentropique.

B2.

Dans le diagramme entropique, les isothermes $1 \rightarrow 1'$ et $2 \rightarrow 2'$ sont horizontales, tandis que les transformations adiabatiques réversibles, donc isentropiques $1' \rightarrow 2$ et $2' \rightarrow 1$ sont des verticales. Lors du contact avec la source chaude à la température T_1 , le fluide reçoit un transfert thermique donc son entropie augmente : le cycle est parcouru dans le sens horaire.

B3.

Pour la transformation isotherme réversible $1 \rightarrow 1'$ en contact avec la source chaude à la température T_1 , l'entropie du fluide croît, donc

$$\Delta S_{1 \rightarrow 1'} = S_{\max} - S_{\min} = \frac{Q_1}{T_1} + S_{\text{créée}} = \frac{Q_1}{T_1}$$

De même, comme le fluide cède réversiblement de la chaleur à la source froide, son entropie décroît et

$$\Delta S_{2 \rightarrow 2'} = S_{\min} - S_{\max} = -\frac{Q_2}{T_2}$$

B4.

L'aire du cycle rectangulaire, vaut

$$\mathcal{A} = (T_1 - T_2)(S_{\max} - S_{\min}) = T_1 \frac{Q_1}{T_1} - T_2 \left(-\frac{Q_2}{T_2} \right) = Q_1 + Q_2 = W_{\text{moteur}}$$

L'aire du cycle est identique à l'aire du cycle dans le diagramme de Watt.

Le rendement vaut $\eta = W_{\text{moteur}}/Q_1$. Or le travail du moteur est égal à l'aire du cycle, tandis que le second principe pour la transformation $1 \rightarrow 1'$ s'écrit $Q_1 = T_1(S_{\max} - S_{\min})$, ce qui permet d'identifier Q_1 à l'aire $\mathcal{A}_{1 \rightarrow 1'}$ sous l'isotherme $1 \rightarrow 1'$. Ainsi

$$\eta = \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A}_{1 \rightarrow 1'}} = \frac{(T_1 - T_2)(S_{\max} - S_{\min})}{T_1(S_{\max} - S_{\min})} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

Deuxième partie

étude d'un générateur à turbine à gaz

C/ premier principe pour un système ouvert

C1.

Pour le système fermé :

- à l'instant t : $m_{\Sigma}(t) = m_0(t) + \delta m_e$;
- à l'instant $t + dt$: $m_{\Sigma}(t + dt) = m_0(t + dt) + \delta m_e$.

Comme la masse du système fermé se conserve $m_\Sigma(t) = m_\Sigma(t + dt)$ soit $m_0(t) + \delta m_e = m_0(t + dt) + \delta m_s$, et finalement l'expression générale du bilan de matière

$$\frac{dm_0}{dt} = \frac{m_0(t + dt) - m_0(t)}{dt} = \frac{\delta m_e - \delta m_s}{dt}$$

En régime permanent la masse de fluide dans le système ouvert est constante, donc le bilan précédent se simplifie en

$$\delta m_s = \delta m_e$$

C2.

Le fluide amont exerce sur le fluide du système Σ une pression P_e sur une section S_e , soit une force $P_e S_e$ dirigée dans le sens de l'écoulement. Pendant dt , le déplacement du fluide à l'entrée vaut DD' , donc le travail fourni a pour expression

$$\delta W_e = P_e S_e DD' = P_e V_{AA'DD'} = P_e v_e \delta m_e$$

De même le fluide aval exerce une force de pression $P_s S_s$ dirigée en sens opposé à l'écoulement, d'où un travail

$$\delta W_s = -P_s v_s \delta m_s$$

Le travail total des forces de pression sur Σ pendant dt a pour expression

$$\delta W_p = P_e v_e \delta m_e - P_s v_s \delta m_s = (P_e v_e - P_s v_s) \delta m$$

où $\delta m = \delta m_e = \delta m_s$ est la masse de fluide transvasée pendant dt . On peut donc définir le travail massique de transvasement par

$$w_p = \frac{\delta W_p}{\delta m} = P_e v_e - P_s v_s$$

C3.

Les énergies cinétique et potentielle étant négligeables, le premier principe pour le système fermé Σ s'écrit

$$dU_\Sigma = \delta W + \delta Q = \delta W_p + \delta W_u + \delta Q$$

- à l'instant t , $U_\Sigma(t) = U_{\Sigma_0}(t) + \delta U_e = U_{\Sigma_0}(t) + u_e \delta m_e$;
- à l'instant $t + dt$, $U_\Sigma(t + dt) = U_{\Sigma_0}(t + dt) + \delta U_s = U_{\Sigma_0}(t + dt) + u_s \delta m_s$;

Par conséquent, en régime permanent

$$dU_\Sigma = (U_{\Sigma_0}(t + dt) + u_s \delta m_s) - (U_{\Sigma_0}(t) + u_e \delta m_e) = (u_s - u_e) \delta m$$

En introduisant le travail utile massique w_u et le transfert thermique massique q , tels que $\delta W_u = w_u \delta m$ et $\delta Q = q \delta m$, l'expression du premier principe devient

$$(u_s - u_e) \delta m = (P_e v_e - P_s v_s) \delta m + w_u \delta m + q \delta m$$

soit

$$(u_s + P_s v_s) - (u_e + P_e v_e) = h_s - h_e = w_u + q$$

D/ cycle de Brayton idéal

D1.

L'identité thermodynamique pour l'enthalpie $dH = TdS + VdP$, combinée à la relation $dH = C_p dT$ valable pour le gaz parfait permet d'écrire pour le gaz parfait

$$C_p dT = TdS + VdP ; dS = C_p \frac{dT}{T} - \frac{VdP}{T}$$

La loi du gaz parfait, $PV = nRT$ permet d'éliminer V

$$dS = C_p \frac{dT}{T} - nR \frac{dP}{P}$$

Pour une isentropique, $dS = 0$, et si C_p peut être supposé indépendant de la température, la relation précédente s'intègre entre deux états (T_1, P_1) et (T_2, P_2) liés par une isentropique

$$0 = \frac{C_p}{nR} \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right)$$

D'après la définition de $\gamma = C_p/C_v$ et la relation de Meyer pour le gaz parfait $C_p - C_v = nR$, $C_p = \gamma/(\gamma - 1)$, ce qui permet d'écrire

$$0 = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right) = \ln \left(\left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left(\frac{P_1}{P_2} \right) \right)$$

et finalement la loi de Laplace

$$\frac{P^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{T} = cste$$

Par conséquent pour l'isentropique $1 \rightarrow 2$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \lambda ; T_2 = \lambda T_1$$

De même, comme $P_3 = P_2$ et $P_4 = P_1$, pour l'isentropique $3 \rightarrow 4$

$$\frac{T_4}{T_3} = \left(\frac{P_4}{P_3} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{1}{\lambda} ; T_4 = \frac{T_3}{\lambda} = \frac{\tau T_1}{\lambda}$$

En résumé

$$T_2 = \lambda T_1 ; T_4 = \frac{\tau T_1}{\lambda}$$

Application numérique : $\gamma = 1,4$, $T_1 = 300$ K, $T_3 = 1300$ K, $P_1 = 1$ bar, $P_2 = 10$ bar

$$\lambda = \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1,93 ; \tau = \frac{T_3}{T_1} = 4,33 ; T_2 = 579 \text{ K} ; T_4 = 673 \text{ K}$$

D2.

Pour le gaz parfait, $\Delta h = c_p \Delta T$. Le compresseur fonctionne de manière isentropique et réversible, donc adiabatique. Le premier principe appliqué au fluide en écoulement pour la transformation adiabatique $1 \rightarrow 2$ s'écrit

$$h_2 - h_1 = c_p(T_2 - T_1) = c_p T_1(\lambda - 1) = w_{12} + q_{12} = w_{12}$$

$$w_{12} = c_p T_1(\lambda - 1) = 279 \text{ kJ kg}^{-1}$$

D3.

Dans la chambre de combustion le gaz ne reçoit pas de travail : $w_{23} = 0$, donc le premier principe s'écrit

$$\begin{aligned} h_3 - h_2 &= c_p(T_3 - T_2) = c_p T_1(\tau - \lambda) = q_{23} \\ q_{23} &= c_p T_1(\tau - \lambda) = 721 \text{ kJ kg}^{-1} \end{aligned}$$

D4.

Le travail fourni par le gaz à la turbine s'exprime comme précédemment. Comme la turbine fonctionne de manière isentropique réversible, donc adiabatique

$$\begin{aligned} h_4 - h_3 &= c_p(T_4 - T_3) = c_p \tau T_1 \left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right) = w_{34} + q_{34} = w_{34} = -w_T \\ w_T &= c_p T_1 \frac{\tau}{\lambda} (\lambda - 1) = 627 \text{ kJ kg}^{-1} \end{aligned}$$

D5.

Le travail récupéré par la turbine sert à faire fonctionner le compresseur et l'alternateur : $w_T = w_c + w_a = w_c - w_{12}$

$$\begin{aligned} w_a &= w_T - w_{12} = c_p T_1 \frac{\tau}{\lambda} (\lambda - 1) - c_p T_1 (\lambda - 1) = c_p T_1 \left(\frac{\tau}{\lambda} - 1 \right) (\lambda - 1) = c_p T_1 \left(\tau + 1 - \lambda - \frac{\tau}{\lambda} \right) \\ w_a &= 347 \text{ kJ kg}^{-1} \end{aligned}$$

étude de w_a en fonction de λ

$$\frac{\partial w_a}{\partial \lambda} = c_p T_1 \left(\frac{\tau}{\lambda^2} - 1 \right) ; \frac{\partial w_a}{\partial \lambda}(\lambda < \sqrt{\tau}) > 0 ; \frac{\partial w_a}{\partial \lambda}(\sqrt{\tau}) = 0 ; \frac{\partial w_a}{\partial \lambda}(\lambda > \sqrt{\tau}) < 0$$

w_a est donc maximal pour $\lambda = \lambda_{\max} = \sqrt{\tau} = 2,08$. Cette valeur est proche de la valeur utilisée (1,93). On peut également calculer

$$w_{a,\max} = c_p T_1 (\sqrt{\tau} - 1)^2 = 351 \text{ kJ kg}^{-1}$$

qui est supérieure à la valeur calculée mais très proche de celle-ci.

D6.

$$\mathcal{R} = \frac{w_c}{w_a} = \frac{c_p T_1 (\lambda - 1)}{c_p T_1 (\lambda - 1) (\tau/\lambda - 1)} = \frac{1}{\tau/\lambda - 1} = 0,8$$

Ici $w_a > w_c$, et la turbine fournit plus d'énergie à l'alternateur qu'au compresseur. D'après l'expression de $\mathcal{R}$, ce rapport est fonction croissante de λ (plus la compression est importante, plus la part de w_T utilisée par le compresseur est élevée), et décroissante de τ (plus l'écart de température maximal est important, plus la part de w_T fournie à l'alternateur est importante).

D7.

La grandeur utile du générateur à turbine est le travail fourni à l'alternateur caractérisé par w_a , et la grandeur coûteuse est le transfert thermique q_{23} fourni par la combustion.

$$\eta = \frac{w_a}{q_{23}} = \frac{c_p T_1 (\tau/\lambda - 1)(\lambda - 1)}{c_p T_1 (\tau - \lambda)} = \frac{\lambda - 1}{\lambda} = 1 - \frac{1}{\lambda} = 0,482$$

Pour le cycle de Carnot fonctionnant entre les mêmes températures extrêmes $T_1 = 300\text{ K}$ et $T_2 = 1300\text{ K}$, le rendement, calculé à la question A.3 vaut $\eta_C = 0,77$: le rendement du cycle de Brayton est nettement inférieur.

Le rendement du cycle de Brayton s'exprime en fonction des températures puisque $\lambda = T_2/T_1$

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} < 1 - \frac{T_1}{T_3} = \eta_c$$

D8.

Comme $w_{41} = 0$ par hypothèse, le premier principe donne

$$w_{41} = h_1 - h_4 = c_p(T_1 - T_4) = c_p T_1 \left(1 - \frac{\tau}{\lambda}\right) = -373\text{ kJ kg}^{-1}$$

Cette énergie est négative donc le gaz fournit de l'énergie au milieu extérieur. Cette énergie est directement récupérable sous forme de chaleur (principe de la cogénération) mais pas de travail, car d'après le second principe on ne peut pas envisager de transformation dont le seul effet soit la conversion de chaleur en travail.

On peut cependant récupérer une partie de cette chaleur et la convertir indirectement en travail, en utilisant le principe du régénérateur étudié en partie F.

E/ cycle de Brayton réel**E1.**

On utilise la relation $\Delta h = c_p \Delta T$ et les définitions des rendements isentropiques, où les transformations isentropiques ont été étudiées dans la partie précédente :

– pour le compresseur

$$\eta_C = \frac{h_2 - h_1}{h_{2'} - h_1} = \frac{T_2 - T_1}{T_{2'} - T_1} = \frac{(\lambda - 1)T_1}{T_{2'} - T_1}$$

soit

$$T_{2'} = T_1 + \frac{(\lambda - 1)T_1}{\eta_C} = T_1 \left(1 + \frac{\lambda - 1}{\eta_C}\right) = 649\text{ K}$$

– pour la turbine

$$\eta_T = \frac{h_{4'} - h_3}{h_4 - h_3} = \frac{T_{4'} - T_3}{T_4 - T_3} = \frac{T_{4'} - \tau T_1}{\tau T_1 (1/\lambda - 1)}$$

soit

$$T_{4'} = \tau T_1 \left(1 + \eta_T \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)\right) = 767\text{ K}$$

E2.

En l'absence de précision, le compresseur peut être encore supposé en fonctionnement adiabatique. L'expression de $w_{12'}$ est alors identique à celle w_{12} , la température T_2 étant remplacée par $T_{2'}$

$$w_{12'} = c_p(T_{2'} - T_1) = c_p T_1 \frac{\lambda - 1}{\eta_C} = 349 \text{ kJ kg}^{-1}$$

E3.

En poursuivant l'analogie précédente

$$q_{2'3} = c_p(T_3 - T_{2'}) = c_p \left(\tau T_1 - T_1 \left(1 + \frac{\lambda - 1}{\eta_C} \right) \right) = c_p T_1 \left(\tau - 1 - \frac{\lambda - 1}{\eta_C} \right) = 651 \text{ kJ kg}^{-1}$$

De même

$$w_T = -w_{34'} = c_p(T_3 - T_{4'}) = c_p T_1 \tau \eta_T \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right) = c_p T_1 \frac{\tau \eta_T}{\lambda} (\lambda - 1) = 533 \text{ kJ kg}^{-1}$$

E4.

Comme dans le cas réversible, le travail w'_c fourni par la turbine au compresseur est entièrement cédé au gaz, donc $w'_c = w_{12'}$ et

$$w'_a = w_T - w'_c = w_T - w_{12'} = c_p T_1 (\lambda - 1) \left(\eta_T \frac{\tau}{\lambda} - \frac{1}{\eta_C} \right) = c_p T_1 \left(\eta_T \tau + \frac{1}{\eta_C} - \eta_T \frac{\tau}{\lambda} - \frac{\lambda}{\eta_C} \right)$$

$$w'_a = 184 \text{ kJ kg}^{-1}$$

De l'expression de w'_a on déduit

$$\frac{\partial w'_a}{\partial \lambda} = c_p T_1 \left(\frac{\eta_T \tau}{\lambda^2} - \frac{1}{\eta_C} \right)$$

la dérivée s'annule pour $\lambda = \sqrt{\eta_C \eta_T \tau}$, donc le rendement maximal correspond à

$$\lambda'_{\max} = \sqrt{\eta_C \eta_T \tau} = \sqrt{\eta_C \eta_T} \lambda_{\max} < \lambda_{\max} ; \lambda'_{\max} = 1,72$$

Cette valeur reste proche de la valeur utilisée en pratique $\lambda = 1,93$.

E5.

$$\mathcal{R}' = \frac{w'_c}{w'_a} = \frac{c_p T_1 (\lambda - 1) / \eta_C}{c_p T_1 (\lambda - 1) (\tau \eta_T / \lambda - 1 / \eta_C)} = \frac{1}{\eta_C \eta_T \tau / \lambda - 1} = \frac{\lambda}{\tau \eta_T \eta_C - \lambda} = 1,9$$

Comme $\eta_C \eta_T < 1$,

$$\mathcal{R}' = \frac{1}{\eta_T \eta_C \tau / \lambda - 1} > \frac{1}{\tau / \lambda - 1} = \mathcal{R}$$

du fait des sources des irréversibilités, la répartition de w_T est moins bonne, car la turbine fournit moins de travail alors que le compresseur en absorbe plus. Du point de vue numérique, on passe de $\mathcal{R} = 0,8$ à $\mathcal{R}' = 1,9$: le compresseur absorbe deux fois plus d'énergie que la turbine n'en fournit à l'alternateur.

$$\eta' = \frac{w'_a}{q_{2'3}} = \frac{c_p T_1 (\lambda - 1) (\eta_T \tau / \lambda - 1 / \eta_C)}{c_p T_1 (\tau - 1 - (\lambda - 1) / \eta_C)} = \frac{(\lambda - 1) (\eta_T \tau / \lambda - 1 / \eta_C)}{\tau - 1 - (\lambda - 1) / \eta_C} = 0,28$$

Du fait des irréversibilités, le rendement $\eta' = 0,28$ est nettement inférieur au rendement $\eta = 0,48$ du cycle réversible.

F/ régénérateur

F1.

On utilise la définition de l'efficacité ε et la relation $\Delta h = c_p \Delta T$

$$\varepsilon = \frac{h_{2R} - h_{2'}}{h_{4'} - h_{2'}} = \frac{T_{2R} - T_{2'}}{T_{4'} - T_{2'}}$$

$$T_{2R} = T_{2'} + \varepsilon(T_{4'} - T_{2'}) = 761 \text{ K}$$

F2.

D'après le premier principe appliqué à la transformation $2' \rightarrow 2R$, qui se fait sans échange de travail utile

$$q_{2'2R} = h_{2R} - h_{2'} = c_p(T_{2R} - T_{2'}) = 112 \text{ kJ kg}^{-1}$$

F3.

Les transferts thermiques sont additifs donc en présence du régénérateur $q_{2'3} = q_{2'2R} + q_{2R3}$, et puisque le transfert global $q_{2'3}$ est inchangé, le transfert reçu dans la chambre de combustion vaut

$$q_{2R3} = q_{2'3} - q_{2'2R} = 539 \text{ kJ kg}^{-1}$$

Les échanges de travail dans le compresseur et la turbine, et par conséquent w'_a ne sont pas modifiés puisque les températures amont et aval T_1 , $T_{2'}$, T_3 et $T_{4'}$ sont inchangées. La dépense énergétique pour le fonctionnement du système en présence du régénérateur est q_{2R3} , donc la nouvelle valeur du rendement est

$$\eta_R = \frac{w'_a}{q_{2R3}} = 0,34$$

L'utilisation du régénérateur permet d'augmenter le rendement de 0,28 à 0,34.

Troisième partie cogénération d'énergies

G/ production d'énergie électrique : le turbo alternateur

G1.

Le champ créé par le rotor a pour expression $\vec{B} = B_0 \vec{u}(t)$ où $\vec{u}(t)$ est le vecteur unitaire tournant à la vitesse angulaire ω autour de l'axe Oz de rotation du rotor. À un déphasage angulaire près,

qui peut être annulé par un choix correct de l'origine des temps, le flux du champ magnétique supposé uniforme à travers les N spires du stator a pour expression

$$\phi(t) = N\vec{B}(t) \cdot S\vec{u}_x = NS_b B_0 \vec{u}(t) \cdot \vec{u}_x = NS_b B_0 \cos(\omega t)$$

et d'après la loi de Faraday

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = NS_b B_0 \omega \sin(\omega t)$$

Par conséquent, cette force électromotrice étant sinusoïdale

$$E_m = NS_b B_0 \omega ; E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = \frac{NS_b B_0 \omega}{\sqrt{2}}$$

G2.

La fréquence de la force électromotrice induite donc du courant est $f = \omega/(2\pi) = 50$ Hz. La vitesse de rotation de la turbine doit être égale à

$$\omega = 2\pi f = 50 \text{ tr s}^{-1} = 3000 \text{ tr min}^{-1}$$

G3.

D'après les questions précédentes

$$A = \frac{NS_b}{\sqrt{2}} = \frac{E}{B_0 \omega} = \frac{E}{2\pi f B_0} = 20 \text{ m}^2$$

G4.

La puissance électrocinétique moyenne a pour expression $P = EI \cos \varphi$, soit

$$I = \frac{P}{E \cos \varphi} = 250 \text{ A}$$

G5.

L'ensemble est équivalent à une source de tension parfaite de valeur efficace E alimentant l'association série de l'impédance interne $\underline{z}_{\text{int}} = r + j\ell\omega$ et de l'installation d'impédance équivalente $\underline{Z}_c$.

G6.

En notation complexe la loi des mailles s'écrit

$$\underline{E} = \underline{U} + (r + j\ell\omega)\underline{I}$$

soit

$$|\underline{E}|^2 = |\underline{U}|^2 + (r^2 + \ell^2 \omega^2)|\underline{I}|^2 + 2\Re(\underline{U}\underline{I}^*(r - jL\omega))$$

Le facteur de puissance représente le déphasage entre $\underline{U}$ et $\underline{I}$, donc

$$|\underline{E}|^2 = |\underline{U}|^2 + 2(r^2 + \ell^2 \omega^2)|\underline{I}|^2 + 2|\underline{U}| \cdot |\underline{I}| \Re((r - jL\omega)e^{j\varphi})$$

et en introduisant les valeurs efficaces

$$E^2 = U^2 + (r^2 + \ell^2 \omega^2) I^2 + 2(r \cos \varphi + \ell \omega \sin \varphi) U I$$

La tension U aux bornes de l'installation est donc solution de l'équation du second degré

$$U^2 + 2I(r \cos \varphi + \ell \omega \sin \varphi) U + (r^2 + \ell^2 \omega^2) I^2 - E^2 = 0$$

$\cos \varphi = 0,8$, donc $\sin \varphi = 0,6$, $r = 1 \Omega$, $\ell \omega = 7 \Omega$, $I = 250 \text{ A}$, $E = 5000 \text{ V}$, donc U vérifie l'équation

$$U^2 + 2500U - 2,1875 \cdot 10^7 = 0 ; U = 3590 \text{ V}$$

(seule la racine positive convient)

$$P = UI \cos \varphi = 0,72 \text{ MW}$$

La puissance reçue est insuffisante.

H/ production d'énergie thermique : l'échangeur de cogénération

H1.

D'après la question C3., le premier principe de la thermodynamique pour le système ouvert s'écrit entre t et $t + dt$

$$dU_{\Sigma} = (u_s - u_e) \delta m = \delta W_p + \delta W_u + \delta Q = (P_e V_e - P_s V_s) \delta m + \delta W_u + \delta Q ; (h_s - h_e) \delta m = \delta W_u + \delta Q$$

le débit massique est défini par $D_m = \delta m / dt$, et les puissances utile et thermique échangées par $\mathcal{P}_u = \delta W_u / dt$ et $\mathcal{P}_{th} = \delta Q / dt$, donc le bilan s'écrit

$$D_m(h_s - h_e) = \mathcal{P}_{th} + \mathcal{P}_u$$

H2.

Si l'échangeur est adiabatique, les transferts thermiques reçus par l'eau et le gaz sont exactement opposés. Le premier principe appliqué successivement à l'eau et au gaz donne

$$d_m(h_{s,\text{eau}} - h_{e,\text{eau}}) = d_m c_e (\theta_s - \theta_e) = Q_{\rightarrow \text{eau}} = Q_{\text{gaz} \rightarrow \text{eau}} ; D_m(h_{s,\text{gaz}} - h_{e,\text{gaz}}) = D_m c_p (\theta_6 - \theta_4) = Q_{\rightarrow \text{gaz}} = Q_{\text{eau} \rightarrow \text{gaz}}$$

soit, comme $Q_{\text{gaz} \rightarrow \text{eau}} = -Q_{\text{eau} \rightarrow \text{gaz}}$

$$d_m c_e (\theta_s - \theta_e) = -D_m c_p (\theta_6 - \theta_4)$$

$$\frac{d_m}{D_m} = \frac{c_p}{c_e} \left(\frac{\theta_4 - \theta_6}{\theta_s - \theta_e} \right) = 1,1$$

Quatrième partie combustion du méthane

I/ combustion totale et complète

I1.

La réaction est une réaction d'oxydoréduction dans laquelle le méthane est réducteur et l'oxygène oxydant.

Le combustible est le méthane, le comburant est le dioxygène.

12.

D'après l'équation bilan

$$Q = \frac{P(\text{CO}_2)P^{\ominus 2}}{P(\text{CH}_4)P(\text{O}_2)^2} = \left(\frac{x(\text{CO}_2)}{x(\text{CH}_4)x(\text{O}_2)^2} \right) \left(\frac{P^{\ominus}}{P} \right)^2$$

La composition restant fixée avant le système ne réagisse à l'augmentation de pression, la variation relative de pression s'écrit

$$\frac{dQ}{Q} = d \ln Q = -2 \frac{dP}{P} < 0$$

La perturbation est isotherme, donc $K^{\ominus}(T)$ est inchangé. Si l'état initial est un état d'équilibre, $Q_i = K^{\ominus}$, et comme $dQ < 0$, $Q_f < Q_i = K^{\ominus}$. Par conséquent, l'affinité $\mathcal{A}$ vérifie $\mathcal{A}_f = RT \ln(K^{\ominus}/Q_f) > 0$: l'équilibre se déplace dans le sens direct suite à une augmentation de pression, conformément à la loi de Le Châtelier, puisque l'évolution dans le sens direct conduit à une diminution de la quantité de gaz, en réponse à l'augmentation de pression.

13.

Les fractions molaires des composés gazeux s'écrivent $x_i = n_i/n_{\text{gaz}}$, soit pour l'expression du quotient de réaction

$$Q = \left(\frac{x(\text{CO}_2)}{x(\text{CH}_4)x(\text{O}_2)^2} \right) \left(\frac{P^{\ominus}}{P} \right)^2 = \left(\frac{n(\text{CO}_2)n_{\text{gaz}}^2}{n(\text{CH}_4)n(\text{O}_2)^2} \right) \left(\frac{P^{\ominus}}{P} \right)^2$$

Suite à l'introduction d'un composé gazeux inactif, les nombres de moles des composés actifs $n(\text{CO}_2)$, $n(\text{CH}_4)$ et $n(\text{O}_2)$ sont inchangés, mais la quantité totale de gaz augmente, et $dn_{\text{gaz}} > 0$. Par conséquent si l'introduction du composé se fait de manière isobare

$$\frac{dQ}{Q} = 2 \frac{dn_{\text{gaz}}}{n_{\text{gaz}}} > 0 ; dQ > 0$$

La perturbation est isotherme donc $K^{\ominus}$ est inchangé, et comme $dQ > 0$, $Q > K^{\ominus}$ après l'ajout du gaz, soit $\mathcal{A} < 0$: l'équilibre se déplace dans le sens indirect (la combustion du méthane est moins avancée).

14.

D'après la loi de Hess

$$\Delta_r H^{\ominus}_1 = \Delta_f H^{\ominus}(\text{CO}_{2(g)}) + 2 \times \Delta_f H^{\ominus}(\text{H}_2\text{O}_{(l)}) - \Delta_f H^{\ominus}(\text{CH}_{4(g)}) - 2 \times \Delta_f H^{\ominus}(\text{O}_{2(g)}) = -890,7 \text{ kJ mol}^{-1}$$

15.

D'après la loi du gaz parfait sous 298 K et 1 bar, $V = 1 \text{ m}^3$ de méthane représente

$$n = \frac{PV}{RT} = 40,4 \text{ mol}$$

L'énergie libérée correspond à l'opposé de la variation d'enthalpie du système lors de la combustion des n moles de méthane

$$Q = -\Delta H = -\xi \Delta_r H^{\ominus}_1 = -\frac{n}{\nu} \Delta_r H^{\ominus}_1 = -n \Delta_r H^{\ominus}_1 = 40,4 \times 890,7 = 36 \text{ MJ} = 36 \cdot 10^3 \text{ kW s} = 10 \text{ kW h}$$

16.

La combustion d'une mole de méthane nécessite 2 moles de dioxygène, donc 10 moles d'air (2 moles de dioxygène et 8 moles de diazote). Par conséquent la combustion de 1 m^3 de méthane nécessite 10 m^3 dans les mêmes conditions de température et de pression.

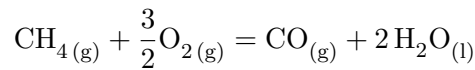
17.

La masse molaire du méthane est $M = 16\text{ g mol}^{-1}$. La masse m de méthane qui libère une énergie équivalente à une tep vérifie $-(m/M)\Delta_r H^\ominus_1 = 1\text{ tep}$

$$m = M \frac{1\text{ tep}}{-\Delta_r H^\ominus_1} = 16 \cdot 10^{-3} \frac{42 \cdot 10^9}{890,7 \cdot 10^3} = 754\text{ kg}$$

18.

En l'absence de précision dans l'énoncé, on suppose que comme lors de la combustion complète l'eau se forme à l'état liquide. La réaction s'écrit



et en utilisant la loi de Hess

$$\Delta_r H^\ominus_2 = -607,7\text{ kJ mol}^{-1}$$

La combustion incomplète produit 30% d'énergie en moins ($-607,7\text{ kJ mol}^{-1}$ au lieu de $-890,7\text{ kJ mol}^{-1}$ pour la combustion complète), et conduit à un produit de réaction très toxique, le monoxyde de carbone CO.

J/ établissement du diagramme d'Ostwald

J1.

Après élimination de l'eau les quantités de matière dans la fumée sont données par CO : k , CO₂ : $1 - k$, N₂ : 8λ et O₂ : $2(\lambda - 1) + k/2$, soit une quantité totale $n = 10\lambda - 1 + k/2$.

Les fractions molaires des différents composés ont pour expressions

$$z = [\text{CO}] = \frac{k}{10\lambda - 1 + k/2} ; y = [\text{CO}_2] = \frac{1 - k}{10\lambda - 1 + k/2} ; x = [\text{O}_2] = \frac{2(\lambda - 1) + k/2}{10\lambda - 1 + k/2}$$

Si les produits désignent les molécules formées au cours de la réaction CO et CO₂

$$\Sigma = y + z = \frac{1}{10\lambda - 1 + k/2} = \frac{1}{\alpha + k/2} ; \alpha = 10\lambda - 1$$

J2.

D'après l'expression de Σ et des fractions molaires x , y et z

$$y = (1 - k)\Sigma ; z = k\Sigma ; x = (2(\lambda - 1) + k/2)\Sigma$$

d'où $\Sigma = z/k$, puis

$$y = \frac{1 - k}{k}z ; y + z = \frac{z}{k}$$

J3.

Comme

$$\Sigma = \frac{1}{10\lambda - 1 + k/2}$$

$$\lambda = \frac{1}{10} \left(1 + \frac{1}{\Sigma} - \frac{k}{2} \right)$$

puis

$$x = (2(\lambda - 1) + k/2)\Sigma = \frac{\Sigma}{5} \left(1 + \frac{1}{\Sigma} - \frac{k}{2} - 10 + \frac{5k}{2} \right) = \frac{\Sigma}{5} \left(\frac{1}{\Sigma} - 9 + 2k \right)$$

et, comme $y = (1 - k)\Sigma$

$$5x + 9y = 1 - 9\Sigma + 2k\Sigma + 9\Sigma - 9k\Sigma = 1 - 7k\Sigma = 1 - 7z$$

x , y et z sont liés par la relation

$$5x + 9y = 1 - 7z$$

qui définit à z fixé des droites dans le plan (x, y) .

J4.

Si la fraction molaire $x = [\text{CO}]$ est nulle, seul CO_2 est produit, donc la combustion du méthane est complète. La courbe correspond alors aux différents états finaux possibles de la combustion complète, selon la valeur du facteur d'air.

Les coordonnées du point A , intersection avec Ox vérifient $y = 0$, $5x = 1$, soit $A = (0, 2; 0)$. En A , la concentration $[\text{CO}_2] = 0$, ce qui correspond à la combustion complète du méthane dans un très large excès d'air, qui produit une quantité très faible de CO_2 , la composition de la fumée tendant vers celle de l'air ce qui est bien vérifié puisque $x_A = [\text{O}_2] = 0, 2$.

Les coordonnées du point B , intersection avec Oy vérifient $x = 0$, $9y = 1$, soit $B = (0; 1/9 = 0, 11)$. En B , $[\text{O}_2] = 0$, ce qui correspond à la combustion complète du méthane dans la quantité juste suffisante d'air : la combustion stœchiométrique est donc représentée par le point B . La combustion complète d'une mole de méthane nécessite 2 moles de O_2 et 8 moles de N_2 , pour produire une mole de CO_2 et 2 moles d'eau, donc la fumée sèche contient seulement une mole de CO_2 pour 8 moles de N_2 , donc on vérifie bien $x_B = 1/9$.

J5.

Les droites $Z_{0,04}$ et $Z_{0,08}$, d'équations respectives $5x + 9y = 0,72$ et $5x + 9y = 0,44$ sont parallèles à la droite Z_0 et situées en-dessous de celle-ci.

J6.

La connaissance de x et y permet grâce à ces courbes de déterminer z , donc de préciser le caractère complet ou non de la combustion.

étude des courbes isofacteur de l'air

J7.

Λ_1 a pour équation $19x + 9y = 1$. Son intersection avec l'axe des abscisses vérifie $y = 0$, $x = 1/19$, soit $P = (1/19; 0)$, et son intersection avec l'axe des ordonnées est B puisque la combustion stœchiométrique correspond à $z = 0$, $x = 0$ et $\lambda = 1$.

La courbe Λ_1 limite le domaine où la combustion a lieu avec un excès d'air. La droite Z_0 se situe dans le domaine d'excès d'air, puisque la combustion complète nécessite une quantité suffisante d'oxygène, tandis qu'une quantité insuffisante produit nécessairement du CO. Comme la droite Z_0 limite le domaine de compositions possibles puisque $z \geq 0$, le domaine où la combustion est réalisée avec un excès d'air est limité par les droites Λ_1 et Z_0 .

J8.

Les équations des droites $\Lambda_{0,8}$ et $\Lambda_{1,5}$ sont

$$15x + 7,4y = 0,2 \ (\Lambda_{0,8}) ; \ 29x + 13y = 3 \ (\Lambda_{1,5})$$

J9.

Le point R est pratiquement à l'intersection des droites $Z_{0,04}$ et $\Lambda_{1,5}$. On en déduit que la combustion est partielle, produit des quantités similaires de CO et CO₂ et se fait avec un excès d'air ($\lambda > 1$).

Le diagramme d'Ostwald permet, à partir des fractions molaires x et y , de déduire la composition complète des fumées, et de décrire les caractéristiques de la combustion. Ceci est utile pour l'optimisation des conditions de combustion.

