

Si vous détectez des erreurs, ou pour toute remarque ou commentaire, merci de m'écrire à sylvain.soufflet@neuf.fr

Imagerie par résonance magnétique

I – Production de champs magnétiques intenses et homogènes

I.1. Tout plan contenant l'axe Oz est un plan d'antisymétrie de la distribution de courant, donc si M et M' sont symétriques par rapport à un tel plan, $\vec{j}_{(M)} = -\vec{j}_{(M')}$, soit $j_r = j_z = 0$: le courant est orthoradial : $\vec{j} = j\vec{e}_\theta$.

Il y a invariance de la distribution de courant par rotation autour de Oz : $\vec{j} = \vec{j}(r, z)$.

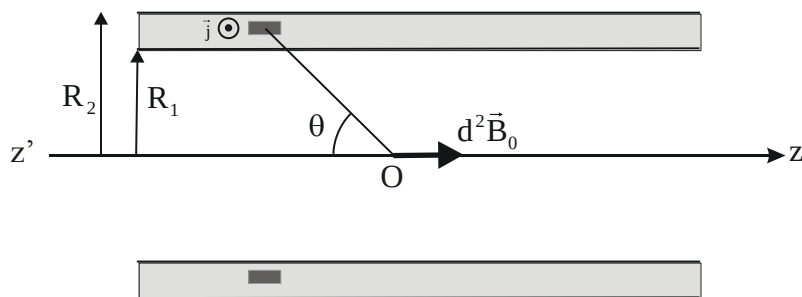
Ainsi, $\vec{j} = j(r, z)\vec{e}_\theta$. La densité volumique de courant est orthoradiale.

I.2. Le champ magnétique est contenu dans tout plan d'antisymétrie d'une distribution de courant, soit $B_\theta = 0$: $\vec{B} = B_r(r, z)\vec{e}_r + B_z(r, z)\vec{e}_z$.

I.3. Le champ magnétique est uniforme à l'intérieur d'un solénoïde infini, et nul à l'extérieur.

Le champ magnétique créé au centre O par une spire de largeur dz, d'épaisseur dr, parcourue par l'élément de courant $d^2I = jdrdz$ et vue de O sous un angle θ est :

$$d^2\vec{B}_{(O)} = \frac{\mu_0 j dr dz}{2r} \sin^3 \theta \vec{e}_z.$$



Puisque $\tan \theta = -\frac{z}{r}$, $dz = r \frac{d\theta}{\sin^2 \theta}$, soit $d^2\vec{B}_{(O)} = \frac{\mu_0 j}{2} dr \sin \theta d\theta \vec{e}_z$.

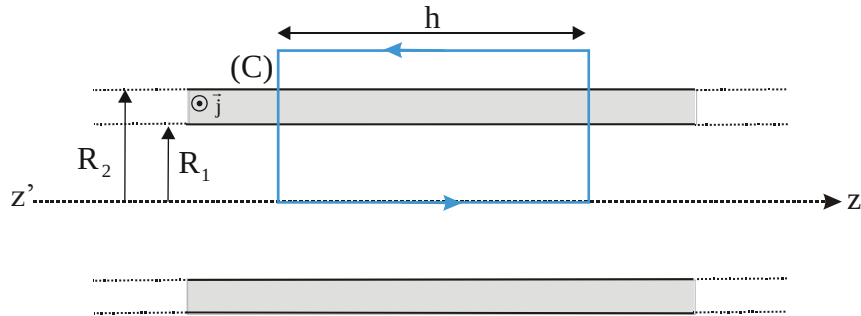
Si comme l'indique l'énoncé on se place dans le cas d'un solénoïde illimité, on a :

$$d\vec{B}_{(O)} = \frac{\mu_0 j}{2} dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \vec{e}_z = \mu_0 j dr \vec{e}_z$$

Le champ magnétique résultant en O est donc $\vec{B}_{(O)} = \mu_0 j (R_2 - R_1) \vec{e}_z$.

Autre méthode : utilisation du théorème d'Ampère.

Puisque l'on se place dans le modèle du solénoïde infini, le champ est uniforme à l'intérieur du solénoïde ($\vec{B}_{\text{int}} = \vec{B}$) et nul à l'extérieur ($\vec{B}_{\text{ext}} = \vec{0}$). Comme contour fermé, nous choisissons un rectangle de longueur arbitraire h dont un côté passe par le centre du solénoïde et un côté à l'extérieur.



Théorème d'Ampère : $\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = (B_0 - B_{\text{ext}})h = B_0 h = \mu_0 j h (R_2 - R_1)$,

soit $\vec{B}_{(0)} = \mu_0 j (R_2 - R_1) \vec{e}_z$.

I.4. La puissance dissipée par effet Joule est $P_J = \iiint_{(V)} \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau$.

Compte tenu de la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, $P_J = \iiint_{(V)} \frac{j^2}{\sigma} d\tau = \frac{j^2}{\sigma} \pi (R_2^2 - R_1^2) L$

$$P_J = \frac{\pi j^2}{\sigma} (R_2^2 - R_1^2) L$$

I.5. Puisque $j(R_2 - R_1) = \frac{B_0}{\mu_0}$, il vient donc $P_J = \frac{\pi L}{\sigma} \left(\frac{B_0}{\mu_0} \right)^2 \frac{R_1 + R_2}{R_2 - R_1}$.

La fonction $f(R_1) = \frac{R_1 + R_2}{R_2 - R_1}$ étant une fonction strictement croissante, la puissance P_J sera d'autant plus faible que R_1 sera faible. **Il conviendra donc de choisir le rayon intérieur R_1 du solénoïde le plus faible possible.**

I.6. D'après ce qui précède, P_J est minimale pour $R_1 = 0$, soit $(P_J)_{\min} = \frac{\pi L}{\sigma} \left(\frac{B_0}{\mu_0} \right)^2 = 5.10^4 \text{ W}$

La puissance d'un radiateur électrique ordinaire est $P_{\text{el}} \approx 10^3 \text{ W}$.

Conclusion : la puissance dissipée par effet Joule est importante.

I.7. L'énergie libérée par effet Joule au sein du matériau va avoir pour effet de chauffer celui-ci. Plus le volume du solénoïde sera important, plus faible sera l'élévation de température de

celui-ci. D'autre part, la puissance thermique évacuée à l'extérieur est proportionnelle à la surface de contact, soit $2\pi R_2 L$. **Il convient donc de choisir R_2 le plus grand possible.**

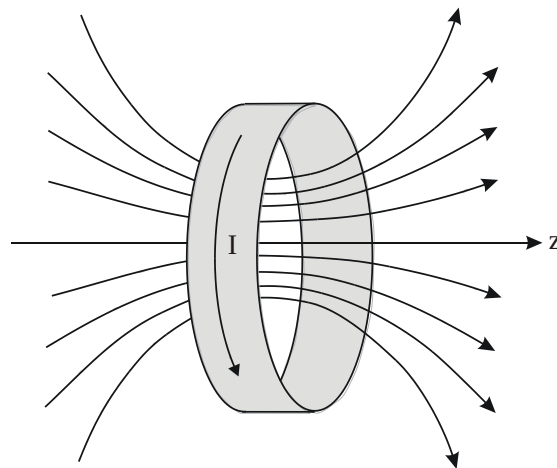
Conclusion : les solénoïdes qui seraient utilisés par les métaux ordinaires risquent pour créer un champ magnétique important seraient donc très encombrant et consommeraient beaucoup de puissance électrique ... ce n'est pas la méthode idéale.

I.8. La propriété de symétrie de la première question ne peut plus être exacte à cause de l'hélicité non nulle de l'enroulement : $\vec{j}$ a une composante axiale $\vec{j}_z$.

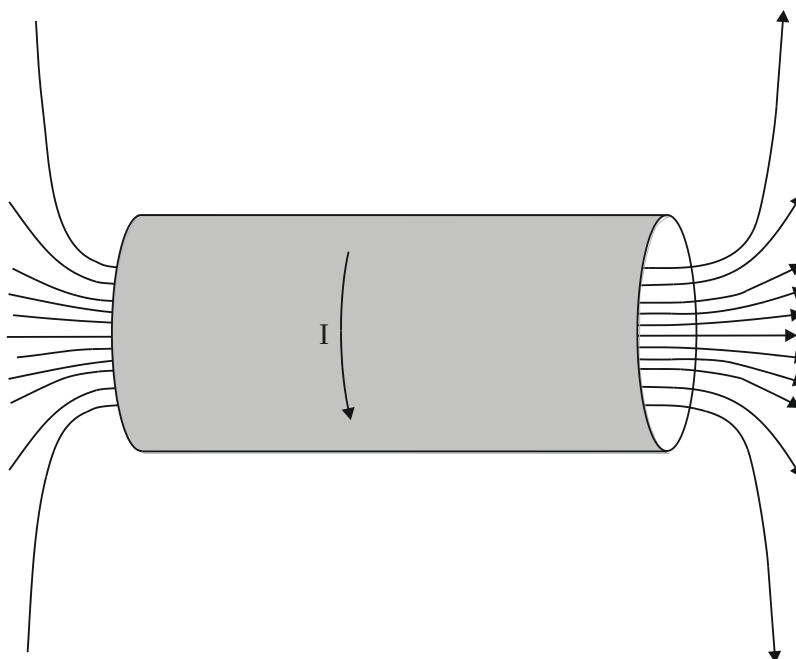
Pour pouvoir négliger au mieux l'hélicité, il faut serrer les fils les uns contre les autres avec des fils de faible diamètre devant R_1 .

I.9.

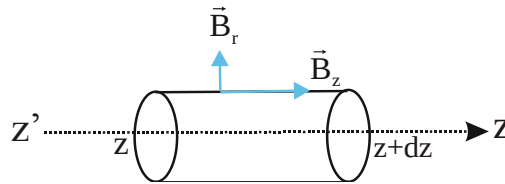
- Cas d'une bobine avec $R_2 \simeq L$



- Pour que le champ sur l'axe soit uniforme au voisinage du centre, il faut se placer dans le cas d'un solénoïde, c'est-à-dire avoir $L \gg R_2$



I.10. De façon générale, le champ magnétique a une composante axiale et une composante radiale. La conservation du flux du champ magnétique à travers une surface fermée permet d'évaluer la composante radiale à une distance r de l'axe de symétrie, connaissant la composante axiale sur cet axe.



Pour cela, on considère un petit cylindre centré sur l'axe de symétrie, de rayon r et de longueur dz . Le flux du champ magnétique à travers la surface totale de ce cylindre est :

$$d\Phi = \pi r^2 [B_z(z+dz) - B_z(z)] + 2\pi r dz B_r = 0, \text{ soit } B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{dB_z}{dz}.$$

Si le champ est uniforme sur l'axe, alors $\frac{dB_z}{dz} = 0$ et $B_r = 0$, ce qui implique qu'il est également uniforme au voisinage de l'axe.

II – Utilisation de supraconducteurs

II.1. Equation du mouvement : $m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -e\vec{E}$

II.2. Le vecteur densité volumique de courant a pour expression $\vec{j} = \rho \vec{v} = -ne\vec{v}$ où ρ est la densité volumique de charge. Ainsi, $\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = -ne \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{ne^2}{m} \vec{E}$

II.3. Equation de Maxwell-Faraday : $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Equation de Maxwell-Ampère : $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$

Dans l'ARQS, le courant de déplacement $\vec{j}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est négligeable devant le courant de conduction $\vec{j}$ et on peut donc écrire $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$.

Ainsi $\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\text{rot}} (\vec{\text{rot}} \vec{B})) = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\text{rot}} \vec{j}) = \mu_0 \vec{\text{rot}} \left(\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \right) = \mu_0 \vec{\text{rot}} \left(\frac{ne^2}{m} \vec{E} \right) = \frac{\mu_0 ne^2}{m} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\vec{\text{rot}} (\vec{\text{rot}} \vec{B}) + \frac{\mu_0 ne^2}{m} \vec{B} \right] = \vec{0}.$$

Par identification avec l'écriture donnée dans l'énoncé, $\lambda = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 ne^2}}.$

II.4. A.N. $\lambda = 53,2 \text{ nm}$

II.5. Postulat : $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B}) + \frac{1}{\lambda^2} \vec{B} = \vec{0}$.

Puisque $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{B}) - \Delta\vec{B} = -\Delta\vec{B}$, l'équation devient $\Delta\vec{B} - \frac{1}{\lambda^2} \vec{B} = \vec{0}$.

A l'extérieur du demi espace $x > 0$ est appliqué un champ magnétique orienté selon $\vec{e}_z$: $\vec{B}_{\text{ext}} = B_0 \vec{e}_z$. La continuité du champ magnétique à la traversée du plan $x = 0$ fait que le champ magnétique à l'intérieur du supraconducteur ne peut qu'être également selon $\vec{e}_z$.

D'autre part, les invariances par translation selon Oy et Oz font que le champ magnétique à l'intérieur du supraconducteur ne peut dépendre que de x : $\vec{B} = B(x) \vec{e}_z$.

Ainsi, $\Delta\vec{B} = \Delta B \vec{e}_z = \frac{d^2 B}{dx^2} \vec{e}_z$ et B satisfait à l'équation différentielle $\frac{d^2 B}{dx^2} - \frac{1}{\lambda^2} B = 0$.

Solution générale : $B(x) = A_1 e^{-x/\lambda} + A_2 e^{x/\lambda}$.

Le champ magnétique ne pouvant diverger, on a nécessairement $A_2 = 0$.

La continuité du champ magnétique en $x = 0$ donne $B(0) = B_0 = A_1$.

Le champ magnétique à l'intérieur du supraconducteur est donc $\vec{B}(x) = B_0 e^{-x/\lambda} \vec{e}_z$.

Il y a une décroissance exponentielle du champ magnétique à l'intérieur du supraconducteur : en dehors d'une faible épaisseur de quelques λ à partir de la surface, on peut considérer que le champ magnétique est nul à l'intérieur du supraconducteur, ce qui explique l'effet Meissner.

II.6. La densité volumique de courant se déduit de la relation $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$.

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} \partial / \partial x & \partial / \partial y & \partial / \partial z \\ 0 & 0 & B(x) \end{vmatrix} = \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} 0 & -dB/dx & 0 \end{vmatrix} : \vec{j} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dx} \vec{e}_y = \frac{B_0}{\mu_0 \lambda} e^{-x/\lambda} \vec{e}_y$$

III – Moments magnétiques et aimantation

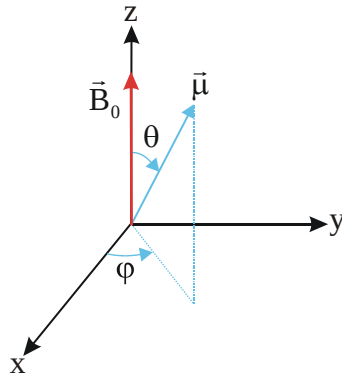
III.1. Energie potentielle d'interaction : $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}_0$

Ainsi, $U_{\text{max}} = \mu B_0$ et $U_{\text{min}} = -\mu B_0$. A.N. $\mu B_0 = 2,1 \cdot 10^{-26} \text{ J} = 1,31 \cdot 10^{-7} \text{ eV}$

III.2. A l'équilibre thermodynamique : $dp = \frac{1}{Z} e^{-U/k_B T} d^2 \Omega$ = probabilité élémentaire pour qu'un moment magnétique ait l'énergie potentielle U.

- Il s'agit de la loi de distribution de Boltzmann (statistique de Boltzmann)
- Elle a été rencontrée en cours dans le cadre de l'évolution de la pression (ou de la densité particulaire) pour une atmosphère isotherme.
- La direction de $\vec{\mu}$ la plus probable est celle où $U = U_{\min} = -\mu B_0$: **le moment magnétique est orienté dans le même sens que le champ magnétique.**

III.3.



En coordonnées sphériques,

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}_0 = -\mu B_0 \cos \theta$$

$$\text{et } d^2\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi.$$

III.4. L'hypothèse $|U| \ll k_B T$ s'écrit encore $T \gg \frac{\mu B_0}{k_B} = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ K}$

Il s'agit donc d'une excellente approximation à température ambiante.

III.5. Le vecteur aimantation $\vec{M}$ correspond au moment magnétique **par unité de volume** du matériau considéré. En considérant que l'on a N protons par unité de volume, avec $N \gg 1$, on peut définir une moyenne et $\langle \vec{\mu} \rangle = \frac{1}{N} \sum_i N_i \vec{\mu}_i$, $N = \sum_i N_i$ où N_i est le nombre de protons par unité de volume ayant le moment magnétique $\vec{\mu}_i$.

Par définition de $\vec{M}$, $\vec{M} = \sum_i N_i \vec{\mu}_i$ Ainsi, $\vec{M} = N \langle \vec{\mu} \rangle$.

III.6. Puisque $U / k_B T \ll 1$, $dp \approx \frac{1}{Z} \left(1 - \frac{U}{k_B T} \right) d^2\Omega$.

On a $\langle \vec{\mu} \rangle = \langle \mu_x \rangle \vec{e}_x + \langle \mu_y \rangle \vec{e}_y + \langle \mu_z \rangle \vec{e}_z$ avec
$$\begin{cases} \mu_x = \mu \sin \theta \cos \varphi \\ \mu_y = \mu \sin \theta \sin \varphi \\ \mu_z = \mu \cos \theta \end{cases}$$

$$\bullet \langle \mu_x \rangle = \iint \mu dp / \iint dp = \iint \mu \sin \theta \cos \varphi \left(1 + \frac{\mu B_0 \cos \theta}{k_B T} \right) \sin \theta d\theta d\varphi / \iint \left(1 + \frac{\mu B_0 \cos \theta}{k_B T} \right) \sin \theta d\theta d\varphi$$

On a $\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{\mu B_0}{k_B T} \cos \theta\right) \sin \theta d\theta d\varphi = 4\pi$ et

et $\iint \mu \left(1 + \frac{\mu B_0}{k_B T} \cos \theta\right) \sin^2 \theta d\theta \cos \varphi d\varphi = \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi}_0 \int_0^\pi \mu \left(1 + \frac{\mu B_0}{k_B T} \cos \theta\right) \sin^2 \theta d\theta$, soit $\langle \mu_x \rangle = 0$.

• De la même façon, on aura $\langle \mu_y \rangle = 0$ en raison de l'intégration de $\sin \varphi$ entre 0 et 2π .

$$\bullet \langle \mu_z \rangle = \frac{1}{4\pi} \iint \mu \left(1 + \frac{\mu B_0}{k_B T} \cos \theta\right) \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^\pi \mu \left(1 + \frac{\mu B_0}{k_B T} \cos \theta\right) \cos \theta \sin \theta d\theta$$

$$\langle \mu_z \rangle = \frac{\mu}{2} \left[\int_0^\pi \cos \theta \sin \theta d\theta + \frac{\mu B_0}{k_B T} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \right] = \frac{\mu}{2} \left[\frac{1}{2} [\sin^2 \theta]_0^\pi - \frac{\mu B_0}{3k_B T} [\cos^3 \theta]_0^\pi \right]$$

$$\langle \mu_z \rangle = \frac{\mu^2 B_0}{3k_B T}$$

Ainsi, $\langle \vec{\mu} \rangle = \frac{\mu^2 B_0}{3k_B T} \vec{e}_z = \frac{\mu^2}{3k_B T} \vec{B}_0$

On en déduit $\vec{M} = N \langle \vec{\mu} \rangle = \frac{N \mu^2}{3k_B T} \vec{B}_0 = \frac{C}{T} \vec{B}_0$, soit la constante de Curie $C = \frac{N \mu^2}{3k_B}$.

III.7. Le couple s'exerçant sur un moment magnétique $\vec{\mu}$ soumis à un champ $\vec{B}_0$ est $\vec{\Gamma} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}_0$.

III.8. D'après le théorème du moment cinétique, $\frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{\Gamma} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}_0$, soit, compte tenu de ce

que $\vec{\mu} = \gamma \vec{S}$ (γ est appelé rapport gyromagnétique) : $\frac{d\vec{\mu}}{dt} = \gamma \vec{\mu} \wedge \vec{B}_0 = -\gamma \vec{B}_0 \wedge \vec{\mu}$.

Le moment magnétique $\vec{\mu}$ est animé d'un mouvement de précession à la vitesse angulaire

$$\vec{\omega}_0 = -\gamma \vec{B}_0. \text{ A.N. } \omega_0 = \gamma B_0 = \frac{2\mu}{\hbar} B_0 = 3,82 \cdot 10^8 \text{ rad.s}^{-1}$$

III.9. Relation fondamentale de la dynamique appliquée au proton : $m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \wedge \vec{B}_0 = e\vec{v} \wedge \vec{B}_0$

$$\text{soit } \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{e\vec{B}_0}{m} \wedge \vec{v} = \vec{\omega}_c \wedge \vec{v}.$$

Le vecteur rotation associé à la pulsation de Larmor est $\vec{\omega}_c = -\frac{e\vec{B}_0}{m}$.

A.N. $\omega_c = \frac{eB_0}{m} = 1,4 \cdot 10^8 \text{ rad.s}^{-1}$: ω_c est du même ordre de grandeur que ω_0 .

IV – Résonance magnétique

IV.1. D'après le théorème du moment cinétique, $\frac{d\vec{\mu}}{dt} = -\gamma \vec{B} \wedge \vec{\mu}$, soit également

$$\frac{d\langle \vec{\mu} \rangle}{dt} = -\gamma \vec{B} \wedge \langle \vec{\mu} \rangle.$$

Puisque $\vec{M} = N\langle \vec{\mu} \rangle$, il vient $\frac{d\vec{M}}{dt} = -\gamma \vec{B} \wedge \vec{M} = -\gamma (\vec{B}_0 + \vec{B}_1) \wedge \vec{M} = (\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_1) \wedge \vec{M}$ avec

$$\vec{\omega}_1 = -\gamma \vec{B}_1$$

IV.2. On a $\left(\frac{d\vec{M}}{dt} \right)_R = \left(\frac{d\vec{M}}{dt} \right)_{R'} + \vec{\omega}_{R'/R} \wedge \vec{M}$, soit puisque $\vec{\omega}_{R'/R} = \vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$:

$$\left(\frac{d\vec{M}}{dt} \right)_{R'} = (\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_1) \wedge \vec{M} - \vec{\omega} \wedge \vec{M} : \left(\frac{d\vec{M}}{dt} \right)_{R'} = (\vec{\omega}_0 - \vec{\omega} + \vec{\omega}_1) \wedge \vec{M}$$

IV.3. L'équation précédente montre que le vecteur aimantation précesse autour de la direction définie par le vecteur rotation $\vec{\Omega} = \vec{\omega}_0 - \vec{\omega} + \vec{\omega}_1$ à la vitesse angulaire $\Omega = \sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \omega_1^2}$.

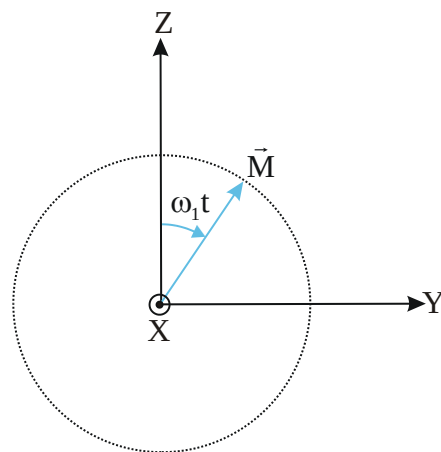
Le vecteur aimantation est, avant apparition du champ $\vec{B}_1$, orienté selon $\vec{B}_0$. C'est l'effet du couple $\vec{\Gamma} = \vec{M}_0 \wedge \vec{B}_1$ de donner à l'aimantation une composante perpendiculaire à $\vec{B}_0$.

Puisque $\|\vec{B}_1\| \ll \|\vec{B}_0\|$, on a $\omega_1 \ll \omega_0$. Tant que $|\omega_0 - \omega| \gg \omega_1$, l'angle que fait le champ magnétique effectif $\vec{B}_{\text{eff}} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1$ avec l'axe Oz est faible, et l'essentiel de la précession se fait autour de cet axe, donnant à la composante de l'aimantation perpendiculaire à l'axe Oz $\vec{M}_\perp$ une valeur faible par rapport à $\vec{M}_0$.

IV.4. On se place à la résonance : $\omega = \omega_0$.

• **Evolution de l'aimantation dans (R') :** $\left(\frac{d\vec{M}}{dt} \right)_{R'} = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{M}$

Il y a donc précession du vecteur aimantation autour de l'axe OX. L'extrémité du vecteur $\vec{M}_\perp$ va donc décrire un mouvement circulaire à la vitesse angulaire ω_1 dans le plan OYZ.



La projection de l'équation du mouvement dans la base du référentiel tournant donne

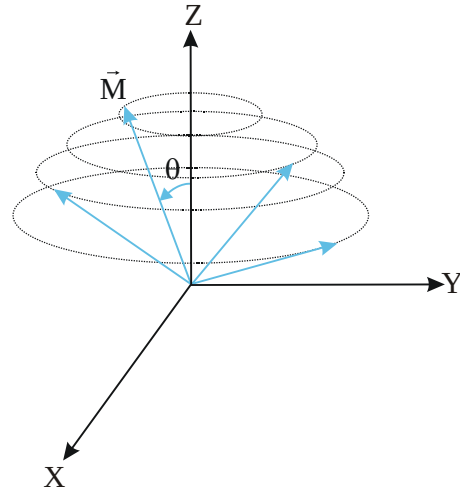
$$\begin{cases} dM_x / dt = 0 \rightarrow M_x = \text{cte} \\ dM_y / dt = -\omega_1 M_z \\ dM_z / dt = \omega_1 M_y \end{cases}$$

En posant $\underline{M} = M_y + iM_z$, on a $\frac{d\underline{M}}{dt} = i\omega_1 \underline{M}$, soit $\underline{M} = \underline{M}(0)e^{i\omega_1 t} = (M_y(0) + iM_z(0))e^{i\omega_1 t}$.

On a donc
$$\begin{cases} M_x(t) = M_x(0) \\ M_y(t) = M_y(0)\cos\omega_1 t - M_z(0)\sin\omega_1 t \\ M_z(t) = M_y(0)\sin\omega_1 t + M_z(0)\cos\omega_1 t \end{cases}$$

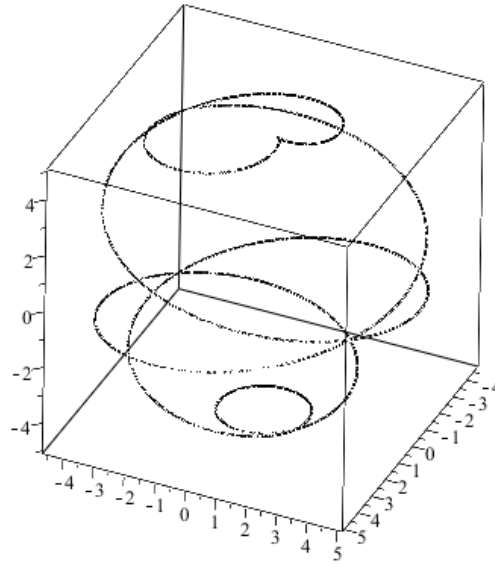
• **Evolution de l'aimantation dans (R) :** le mouvement de rotation du moment magnétique dans le plan (OYZ) à la vitesse angulaire ω_1 est combiné avec le mouvement de rotation à la vitesse angulaire ω_0 autour de l'axe Oz.

Le moment magnétique décrit donc un mouvement de précession autour de l'axe Oz à la vitesse angulaire ω_0 , mais avec un angle θ entre $\vec{M}$ et Oz qui évolue avec la vitesse angulaire ω_1 .



Puisque $M_x(t) = M_x(0)\cos\omega_0 t - M_y(0)\sin\omega_0 t$ et $M_y(t) = M_y(0)\cos\omega_0 t + M_x(0)\sin\omega_0 t$, les composantes du vecteur aimantation dans (R) évoluent selon les relations :

$$\begin{cases} M_x(t) = M_x(0)\cos\omega_0 t - M_y(0)\cos\omega_1 t \sin\omega_0 t + M_z(0)\sin\omega_1 t \sin\omega_0 t \\ M_y(t) = M_y(0)\cos\omega_1 t \cos\omega_0 t - M_z(0)\sin\omega_1 t \cos\omega_0 t + M_x(0)\sin\omega_0 t \\ M_z(t) = M_y(0)\sin\omega_1 t + M_z(0)\cos\omega_1 t \end{cases}$$



- Exemple de trajectoire suivie par l'extrémité du vecteur $\vec{M}$ -

IV.5. Le champ $\vec{B}_1$ est un champ tournant à la vitesse angulaire $\omega = \omega_0 = 3,8 \cdot 10^8 \text{ rad.s}^{-1}$. Cela correspond au domaine des ondes radio.

IV.6. Dans le vide, le vecteur de Poynting a pour expression $\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B}$.

Pour une onde plane dans le vide, $\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$, soit $\|\vec{\Pi}\| = \frac{c}{\mu_0} B_1^2$. A.N. $\|\vec{\Pi}\| = 2,14 \cdot 10^5 \text{ W.m}^{-2}$

IV.7. La durée τ correspond à un quart de la période $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$, soit $\tau = \frac{\pi}{2\omega_1}$.

A.N. $\tau = 2 \cdot 10^{-4} \text{ s}$. Ainsi, à $t = \tau$, on aura $\vec{M} = M_0 \vec{u}_y$ (rotation selon $-\vec{u}_x$).

Pour $t > \tau$, $\vec{B}_1 = \vec{0}$ et $\left(\frac{d\vec{M}}{dt} \right)_{R'}$ = $\vec{\omega}_1 \wedge \vec{M} = \vec{0}$ car $\vec{\omega}_1 = \vec{0}$, d'où $\vec{M} = \vec{cte} = M_0 \vec{u}_y$.

Le vecteur aimantation reste donc aligné selon l'axe OY.

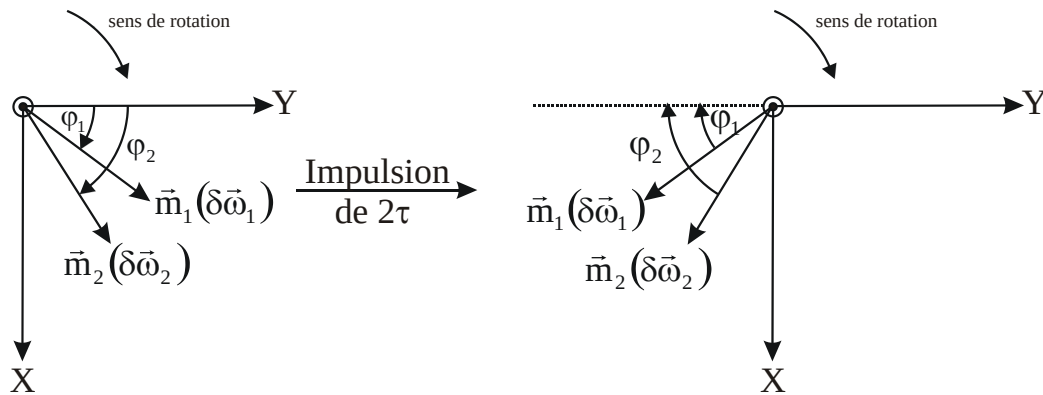
IV.8. Le champ magnétique n'étant pas homogène au sein de l'échantillon, le moment subissant un champ magnétique $\vec{B}$ différent de $\vec{B}_0$ subira un mouvement de précession autour de l'axe Oz à la vitesse angulaire $\delta\vec{\omega} = \vec{\omega} - \vec{\omega}_0$. Chaque moment magnétique subit un champ légèrement différent de son voisin, et chaque moment magnétique tourne donc autour de l'axe Oz à une vitesse angulaire légèrement différente de son voisin. Il en résulte que les différents moments magnétiques ne restent pas alignés et par conséquent le vecteur aimantation $\vec{M}$, somme des moments magnétiques par unité de volume va tendre vers zéro pour $t \gg \tau$.

IV.9. Technique de l'écho de spin

• **Cas où $\delta\omega = 0$** : dans ce cas, il n'y a pas d'inhomogénéité du champ magnétique et tous les moments magnétiques restent fixes dans (R') , ce qui fait qu'il en est de même du vecteur aimantation $\vec{M}$. Ainsi, avant application du champ $\vec{B}_1$, le vecteur aimantation est selon $\vec{u}_Y$.

En appliquant le champ $\vec{B}_1$ pendant la durée $2\tau = \pi / \omega_1$, le moment magnétique va tourner de π autour de l'axe Ox et va donc être juste après orienté selon $-\vec{u}_Y$. On aura ainsi $\vec{M}_{(T_E+2\tau)} = -M_0\vec{u}_Y$, puis l'orientation du moment magnétique n'évolue plus de sorte que $\vec{M}_{(2T_E)} = -M_0\vec{u}_Y$.

• **Cas où $\delta\omega \neq 0$** : comme nous l'avons dit, les différents moments magnétiques tournent autour de l'axe Oz à des vitesses angulaires différentes. Durant l'intervalle de temps T_E , les différents moments magnétiques auront donc tournés autour de l'axe Oz d'angles tous différents. Par application du champ $\vec{B}_1$, les différents moments magnétiques vont tourner de π autour de l'axe Ox . Au temps $t = 2T_E$, les différents moments magnétiques vont alors tous se rejoindre, et rejoindre en particulier celui qui subissait exactement le champ $\vec{B}_0$ et donc ne tournait pas dans (R') . Au temps $t = 2T_E$, on aura donc à nouveau $\vec{M}_{(2T_E)} = -M_0\vec{u}_Y$



IV.10. Equations d'évolution des composantes de $\vec{M}$ dans (R') à la résonance :

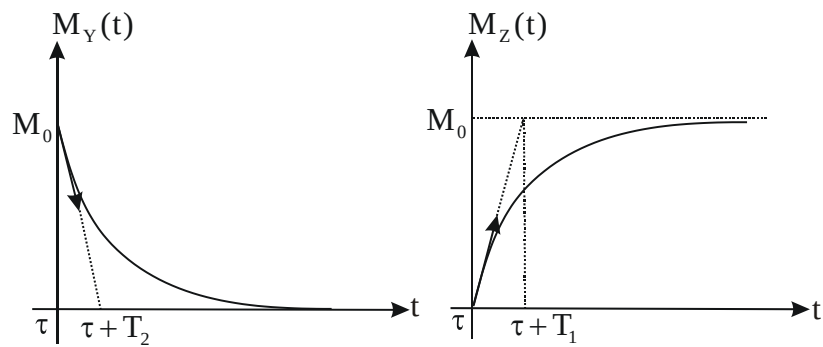
$$\begin{cases} dM_X / dt = -M_X / T_2 \\ dM_Y / dt = -M_Y / T_2 \\ dM_Z / dt = -(M_Z - M_0) / T_1 \end{cases}$$

Il est légitime de négliger les processus de relaxation entre les instants $t = 0$ et $t = \tau$ car $\tau \ll T_2$ de sorte que $e^{-\tau/T_2} \simeq 1$. On considérera donc que $\vec{M}(t = \tau) = M_0\vec{u}_Y$.

- $\frac{dM_x}{dt} = -\frac{M_x}{T_2}$ donne $M_x(t) = M_x(\tau) \exp\left(-\frac{t-\tau}{T_2}\right)$
- $\frac{dM_y}{dt} = -\frac{M_y}{T_2}$ donne $M_y(t) = M_y(\tau) \exp\left(-\frac{t-\tau}{T_2}\right)$
- $\frac{dM_z}{dt} = -\frac{M_z - M_0}{T_1}$ donne $M_z(t) = M_0 + (M_z(\tau) - M_0) \exp\left(-\frac{t-\tau}{T_1}\right)$

Compte tenu de ce que $\vec{M}(t = \tau) = M_0 \vec{u}_y$, il vient donc :

$$M_x(t) = 0, \quad M_y(t) = M_0 \exp\left(-\frac{t-\tau}{T_2}\right), \quad M_z(t) = M_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{t-\tau}{T_1}\right)\right]$$



IV.11. Il faut choisir une valeur de T_E assez faible devant T_2 pour que l'amplitude de l'impulsion qui va être détectée (au moment où tous les moments magnétiques individuels se rejoignent) ne soit pas trop faible. Il faut donc avoir $\tau \ll T_E \ll T_2$.