

Première partie : Onde acoustique dans un fluide parfait

A/ célérité du son

1) Soit une tranche de fluide contenue au repos entre x et $x+dx$.
 A t , elle est entre $x+u(x,t)$ et $x+dx+u(x+dx,t)$ et
 A $t+dt$, elle est entre $x+u(x,t+dt)$ et $x+dx+u(x+dx,t)$

Le PFD s'écrit $m \cdot \vec{a} = \Sigma \vec{F}$

$$\text{ou } \vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}$$

$m = \rho_0 dx S_0$ (c'est un système fermé, sa masse est constante donc égale à sa masse initiale)

$$\Sigma \vec{F} = P_{\text{gauche}} S_0 \vec{u}_x - P_{\text{droite}} S_0 \vec{u}_x \quad (\text{pas de pesanteur})$$

$$= P(x+u(x,t), t) S_0 \vec{u}_x - P(x+dx+u(x+dx,t), t) S_0 \vec{u}_x$$

$$= \left[P(x) + \frac{\partial P}{\partial x} u(x,t) - \left(P(x) + \frac{\partial P}{\partial x} (dx + u(x,t)) + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) \right] S_0 \vec{u}_x$$

$$= -\frac{\partial (p + P_0)}{\partial x} dx \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) S_0 \vec{u}_x$$

$$\Sigma \vec{F} = -\frac{\partial p}{\partial x} dx S_0 \vec{u}_x \quad \text{car } \frac{\partial P_0}{\partial x} = 0 \quad (P_0 \text{ est uniforme})$$

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \vec{u}_x + \underbrace{v \left(\frac{\partial}{\partial x} v \right) \vec{u}_x}_{\text{d'ordre 2 donc négligeable}} \quad \text{et } \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \text{ est négligeable car d'ordre 2.}$$

Finalement $S_0 \rho_0 dx \frac{\partial v}{\partial t} \vec{u}_x = -\frac{\partial p}{\partial x} dx S_0 \vec{u}_x$

et $\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$

2) L'équation d'Euler s'écrit: $\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\text{grad } P$ (pas de pesanteur)

①

$$\text{Soit } \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = - \frac{\partial (P_0 + P_1)}{\partial x} \vec{u}_x$$

$$\text{or } \frac{\partial P_0}{\partial x} = 0 \quad \text{et } (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \text{ est d'ordre 2}$$

$$\text{donc } (\rho_0 + \rho_1) \frac{\partial v}{\partial t} \vec{u}_x = - \frac{\partial P}{\partial x} \vec{u}_x$$

De plus $\rho_1 \frac{\partial v}{\partial t}$ est d'ordre 2 donc négligeable

$$\text{et finalement } \boxed{\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial P}{\partial x}} \quad \begin{array}{l} \text{longueur } \lambda \\ \text{longueur au repos} \end{array}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad \delta &= \frac{dV}{V_0} = \frac{S_0 (u(x+dx, t) - u(x, t) + dx) - dx}{S_0 dx} \\ &= \frac{dx \frac{\partial u}{\partial x}}{dx} \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \boxed{\delta = \frac{\partial u}{\partial x}}$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \chi_s &= - \frac{1}{V} \frac{dV}{dP} = - \frac{dV}{V} \frac{1}{dP} \quad \text{à } S \text{ fixé et en assimilant une} \\ &= - \delta \frac{1}{P - P_0} \quad \text{dérivée à un rapport de petites variations} \end{aligned}$$

$$\chi_s = - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{1}{P}$$

$$\text{Finalement } p(x, t) = - \frac{1}{\chi_s} \frac{\partial u}{\partial x}$$

et en dérivant par rapport au temps

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \frac{1}{\chi_s} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = - \frac{1}{\chi_s} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = - \frac{1}{\chi_s} \frac{\partial v}{\partial x}$$

Théorème de Schwarz

$$\text{On trouve bien } \boxed{\frac{\partial p}{\partial t} = - \frac{1}{\chi_s} \frac{\partial v}{\partial x}}$$

4) On prend le résultat du 1) qu'on dérive par rapport à x

$$\rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad (1)$$

On prend le résultat du 3) qu'on dérive par rapport à t :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\frac{1}{X_S} \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} \quad (2)$$

Comme $\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t}$, on reporte (1) dans (2) et on obtient

$$\boxed{\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = + \frac{1}{X_S \rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}}$$

C'est l'équation de d'Alembert proposée avec la célérité $\boxed{C = \sqrt{\frac{1}{\rho_0 X_S}}}$

5) Pour un gaz parfait en transformation isentropique
 $PV^\gamma = P_0 V_0^\gamma$ (loi de Laplace)

$$\text{donc } \left. \frac{\partial V}{\partial P} \right|_S = \frac{\partial \left(V_0 \left(\frac{P_0}{P} \right)^{1/\gamma} \right)}{\partial P} = V_0 P_0^{1/\gamma} \left(-\frac{1}{\gamma} \right) P^{-1/\gamma-1}$$

On prend cette dérivée en $P = P_0$ d'où $\left. \frac{\partial V}{\partial P} \right|_S = V_0 \left(-\frac{1}{\gamma} \right) P_0^{-1}$

$$\text{et } X_S = -\frac{1}{V_0} V_0 \left(-\frac{1}{\gamma} \right) P_0^{-1} \quad \text{donc } \boxed{X_S = \frac{1}{\gamma P_0}}$$

$$\text{or } P_0 \Pi = \rho_0 R T_0$$

$$\text{donc } C = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}} = \boxed{\sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}}} = C$$

$$6) C_{\text{eau}} = \sqrt{\frac{1}{5 \cdot 10^{-10} \cdot 10^3}} = \sqrt{\frac{1}{5 \cdot 10^{-7}}} = \sqrt{2 \cdot 10^6} = \sqrt{2} \cdot 10^3$$

$$\boxed{C_{\text{eau}} \approx 1,4 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}} > C_{\text{air}} \quad (\text{Il y a un facteur 4})$$

$$\boxed{C_{\text{sol}} \approx 3 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}} \quad \text{Ca dépend du module d'Young } Y \text{ du solide et de sa masse volumique } \left(Y = \frac{1}{X_S} \right)$$

B/ Impédances en acoustique

$$1) \text{ On va utiliser l'équation du A1) } \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t}$$

(2)

avec ~~$p(x,t)$~~ $u(x,t) = f(t - \frac{x}{c})$

$$\text{donc } v(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t} = f'(t - \frac{x}{c}) = g(t - \frac{x}{c})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = g'(t - \frac{x}{c})$$

p va avoir la même forme: $h(t - \frac{x}{c})$

$$\text{et } \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{c} h'(t - \frac{x}{c})$$

$$\text{L'équation du 1) devient } -\frac{1}{c} h'(t - \frac{x}{c}) = -\gamma_0 g'(t - \frac{x}{c})$$

$$\text{ou } h(t - \frac{x}{c}) = \gamma_0 c g(t - \frac{x}{c})$$

$$\text{soit } p(x,t) = \gamma_0 c v(x,t)$$

(en intégrant par rapport à t avec une constante additive nulle)

$$\text{donc } \boxed{Z = \gamma_0 c = \sqrt{\frac{\gamma_0}{\chi_s}} = Z_c}$$

$$Z_c = \frac{P}{v} \text{ s'exprime en } \frac{\text{Pa}}{\text{m.s}^{-1}} = \frac{\text{kg.m}^{-1}\text{s}^{-2}}{\text{m.s}^{-1}} = \text{kg.m}^{-2}\text{s}^{-1}$$

$$\boxed{Z_c \text{ s'exprime en } \text{kg.m}^{-2}\text{s}^{-1}}$$

$$\boxed{Z_{\text{air}} = c_{\text{air}} \gamma_{\text{air}} = 3,4 \cdot 10^2 \cdot 1,3 = 4,5 \cdot 10^2 \text{ kg.m}^{-2}\text{s}^{-1}}$$

$$2) \quad c_{\text{sol}} > c_{\text{liq}} > c_{\text{gaz}} > 0 \text{ et } \gamma_{\text{sol}} > \gamma_{\text{liq}} > \gamma_{\text{gaz}} > 0$$

$$\text{Donc } \boxed{Z_{\text{sol}} > Z_{\text{liq}} > Z_{\text{gaz}}}$$

$$3) \text{ Démonstration demandée } \boxed{Z' = -Z_c}$$

4) En électrocinétique $Z = \frac{U}{I}$ U ou ΔV est ce qui cause le mouvement des charges et I est le flux d'électrons (de charges en fait).

Ici, c'est ΔP qui crée le mouvement d'air et Sv est le débit volumique (flux de particules).

Par analogie, on pose $Z = \frac{\text{ce qui cause le mouvement}}{\text{le flux résultant}}$

soit en acoustique $\boxed{Z_a = \frac{P - P_0}{Sv} = \frac{1}{Sv}}$

Or $\frac{1}{v} = \rho_0 C$ d'où $\boxed{Z_a = \frac{\rho_0 C}{S}}$ pour une onde plane progressive vers les x croissants.

4/ Intensité sonore

1) $u(x, t)$ vérifie l'équation d'onde de d'Alembert.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Or en notation complexe ($e^{j(\omega t - kx)}$), $\frac{\partial}{\partial t}$ revient à $j\omega$
et $\frac{\partial}{\partial x}$ revient à $-jk$

D'où $-k^2 \underline{U}_m = -\frac{\omega^2}{C^2} \underline{U}_m$

et $\boxed{k = \frac{\omega}{C}}$ C'est également $\boxed{\frac{Z_a}{\lambda}}$

On reprend l'équation du A1) $\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$

On écrit en notation complexe $\underline{v} = \underline{V}_m e^{j(\omega t - kx)}$ et $p = \underline{P}_m e^{j(\omega t - kx)}$

d'où $\rho_0 j\omega \underline{V}_m e^{j(\omega t - kx)} = -(-jk) \underline{P}_m e^{j(\omega t - kx)}$

amplitude complexe car il peut y avoir un déphasage.

d'où $\frac{p(x, t)}{\underline{v}(x, t)} = \rho_0 \frac{\omega}{k} = \boxed{\rho_0 C = Z}$

$\underline{V}_m e^{j(\omega t - kx)} = \underline{v}(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t} = j\omega U_m e^{j(\omega t - kx)}$

d'où $\underline{V}_m = j\omega U_m$ et $\boxed{V_m = |\underline{V}_m| = \omega U_m}$

$\underline{P}_m = Z \underline{V}_m$ d'où $\boxed{P_m = Z \omega U_m = \rho_0 C \omega U_m}$

$$\begin{aligned}
 2) \quad I &= \langle \mathcal{P} \rangle = \langle p(x,t) v(x,t) \rangle \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} (p(x,t) v^*(x,t)) \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(p(x,t) \frac{p^*(x,t)}{Z} \right) \quad Z^* = Z \text{ car } Z \text{ est réel} \\
 &= \frac{1}{2} |p(x,t)|^2 \frac{1}{Z}
 \end{aligned}$$

$$I = \frac{1}{2Z} P_m^2$$

$$3) \quad \langle \mathcal{P} \rangle = \langle \mathcal{P} \rangle S_0 = S_0 I = \frac{S_0}{2 \rho_0 c} P_m^2$$

$$\text{or } Z_a = \frac{\rho_0 c}{S}$$

$$\text{d'où } \langle \mathcal{P} \rangle = \frac{P_m^2}{2 Z_a}$$

$$4) \quad \text{Pour un signal fort (seuil de douleur)} \quad P_m \sim \frac{P_{\text{atm}}}{3 \cdot 10^3}$$

$$V_m \sim \frac{c}{5 \cdot 10^3} \quad \text{Ce sont bien des termes infiniment petits et}$$

on a eu raison de linéariser et de négliger les termes d'ordre 2.

$$\text{On a également } \frac{U_m}{\lambda} = \frac{V_m}{c T} = \frac{V_m \rho_0 c}{c} \text{ d'où } U_m = \frac{\lambda}{7 \cdot 10^2}$$

L'oreille est extrêmement sensible : elle détecte une variation de pression $3 \cdot 10^3$ fois plus faible de P_{atm} , un déplacement d'un centième de nanomètre ! En plus sa sensibilité s'étend sur 6 décades !

$$\begin{aligned}
 5) \quad I_{\text{dB} 2 \text{ sources}} &= 10 \log \frac{I_{2 \text{ sources}}}{I_0} = 10 \log \frac{2 I_{1 \text{ source}}}{I_0} \\
 &= 10 \log 2 + I_{\text{dB} 1 \text{ source}}
 \end{aligned}$$

$$I_{\text{dB} 2 \text{ sources}} = I_{\text{dB} 1 \text{ source}} + 3 \text{ dB} = 63 \text{ dB}$$

Deuxième partie: Réflexion et transmission en incidence normale

A/ Tuyau sonore: influences des fluides et d'un raccordement

1) On a pris $p_i(x,t) = P_{im} \cos\left(\omega t - \frac{x}{C_1}\right)$

Or, d'après (IA1) $\rho_1 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$ (on prend la masse volumique du fluide 1)

donc $v_i(x,t) = \frac{P_{im}}{\rho_1 C_1} \cos\left(\omega t - \frac{x}{C_1}\right)$

or $v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}$ donc $u_i(x,t) = \frac{P_{im}}{\rho_1 C_1} \frac{1}{\omega} \sin\left(\omega \left(t - \frac{x}{C_1}\right)\right)$

Or $\sin \theta = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$

d'où $u_i(x,t) = U_{im} \cos\left(\omega t - \frac{x}{C_1} - \frac{\pi}{2}\right)$ avec $U_{im} = \frac{P_{im}}{\rho_1 C_1 \omega}$

2) $\langle P_i \rangle = \frac{P_{im}^2}{2Z_{a1}}$ $\langle P_r \rangle = \frac{P_{rm}^2}{2Z_{a1}}$ $\langle P_t \rangle = \frac{P_{tm}^2}{2Z_{a2}}$

(directement d'après IC3 en utilisant les Z_a du milieu)
(le - vient du fait que $z' = -z$ pour une onde vers la gauche)

3) Considérons une surface infinitésimale dS située en $x=0$
Cette surface n'a pas de masse, les forces qui s'exercent sur elle sont les forces de pression à gauche et à droite: d'où, d'après le PFD

$$0 \vec{a} = P_1(0,t) dS \vec{u}_x + P_2(0,t) dS (-\vec{u}_x)$$

donc $P_1(0,t) = P_2(0,t)$

D'autre part, il ne peut pas y avoir accumulation de matière au niveau de la surface $x=0$ donc le débit volumique en 0 est unique:

$$S_1 v_1(0,t) = S_2 v_2(0,t)$$

Par conséquent $p_i(0,t) + p_r(0,t) = p_t(0,t)$

$$S_1 (v_i(0,t) + v_r(0,t)) = S_2 v_t(0,t)$$

Soit encore $P_{im} \cos \omega t + P_{rm} \cos \omega t = P_{em} \cos \omega t$

$$S_1 \left(\frac{P_{im}}{V_1 C_1} \cos \omega t - \frac{P_{rm}}{V_1 C_1} \cos \omega t \right) = S_2 \frac{P_{em}}{V_2 C_2} \cos \omega t$$

↑
pour une onde qui se propage vers la gauche $z' = -z$.

Et finalement

$$\boxed{\begin{aligned} P_{im} + P_{rm} &= P_{em} \\ \frac{P_{im}}{Z_{a1}} - \frac{P_{rm}}{Z_{a1}} &= \frac{P_{em}}{Z_{a2}} \end{aligned}}$$

4) On substitue P_{em} par $P_{im} - P_{rm}$ dans la 2^e équation ci-dessus

$$\frac{P_{im}}{Z_{a1}} - \frac{P_{rm}}{Z_{a1}} + \frac{P_{rm}}{Z_{a1}} = \frac{P_{im}}{Z_{a2}}$$

d'où $\boxed{\frac{P_{rm}}{P_{im}} = \frac{r_e(0,t)}{r_i(0,t)} = \frac{2}{1+\alpha} = r_p}$

On reporte dans la 1^{re} équation entourée du 3)

$$\boxed{\frac{P_{rm}}{P_{im}} = \frac{r_e(0,t)}{r_i(0,t)} = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} = r_p}$$

5) $R = \left(\frac{P_{rm}}{P_{im}} \right)^2$ d'après 2)

d'où $\boxed{R = \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right)^2}$

$T = \left(\frac{P_{em}}{P_{im}} \right)^2 \frac{Z_{a1}}{Z_{a2}}$ d'après 2) d'où $\boxed{T = \frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2}}$

$\boxed{R+T=1}$ assure la conservation de l'énergie (ou de la puissance):
la puissance incidente est en partie transmise et en partie réfléchie.

6) $r_p = -1$ $t_p = 0$ avec $d \gg 1$
 $R = 1$ $T = 0$

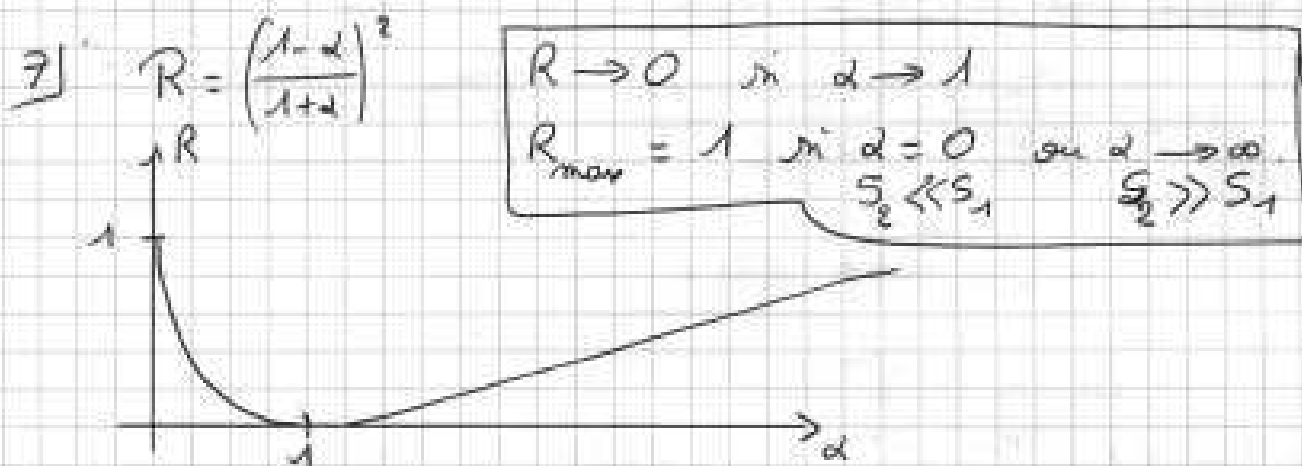
Il n'y a quasiment pas d'onde transmise, les impédances ne sont pas adaptées.

$$T_{dB} = 10 \log(1,7 \cdot 10^{-3}) = 10 \log(1,7) + 10 \log(10^{-3})$$

$$= 1,2 + (-40)$$

$$T_{dB} \approx -38,8 \text{ dB}$$

Le stéthoscope sert d'adaptateur d'impédance: la partie en contact avec le corps a une impédance plus proche de celle de l'oreille et c'est toute la "tête" du stéthoscope qui vibre et met en mouvement l'air dans le tube, le son est moins atténué.



Il y a adaptation d'impédance si $d = 1$: pas d'onde réfléchi.

B/ Parillon exponentiel et adaptation d'impédance

$$1) S = \frac{dV}{V_0} = \frac{V(x,t) - V_0}{V_0} = \frac{S(x+dx)(u(x+dx,t) - u(x,t) + dx) - S(x)dx}{S(x)dx}$$

$$S = \frac{(S(x) + \frac{\partial S}{\partial x} u(x,t)) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + 1 \right) - S(x)}{S(x)} = \frac{S(x) + \frac{\partial S}{\partial x} u + S(x) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial x} u \frac{\partial u}{\partial x} - S(x)}{S(x)}$$

Or $\frac{\partial S}{\partial x} u \frac{\partial u}{\partial x}$ est un infiniment petit d'ordre 2 donc négligeable (*)

(5)

$$\text{Or } \chi_s = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} = -\frac{dV}{V} \frac{1}{P-P_0} = -S \frac{1}{p(x,t)}$$

$$\text{Soit } p(x,t) = -\frac{S}{\chi_s}$$

$$(v) \text{ Reprenons le calcul de } S = \frac{\frac{\partial S}{\partial x} u(x,t) + S(x) \frac{\partial u}{\partial x}}{S(x)}$$

$$\text{or } \frac{\frac{\partial S}{\partial x}}{S} = \frac{\partial \ln S}{\partial x} \quad \text{d'où} \quad S = \frac{d \ln S}{dx} u(x,t) + \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$$

$$\text{et } p(x,t) = -\frac{1}{\chi_s} \left(\frac{d \ln S}{dx} u(x,t) + \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \right) \quad (1)$$

2) On utilise l'équation précédente et l'équation d'Euler linéarisée (2)

$$\frac{\partial(2)}{\partial x}: \quad \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = -\rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t}$$

$$\frac{\partial(1)}{\partial t}: \quad \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{\chi_s} \left(\frac{d \ln S}{dx} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right) \quad \left(\ln S \text{ ne dépend pas de } t \right)$$

$$\text{or } \frac{\partial u}{\partial t} = v(x,t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2(1)}{\partial t^2}: \quad \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\frac{1}{\chi_s} \left(\frac{d \ln S}{dx} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} \right)$$

Dans cette dernière équation, on remplace $\frac{\partial v}{\partial t}$ par $-\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$ (2)

$$\text{et } \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} \text{ par } \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} \quad \left(\frac{\partial(2)}{\partial x} \right)$$

$$\text{d'où} \quad \chi_s \rho_0 \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{d \ln S}{dx} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

C'est bien l'équation proposée avec $\frac{1}{c^2} = \chi_s \rho_0$

$$3) \ln S = \ln S(0) + x/a$$

$$\text{d'où } \frac{d \ln S}{dx} = \frac{1}{a} \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Rmq. si la section est constante ($a \rightarrow \infty$), alors on retrouve l'équation de d'Alembert.

4) On passe en notation réelle

$$p(x,t) = \text{Re}(p(x,t)) = \text{Re}(P_m e^{j(\omega t - k'x)} e^{-k''x})$$

$$\text{d'où } p(x,t) = P_m \cos(\omega t - k'x) e^{-k''x}$$

propagation
($e^{j(\omega t - k'x)}$)
notation complexe
amortissement

$$5) \frac{\partial}{\partial t} = j\omega. \quad \frac{\partial}{\partial x} = -jk$$

$$\text{donc } -\frac{\omega^2}{c^2} - (-k^2) = \frac{1}{a} (-jk)$$

$$\text{ou encore } \underline{k^2} + j\frac{k}{a} = \frac{\omega^2}{c^2}$$

6) Déterminons $\underline{k}$.

$$\underline{k^2} + j\frac{k}{a} - \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

$$\Delta = \left(j\frac{1}{a}\right)^2 + 4\frac{\omega^2}{c^2} = 4\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{1}{a^2}$$

$$\text{Si } \omega \geq \frac{c}{2a} \quad \Delta \geq 0 \quad \text{donc } \underline{k}_\pm = -j\frac{1}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$$

c'est-à-dire $k' = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$ (ici $+\sqrt{\Delta}$ pour une onde progressive vers les x croissants)

$$\text{et } k'' = \frac{1}{2a}$$

On a bien une onde qui se propage avec amortissement.

$$\text{Si } \omega < \frac{c}{2a} \quad \Delta < 0 \quad \text{donc } \underline{k}_\pm = -j\frac{1}{2a} \pm j\sqrt{|\Delta|}$$

c'est-à-dire $k' = 0$ l'onde ne se propage pas.

Par conséquent, la pulsation de coupure est $\omega_c = \frac{c}{2a}$; si $\omega > \omega_c$

il y a une onde qui se propage, si $\omega < \omega_c$, non.

6

C'est bien un passe-haut. $\omega_c = \frac{c}{2a}$

$$7) f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{c}{4\pi a}$$

$$\text{or } S(L) = S(0) e^{-L/a} \quad \text{donc } \frac{L}{a} = \ln \frac{S(L)}{S(0)}$$

$$\text{d'où } f_c = \frac{c \ln \frac{S(L)}{S(0)}}{4\pi L}$$

$$8) \text{ On a déjà trouvé } k'' = \frac{1}{2a} \quad \text{et } k' = \frac{1}{2} \sqrt{4 \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{2\omega_c}{c}\right)^2}$$

$$\text{soit } k' = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2} = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}$$

9) La formule du IC3) n'est plus valable car elle utilisait la relation de dispersion $\omega = kc$ qui n'est plus valable.

$$\text{Reprenons } \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\text{donc } -j k p = -j \omega \rho_0 v$$

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} (p^* v S) = \frac{1}{2} \text{Re} \left(p^* p \frac{k S}{\rho_0 \omega} \right) = \frac{1}{2} |p|^2 \frac{\text{Re}(k)}{\rho_0 \omega} e^{x/a} S(0)$$

$$\text{d'où } \langle P(x) \rangle = \frac{1}{2} (P(0) e^{-k'' x})^2 \frac{k'}{\rho_0 \omega} S(0) e^{x/a}$$

$$\langle P(x) \rangle = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{2 \rho_0 \omega c} P(0)^2 e^{-\frac{2x}{2a}} S(0) e^{x/a}$$

$$\text{d'où } \langle P(x) \rangle = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}}{2 \rho_0 c} P(0)^2 S(0)$$

c'est indépendant de x
car il n'y a pas d'onde réfléchie

10] si $\omega > 10 \omega_c$, alors $\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2} \approx 1$

$$\text{d'où } \langle S(z) \rangle = \frac{P(0)^2 S(0)}{2\rho_0 c} = \langle S_{\text{transférée}} \rangle$$

$$\text{Or } \langle P_{\text{incidente}} \rangle = \frac{P(0)^2 S(0)}{2\rho_0 c} \quad (\text{formule du IC3})$$

$$\text{Ainsi } \boxed{T_{\text{par}} = 1}$$

C'est de la très bonne adaptation d'impédance. (pour $f > 1,5 \text{ kHz}$)

$$\boxed{\frac{I_{\text{transférée}}}{I_{\text{incidente}}} = 1}$$

11] Au II AS, on a trouvé $T = \frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2}$

$$\text{d'où } \boxed{\frac{T_{\text{par}}}{T} = \frac{(1+\alpha)^2}{4\alpha}}$$

$$\text{A.N. } (1+\alpha)^2 = 10^2 = 100$$

$$\frac{(1+\alpha)^2}{4\alpha} = \frac{100}{4 \times 9} = \frac{100}{36} \approx 3$$

$$\boxed{\frac{T_{\text{par}}}{T} = \frac{100}{36} \approx 3}$$

La puissance transmise est triplée en présence du pavillon exponentiel.

$$\begin{aligned} \left(\frac{T_{\text{par}}}{T}\right)_{\text{dB}} &= 10 \log\left(\frac{100}{36}\right) = 10 \log 100 - 10 \log 36 \\ &= 10(2 - 1,56) \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \boxed{\left(\frac{T_{\text{par}}}{T}\right)_{\text{dB}} = 4,4 \text{ dB}}$$

Troisième partie: Modèle simplifié d'un silencieux d'échappement

1) Pour une OPPM vers la droite $\underline{v} = \frac{A}{Z}$ et vers la gauche

$\underline{v} = -\frac{A}{Z}$. en outre $Z = \rho_0 c$ est la même dans les trois parties.

$$\text{d'où } \underline{v}(x < 0, t) = \frac{P_m e^{j(\omega t - kx)} - P_m e^{j(\omega t + kx)}}{2}$$

(7)

$$\underline{v}(0 < x < L, t) = \frac{1}{2} (P_m^0 e^{j(\omega t - kx)} - P_m^L e^{j(\omega t + kx)})$$

$$\underline{v}(x > L, t) = \frac{1}{2} P_{tm} e^{j(\omega t - kx)}$$

P_{tm} : c'est la même
k car $k = \frac{\omega}{c}$ et c
ne dépend que du
fluide, pas de la
section.

2) On utilise $\underline{p}(0^-, t) = \underline{p}(0^+, t)$

$$\underline{p}(L^-, t) = \underline{p}(L^+, t)$$

(cf I A3) $\left. \begin{array}{l} S_1 \underline{v}(0^-, t) = S_2 \underline{v}(0^+, t) \\ S_2 \underline{v}(L^-, t) = S_1 \underline{v}(L^+, t) \end{array} \right\} \text{par conservation du}$
débit massique

$$\text{d'où } \left\{ \begin{array}{l} P_m + P_m = P_m^0 + P_m^L \end{array} \right. \quad (1)$$

$$P_m^0 e^{-jkl} + P_m^L e^{+jkl} = P_{tm} e^{-jkl} \quad (2)$$

$$S_1 (P_m - P_m) = S_2 (P_m^0 - P_m^L) \quad (3)$$

$$S_2 (P_m^0 e^{-jkl} - P_m^L e^{+jkl}) = S_1 P_{tm} e^{-jkl} \quad (4)$$

3) On veut P_m en fonction de P_m (il faut "supprimer" les autres termes)

$$S_2(2) + (4) \text{ donne } 2S_2 P_m^0 = (S_1 + S_2) P_{tm}$$

$$S_2(2) - (4) \text{ donne } 2S_2 P_m^L e^{+jkl} = (S_2 - S_1) P_{tm} e^{-jkl}$$

On remplace P_m^0 et P_m^L dans (1) et (3)

$$P_m + P_m = \frac{S_1 + S_2}{2S_2} P_{tm} + \frac{S_2 - S_1}{2S_2} P_{tm} e^{-2jkl} \quad (5)$$

$$S_1 (P_m - P_m) = S_2 \left(\frac{S_1 + S_2}{2S_2} P_{tm} - \frac{S_2 - S_1}{2S_2} P_{tm} e^{-jkl} \right) \quad (6)$$

Reste à éliminer P_m par $S_1(5) + (6)$

$$2S_1 P_m = (S_2 + S_1) \frac{S_1 + S_2}{2S_2} P_{tm} + \frac{S_2 - S_1}{2S_2} (S_1 - S_2) P_{tm} e^{-jkl}$$

$$\text{Ainsi } P_{tm} \left(\frac{(S_1 + S_2)^2}{2S_2} - \frac{(S_2 - S_1)^2}{2S_2} e^{-2jkL} \right) = P_{im} 2S_1$$

$$\text{d'où } \boxed{\frac{P_{tm}}{P_{im}} = \Gamma_p = \frac{4S_1 S_2}{(S_1 + S_2)^2 - (S_2 - S_1)^2 e^{-2jkL}}}$$

$$\begin{aligned} 4) \Gamma &= \frac{(4S_1 S_2)^2}{\left((S_1 + S_2)^2 - (S_2 - S_1)^2 e^{-2jkL} \right) \left((S_1 + S_2)^2 - (S_2 - S_1)^2 e^{+2jkL} \right)} \\ &= \frac{(4S_1 S_2)^2}{(S_1 + S_2)^4 - (S_1^2 S_2^2) (S_2 - S_1)^2 (e^{-2jkL} + e^{2jkL}) + (S_2 - S_1)^4} \\ &= \frac{(4S_1 S_2)^2}{(S_1 + S_2)^4 + (S_2 - S_1)^4 - (S_2^2 - S_1^2)^2 2 \cos 2kL} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{or } ((S_1 + S_2)^2)^2 &= (S_1^2 + 2S_1 S_2 + S_2^2)^2 = S_1^4 + 4S_1^3 S_2 + 6S_1^2 S_2^2 + 4S_1 S_2^3 + S_2^4 \\ (S_2 - S_1)^4 &= S_1^4 - 4S_1^3 S_2 + 6S_1^2 S_2^2 - 4S_1 S_2^3 + S_2^4 \end{aligned}$$

$$(S_1 + S_2)^4 + (S_2 - S_1)^4 = 2(S_1^4 + S_2^4 + 6S_1^2 S_2^2)$$

$$(S_2^2 - S_1^2)^2 = S_2^4 - 2S_1^2 S_2^2 + S_1^4$$

En outre, on a 1 terme en $\cos 2kL$ et on veut un terme en $\sin^2(?)$

$$\text{On utilise donc } \cos 2kL = 1 - 2 \sin^2(kL)$$

On reporte tout cela: Le dénominateur de Γ est

$$\begin{aligned} &2(S_1^4 + S_2^4 + 6S_1^2 S_2^2) - 2(S_2^4 - 2S_1^2 S_2^2 + S_1^4) + 4(S_2^4 - 2S_1^2 S_2^2 + S_1^4) \sin^2 kL \\ &= 16S_1^2 S_2^2 + 4(S_2^2 - S_1^2)^2 \sin^2 kL \end{aligned}$$

donc $\mathcal{C} = \frac{16 S_1^2 S_2^2}{16 S_1^2 S_2^2 + 4 (S_2^2 - S_1^2)^2 \sin^2 kL} \times \frac{1}{16 S_1^2 S_2^2} \times \frac{1}{16 S_1^2 S_2^2}$

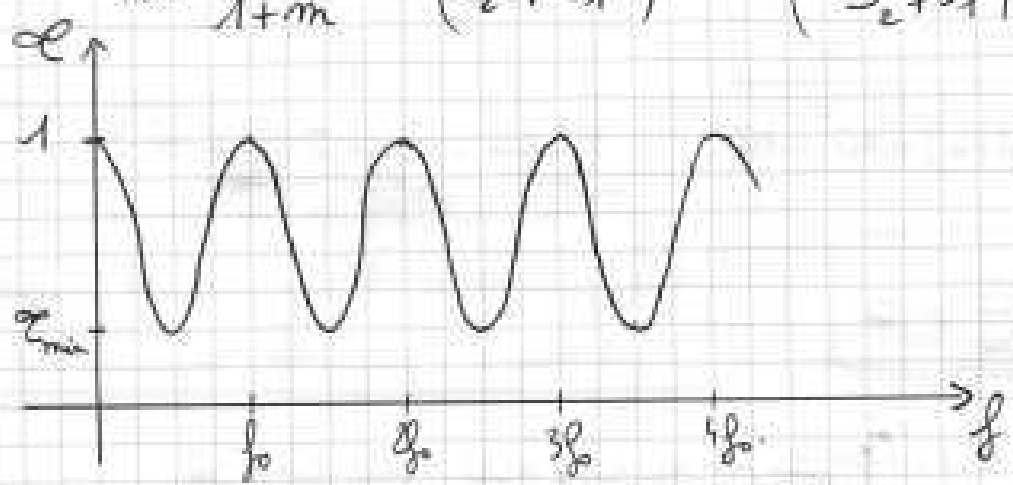
(8)

$$\mathcal{C} = \frac{1}{1 + m \sin^2 kL} \quad \text{avec} \quad m = \frac{(S_2^2 - S_1^2)^2}{4 S_1^2 S_2^2}$$

Reste à trouver f_0 : $\sin^2 kL = \sin^2 \frac{\omega L}{c} = \sin^2 \frac{2\pi f L}{c}$
 $= \sin^2 \frac{\pi f}{f_0} \quad \text{si} \quad \boxed{f_0 = \frac{c}{2L}}$

5) Si $\sin^2 \frac{\pi f}{f_0} = 0$ ($\frac{\pi f}{f_0} = p\pi, p \in \mathbb{N}^*$)
 alors $\mathcal{C}_{\max} = 1$

Si $\sin^2 \frac{\pi f}{f_0} = 1$ ($\frac{\pi f}{f_0} = \frac{\pi}{2} + p\pi, p \in \mathbb{N}$)
 alors $\mathcal{C}_{\min} = \frac{1}{1+m} = \frac{4 S_1^2 S_2^2}{(S_2^2 + S_1^2)^2} = \left(\frac{2 S_1 S_2}{S_2^2 + S_1^2} \right)^2 < 1$



$$\boxed{\mathcal{C}_{\max} = 1} \quad \boxed{\mathcal{C}_{\min} = \left(\frac{2 S_1 S_2}{S_2^2 + S_1^2} \right)^2}$$

Si $S_2 \gg S_1$ $\mathcal{C}_{\min} \rightarrow 0$

Si $S_2 \gg S_1$ $\mathcal{C} = \frac{1}{1 + \left(\frac{S_2}{2S_1} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{\pi f}{f_0} \right)}$

$\mathcal{C} = \frac{\mathcal{C}_{\max}}{2} = \frac{1}{2}$ pour $\left(\frac{S_2}{2S_1} \right)^2 \sin^2 \frac{\pi f}{f_0} = 1$, soit $\frac{\pi f}{f_0} = \frac{2S_1}{S_2}$
 (pour DL car $\frac{\pi f}{f_0} \ll 1$ donc $\sin x \approx x$)

(3)

$$\mathcal{C} = \frac{\mathcal{C}_{\max}}{2} \text{ pour } f = \frac{2S_1}{\pi S_2} f_0$$

La $\frac{1}{2}$ largeur passante est donc $\frac{2S_1 f_0}{\pi S_2}$, le facteur de qualité vaut $\frac{f_0 \pi S_2}{4 S_1 f_0}$

$$\boxed{Q = \frac{\pi S_2}{4 S_1}} \gg 1$$

6) $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\min}$ pour $f = \frac{f_0}{2} = \frac{c}{2L}$ donc $\boxed{L_m = \frac{c}{f}}$ pour la plus petite valeur

A.N. $L_m = \frac{460}{200} \approx 2,3 \text{ m}$ (Ça fait beaucoup!)

7) $I_{\text{moteur}} \text{ dB} = 80 \text{ dB}$
 $I_{\text{demandé}} \text{ dB} = 60 \text{ dB}$ donc $\frac{P_{\text{demandé}}}{P_{\text{moteur}}} = 10^{-2}$

C'est-à-dire $\mathcal{C} = 10^{-2}$ pour $L = L_m$ soit $\mathcal{C}_{\min} = 10^{-2}$

soit $\frac{2 S_1 S_2}{S_1^2 + S_2^2} = 0,1$

$$S_1^2 - 20 S_1 S_2 + S_2^2 = 0$$

$$\Delta = (400 - 4) S_1^2 \quad (\text{équation en } S_2)$$

$$S_2 = \frac{20 S_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$S_2 \approx 20 S_1 \quad \text{ou} \quad S_2 = 10 S_1 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{100}}\right) \approx 0,05 S_1$$

On prend $S_2 \approx 20 S_1$ ($S_2 > S_1$)

soit $d_2^2 \approx 20 d_1^2$ donc $d_2 \approx 4,5 d_1$

$\boxed{d_2 = 18 \text{ cm}}$, c'est à peu près la taille d'un silencieux réel.