

Autour de la formation d'une étoile par condensation nébulaire

Concours X-Cachan PSI (Physique)

9 Mai 2011

I Formation d'une étoile, système auto-gravitant

A. Répartition de masses dans un système auto-gravitant

1. Considérations de symétrie Le champ gravitationnel est un champ en $\frac{1}{r^2}$, plus précisément la loi de Newton nous fournit, pour le champ gravitationnel créé au point M de l'espace par un élément de masse m placé en P :

$$\vec{\mathcal{G}}(M) = -G \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}.$$

Les propriétés de symétrie de ce champ sont donc les mêmes que celles du champ électrostatique. En particulier, le champ $\vec{\mathcal{G}}$ est contenu dans tout plan de symétrie de la distribution des masses.¹ Il en résulte que si nous considérons une demi-droite issue du centre de la distribution sphérique, celle-ci étant intersection de deux plans de symétrie, le champ en un point de cette droite est parallèle à celle-ci, donc radial. Maintenant, si nous considérons deux observateurs situés à même distance de O , ceux-ci ne peuvent pas repérer leurs positions en observant la répartition des masses, il en est donc de même lorsqu'ils observent le champ gravitationnel là où ils sont placés donc $\vec{\mathcal{G}}$ ne peut dépendre que de $\vec{r}$:

$$\vec{\mathcal{G}}(M) = \mathcal{G}(r) \vec{e}_r.$$

En ce qui concerne la pression, remarquons que si le gradient de la pression avait une composante équatoriale (dans un système de coordonnées sphériques quelconques), cette composante serait la même en tout point du cercle équatorial de centre O et de rayon R compte tenu de la symétrie sphérique. Notons $\text{grad}_\varphi(P)$ cette composante. La circulation de cette composante sur le cercle équatorial de rayon R aurait alors pour valeur :

$$\oint_{\text{cercle}} \text{grad}_\varphi(P) R d\varphi = 2\pi R \text{grad}_\varphi(P).$$

Comme la pression est un champ, elle ne peut prendre qu'une seule valeur en un point donné de l'espace, ce qui implique que $\text{grad}_\varphi(P) = 0$ et comme cette propriété est vraie pour tout cercle équatorial, il en résulte que P ne peut dépendre que de r .

2. Théorème de Gauss Pour le champ électrostatique la loi de Coulomb :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3},$$

où q est une charge électrique ponctuelle permet d'établir la validité du théorème de Gauss et de sa forme locale :

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

1. Quelles sont les attentes réelles du jury à ce stade ?

où ρ est la densité volumique de charge électrique.

L'analogie est donc immédiate, il suffit de remplacer $\vec{E}$ par $\vec{\mathcal{G}}$, la densité de charge électrique par la masse volumique et $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ par $-G$ pour obtenir la relation cherchée :

$$\operatorname{div} \vec{\mathcal{G}} = -4\pi G \rho.$$

Par application du théorème de Green-Ostrogradski, on obtient immédiatement la forme intégrale correspondante :

$$\iint_{\Sigma} \vec{\mathcal{G}} \cdot d\vec{S} = -4\pi G \iiint \rho d\tau = -4\pi G M,$$

où M est la masse de matière contenue à l'intérieur de la surface fermée régulière Σ .

3. Cas d'un fluide incompressible en équilibre. La loi fondamentale de la statique des fluides s'écrit :

$$\vec{\operatorname{grad}} P = \rho \vec{\mathcal{G}}.$$

Pour une distribution sphérique de masses, cette équation se projette sur le vecteur radial $\vec{e}_r$ en :

$$\frac{dP}{dr} = \rho \mathcal{G}(r),$$

l'application du théorème de Gauss pour $r < R$ fournit, compte tenu des symétries :

$$4\pi r^2 \mathcal{G}(r) = -4\pi G \rho_0 \frac{4}{3} \pi r^3$$

d'où :

$$\mathcal{G}(r) = -\frac{4}{3} \pi \rho_0 G r = -\frac{GM}{R^3} r,$$

puis :

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{4}{3\pi} \rho^2 G r,$$

équation que nous intégrons aisément entre la surface de rayon R où nous poserons $P = 0$ et un point à la distance r du centre :

$$P = \frac{2\pi}{3} G \rho_0^2 (R^2 - r^2).$$

Au centre de la boule, la pression est donc :

$$P_c = \frac{2\pi}{3} G \rho_0^2 R^2 = \frac{3}{8\pi} G \frac{M^2}{R^4}.$$

Soit pour Jupiter $P_c = 1.1 \times 10^{12}$ Pa.

4. Évolution adiabatique réversible d'un gaz parfait Une transformation d'un système thermodynamique fermé est qualifiée d'adiabatique si et seulement si il ne se produit *aucun* échange de chaleur entre le système et le milieu extérieur au cours de la transformation envisagée.

La définition même d'une transformation adiabatique infinitésimale impose $\delta Q = 0$. On peut écrire à tout étape de la transformation, compte tenu du premier principe de la thermodynamique :

$$\delta Q = dU - \delta W = 0.$$

Une transformation réversible est nécessairement quasistatique, ce qui veut dire que la température est constamment uniforme sur l'ensemble du système et par conséquent, l'écriture : $dU = \delta mc_v \cdot dT$ a un sens.

La réversibilité implique que la pression du système représente bien la pression du milieu extérieur par conséquent : $\delta W = -P\delta m dv$, où v est le volume massique du gaz.

Nous en tirons l'équation :

$$\delta m C_v . dT + P . \delta m v = 0.$$

Éliminons la pression en utilisant à l'équation d'état et exprimons c_v en fonction de γ , il vient :

$$\frac{R}{\gamma - 1} dT + RT \frac{dv}{v} = 0.$$

Les variables se séparent aisément selon :

$$\frac{dT}{(\gamma - 1) T} + \frac{dv}{v} = 0.$$

Si γ est une constante²⁾ il vient par intégration entre l'état initial et l'état final :

$$\ln \frac{v_f}{v_i} = \frac{1}{\gamma - 1} \ln \frac{T_f}{T_i}.$$

Nous pouvons alors regrouper au premier membre :

$$0 = \ln \frac{v_f}{v_i} + \frac{1}{\gamma - 1} \ln \frac{T_f}{T_i} = \frac{1}{\gamma - 1} \ln \frac{T_f V_f^{\gamma-1}}{T_i V_i^{\gamma-1}}.$$

Le passage à l'exponentielle fournit alors :

$$T_f v_f^{\gamma-1} = T_i v_i^{\gamma-1},$$

comme ceci est vrai pour un état final quelconque on dit habituellement que la transformation est caractérisée par la loi :

$$T v^{\gamma-1} = \text{Cste}.$$

En reportant l'équation d'état des gaz parfaits, écrite sous la forme : $T = \frac{Pv}{mR}$ dans l'équation précédente, il vient :

$$P v^\gamma = \text{Cste}.$$

Cette équation est connue sous le nom d'*équation de Laplace*.

La masse volumique étant l'inverse du volume massique, la loi de Laplace liant volume et pression peut être écrite sous la forme :

$$P \rho^{-\gamma} = \text{Cste},$$

demandée par l'énoncé.

Une différenciation logarithmique fournit immédiatement :³

$$\frac{dP}{P} - \gamma \frac{d\rho}{\rho} = 0.$$

Par conséquent :

$$\frac{dP}{dr} = \frac{dP}{d\rho} \frac{d\rho}{dr} = \gamma \frac{P}{\rho} \frac{d\rho}{dr} = A \gamma \rho^{(\gamma-1)} \frac{d\rho}{dr}.$$

2. Dans l'énoncé, c'est implicite....vu la suite

3. Ce n'est pas la meilleure méthode... mais elle suit l'énoncé.

5. Équation d'évolution de $\rho(r)$ Considérons la loi fondamentale de la statique des fluides, compte tenu de la symétrie sphérique, il vient :

$$\frac{dP}{dr} = \rho \mathcal{G}(r),$$

par conséquent :

$$\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} = r^2 \mathcal{G}(r).$$

Par application du théorème de Gauss à cette géométrie sphérique, il vient :

$$4\pi r^2 \mathcal{G}(r) = -G \int_0^r 4\pi u^2 \rho(u) du$$

et en regroupant :

$$\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} = - \int_0^r 4\pi u^2 \rho(u) du.$$

La dérivation par rapport à r qui est la borne d'intégration de l'intégrale du second membre conduit immédiatement au résultat demandé :

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = -G\rho r^2.$$

6. Résolution de l'équation d'évolution de $\rho(r)$ Dans le cas $\gamma = 2$ de l'énoncé : $\frac{dP}{dr} = 2A\rho \frac{d\rho}{dr}$ et par conséquent :

$$2A \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\rho}{dr} \right) = -G\rho r^2,$$

développons le premier membre, il vient :

$$2Ar \left(2 \frac{d\rho}{dr} + r \frac{d^2\rho}{dr^2} \right) = -G\rho r^2,$$

en tenant compte de la remarque de l'énoncé et du changement de variable proposé : $f(r) = r\rho(r)$, il vient :

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{G}{2A} f = 0.$$

Nous obtenons bien une équation différentielle linéaire homogène du second ordre et à coefficients constants dont les solutions sont de la forme $f = \alpha \sin \sqrt{\frac{G}{2A}} r + \beta \cos \sqrt{\frac{G}{2A}} r$ puisque A est nécessairement positif.

Nous excluons à priori⁴ les solutions fournissant une masse volumique infinie en O , d'autre part, nous n'acceptons pas que la pression puisse prendre des valeurs négatives. par conséquent, nous proposons une solution de la forme :

$$\rho(r) = \frac{\alpha}{r} \sin \left(\sqrt{\frac{G}{2A}} r \right)$$

avec $r < \pi \sqrt{\frac{2A}{G}}$, dont l'allure est représentée ci-dessous.

4. Mais rien ne l'indique dans l'énoncé

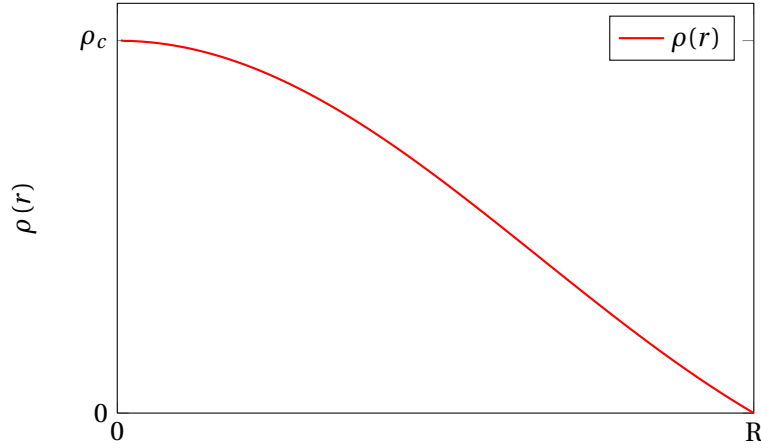


FIGURE 1 – Profil de masse volumique

B. Catastrophe gravothermale

7. Comme le système fermé considéré est isolé. Sa quantité de mouvement reste constante donc également la vitesse de son barycentre par rapport au référentiel Galiléen de référence dont nous postulons l'existence. De plus, le référentiel barycentrique est par définition toujours en translation par rapport au référentiel du laboratoire, ce qui définit bien un changement de référentiel Galiléen.

Dans ce référentiel, la loi fondamentale de la dynamique du point matériel s'écrit :

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = m_i \frac{d \vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_i.$$

8. **Énergie cinétique d'un système de particules** Par définition même :

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i^2.$$

Dérivons *à priori* la quantité $\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \cdot \vec{v}_i$, il vient :

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \cdot \vec{v}_i \right) = \sum_{i=1}^N (m_i \vec{v}_i^2) + \sum_{i=1}^N \left(m_i \vec{r}_i \cdot \frac{d}{dt} \vec{v}_i \right) = \sum_{i=1}^N (m_i \vec{v}_i^2) + \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i \cdot \vec{r}_i).$$

Ce qui conduit immédiatement au résultat fourni par l'énoncé :

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} (m_i \vec{v}_i \cdot \vec{r}_i) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i \cdot \vec{r}_i).$$

9. **Détermination de $\langle E_c \rangle$** Remarquons pour commencer que :

$$\left\langle \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \cdot \vec{v}_i \right) \right\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \cdot \vec{v}_i \right) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \cdot \vec{v}_i \right]_0^T.$$

Si nous considérons que la boule de gaz est d'extension finie et que dans l'approximation de la mécanique classique utilisée ici, toutes les vitesses sont inférieures à la célérité de la lumière, alors

les termes $\left| \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \cdot \vec{v}_i \right|$ restent nécessairement bornés et la limite de l'expression ci-dessus est nulle quand $T \rightarrow \infty$.⁵ Il reste par conséquent :

$$E_c = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i \cdot \vec{r}_i).$$

10. Théorème du viriel La force $\vec{F}_i$ exercée sur la particule i est la somme des forces de gravitation exercées par les autres particules, il vient donc :

$$\vec{F}_i = -Gm_i \sum_{j \neq i} m_j \frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3}.$$

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i \cdot \vec{r}_i) = -G \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N m_i m_j \frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot \vec{r}_i}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3}.$$

Remarquons alors que les termes peuvent être regroupés deux à deux puisque va toujours figurer dans la somme la quantité :

$$m_i m_j \frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot \vec{r}_i}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} + m_i m_j \frac{(\vec{r}_j - \vec{r}_i) \cdot \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} = m_i m_j \frac{(\vec{r}_j - \vec{r}_i)^2}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} = m_i m_j \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|},$$

par conséquent :

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i \cdot \vec{r}_i) = -G \sum_{i=1}^N \sum_{j < i} \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}.$$

Ce terme s'identifie immédiatement à l'opposé de l'énergie potentielle de pesanteur, en effet il suffit de considérer que la répartition des masses a été obtenue en amenant les masses successivement depuis l'infini dans le champ de pesanteur créé par les masses déjà présentes pour obtenir ce résultat.⁶

Il en résulte immédiatement que $\langle E_c \rangle = -\frac{1}{2} \langle E_p \rangle$. ce résultat est appelé théorème du viriel.

11. Stabilité thermique Pour un système quelconque, l'énergie interne est la somme de l'énergie cinétique moyenne et de l'énergie potentielle moyen, par conséquent :

$$U = \langle E_c \rangle + \langle E_p \rangle = -\langle E_c \rangle = -\frac{3}{2} N k_B T.$$

La capacité thermique à volume constant est donnée par définition par :

$$C_v = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_V = -\frac{3}{2} N k_B < 0.$$

Considérons le contact de ce système avec un thermostat, on sait, à partir des principes de la thermodynamique que le sens spontané des échanges de chaleur s'effectue de la source à plus haute température vers la source de température la plus basse. Supposons alors la température du thermostat supérieure à celle du gaz. Le gaz reçoit de l'énergie donc son énergie interne augmente et sa température diminue puisque $C_v < 0$. Si au contraire la température du thermostat est inférieure à celle du gaz, le gaz cède de l'énergie, son énergie interne diminue et sa température augmente....

Il est donc impossible d'obtenir l'équilibre du système avec un thermostat.

5. Est-ce l'argument demandé ? On pourrait aussi remarquer que la définition de l'équilibre thermodynamique impose que toutes les moyennes statistiques de grandeurs microscopiques sont indépendantes du temps, ce qui implique immédiatement le résultat. Simplement ces notions ne figurent pas explicitement au programme !

6. Cette question est très difficile, puisque ces résultats ne sont plus au programme !

12. Autre cas Il est bien connu qu'une vapeur sursaturante peut évoluer de manière spontanée en une phase liquide et une phase vapeur (situation de retard à la condensation).

13. Catastrophe gravothermale Considérons le système constitué par le halo et le cœur, ce système étant isolé évolue à énergie interne constante par conséquent : $U_h + U_c = \text{Cste}$ et au cours d'une évolution : élémentaires $\delta U_h = -\delta U_c$ Comme nous connaissons les capacités thermiques, il est aisé de remarquer que $\delta T_h = \frac{\delta U_h}{C_h}$ et $\delta T_c = \frac{\delta U_c}{C_c}$ par conséquent :

$$\delta(T_h - T_c) = -\frac{\delta U_c}{C_c} \left(1 + \frac{C_c}{C_h}\right),$$

et compte tenu des signes :

$$\delta(T_h - T_c) = \frac{\delta U_c}{|C_c|} \left(1 - \frac{|C_c|}{C_h}\right).$$

Nous en concluons que pour une fluctuation d'énergie positive du cœur

1. si $|C_c| > C_h$, $\delta(T_h - T_c) > 0$ ce qui implique que l'échange de chaleur tend à s'accroître, c'est la catastrophe gravothermale,
2. $|C_c| < C_h$, $\delta(T_h - T_c) < 0$ ce qui implique que l'échange de chaleur tend à changer de sens, le système se stabilise.

II Propagation d'ondes électromagnétiques dans le halo

A. Équations de propagation couplées

14. cf cours.

15. Équations de Maxwell dans le plasma Il vient $\rho_v = n_0 e - n_e e = (n_0 - n_e) e$, tandis que la densité de courant est donnée par $\vec{j} = -n_e e \vec{v}_e$, d'où les équations de Maxwell :

1. Équation du flux magnétique : $\text{div } \vec{B} = 0$;
2. Équation de Maxwell-Faraday : $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
3. Équation de Maxwell-Gauss : $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{(n_0 - n_e) e}{\epsilon_0}$
4. Équation de Maxwell-Ampère : $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\mu_0 n_e e \vec{v}_e + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

16. cf cours, il suffit de prendre la divergence de l'équation de Maxwell-Ampère et de particulariser ici l'expression de ρ_v sachant que $n_0 = \text{Cste}$.

$$\frac{\partial(-n_e e)}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0.$$

17. Équation d'Euler Chaque électron est soumis à la force de Lorentz :

$$\vec{F}_L = -e \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right),$$

en sommant sur les électrons contenus dans un élément de volume il vient :

$$\delta \vec{F} = -n_e e \delta V \vec{E} - n_e e \delta V \vec{v} \wedge \vec{B},$$

dans la mesure où nous considérons que les champs peuvent être considérés comme uniformes sur les éléments de volume considérés.

la densité volumique de force électromagnétique est donc :

$$\vec{F}_v = -n_e e (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}).$$

Il nous suffit donc d'ajouter ces forces au second membre de l'équation d'Euler, écrite d'abord sous forme lagrangienne :

$$n_e m_e \frac{D}{Dt} \vec{v}_e = -\overrightarrow{\text{grad}} P - n_e e (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

puis en passant à la représentation eulérienne par :

$$n_e m_e \left\{ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right\} = -\overrightarrow{\text{grad}} P - n_e e (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}),$$

18. Approximations dans Équation d'Euler

Linéarisation Si nous envisageons à priori la propagation d'ondes dans ce plasma, la longueur caractéristique des phénomènes est la longueur d'onde λ et le temps caractéristique la période T de ces ondes. Soit V la vitesse caractéristique des électrons, nous pouvons donc évaluer l'ordre de grandeur du rapport du terme d'accélération convective au terme d'accélération locale, il vient ⁷ :

$$\frac{\|(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}\|}{\|\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\|} \approx \frac{V \frac{V}{\lambda}}{\frac{V}{T}} = \frac{V}{c}$$

où c est la célérité de l'onde envisagée, qui n'est peut être pas très différente de la célérité des ondes électromagnétiques dans le vide, nous le saurons peut être dans la suite du problème. Si nous avons une confiance raisonnable dans l'énoncé, nous identifions l'approximation du mouvement non relativiste.

Force de Lorentz Comme précédemment, nous évaluons le rapport de la force magnétique à la force électrique, il vient :

$$\frac{\|\vec{v} \wedge \vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} \approx \frac{VB}{E} \approx \frac{V}{c}$$

ce qui sera bien sur une justification, si nous prouvons que la célérité c des ondes dans le plasma est proche de celle c_0 de la lumière dans le vide...

19. Linéarisation des équation Il vient pour l'équation d'Euler :

$$n_0 m_e \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} P - n_0 e \vec{E},$$

et pour les équations de Maxwell :

1. Équation du flux magnétique : $\text{div } \vec{B} = 0;$
2. Équation de Maxwell-Faraday : $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
3. Équation de Maxwell-Gauss : $\text{div } \vec{E} = -\frac{e}{\epsilon_0} n_1$

7. Je me permet de détourner le symbole « models » utilisé en logique mathématique pour écrire ce genre de modélisation...

4. Équation de Maxwell-Ampère : $\vec{\text{rot}} \vec{B} = -\mu_0 n_0 e \vec{v} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

De même dans l'équation de conservation de la charge, seul l'excès d'électrons dépend du temps dans le terme de charge volumique et le courant électronique dans le terme de divergence est assimilé au courant moyen :

$$\frac{\partial(-n_1 e)}{\partial t} + \text{div}(-n_0 e \vec{v}) = 0,$$

soit après simplification :

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + n_0 \text{div} \vec{v} = 0,$$

20. Équation d'évolution de n_1 Dérivons l'équation de conservation de la charge, puis appliquons le théorème de Schwartz, il vient :

$$\frac{\partial^2 n_1}{\partial t^2} = -n_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{v} = -\text{div} \left(n_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right).$$

Reportons alors l'équation d'Euler linéarisée dans ce résultat :

$$\frac{\partial^2 n_1}{\partial t^2} = \text{div} \left(\frac{1}{m_e} \frac{\partial P}{\partial n} \Big|_0 \vec{\text{grad}}(n_1) - n_0 \frac{e}{m_e} \vec{E} \right).$$

Il nous suffit alors d'appliquer la formule d'analyse vectorielle $\vec{\text{div}} \cdot \vec{\text{grad}} f = \Delta f$ et de reporter l'équation de Maxwell-Gauss pour obtenir :

$$\frac{\partial^2 n_1}{\partial t^2} = \frac{1}{m_e} \frac{\partial P}{\partial n} \Big|_0 \Delta(n_1) - \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m_e} n_1.$$

Soit l'équation demandée par l'énoncé :

$$\frac{\partial^2 n_1}{\partial t^2} - \chi^2 \Delta(n_1) + \omega_p^2 n_1 = 0.$$

Interprétation : Remarquons que du point de vue dimensionnel $\chi = \sqrt{\frac{1}{m_e} \frac{\partial P}{\partial n} \Big|_0} \models L.T^{-1}$, c'est une célérité. la quantité $\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m_e}}$ est la pulsation de plasma qui toujours pertinente dans ce type de problème.

Numériquement pour $n_0 = 10^{15} \text{ cm}^{-3}$, il vient $\omega_p = 5.7 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}$.

21. Écoulement irrotationnel Commençons par écrire l'équation d'Euler linéarisée sous une forme réduite faisant intervenir χ , il vient immédiatement :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\chi^2}{n_0} \vec{\text{grad}} n_1 - \frac{e}{m_e} \vec{E}.$$

Dérivons cette équation par rapport au temps :

$$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = -\frac{\chi^2}{n_0} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\text{grad}} n_1 - \frac{e}{m_e} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Permutons les dérivations par rapport au temps et à l'espace, il vient :

$$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = -\frac{\chi^2}{n_0} \vec{\text{grad}} \frac{\partial n_1}{\partial t} - \frac{e}{m_e} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Reprenons la loi de conservation de l'électricité :

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + n_0 \operatorname{div} \vec{v} = 0,$$

et effectuons la substitution, il vient :

$$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = \chi^2 \overrightarrow{\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v}} - \frac{e}{m_e} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Compte tenu de la formule d'analyse vectorielle :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{v}} = \overrightarrow{\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v}} - \Delta \vec{v},$$

qui fournit, dans le cas d'un écoulement irrotationnel la relation :

$$\overrightarrow{\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v}} = \Delta \vec{v},$$

nous obtenons bien le résultat fourni par l'énoncé :

$$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} - \chi^2 \Delta \vec{v} + \frac{e}{m_e} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}.$$

22. Équation d'évolution du champ électrique Nous commençons par éliminer le champ magnétique des équations de Maxwell, pour cela, prenons le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E}} = \overrightarrow{\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v}} - \Delta \vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{rot} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}.$$

Nous permutons les dérivations d'espace et de temps et appliquons l'équation de Maxwell-Gauss ce qui fournit immédiatement :

$$\frac{e}{\epsilon_0} \overrightarrow{\operatorname{grad} n_1} - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{\operatorname{rot} \vec{B}}.$$

Il est alors temps d'éliminer $\vec{B}$ à l'aide de l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot} \vec{B}} = -\mu_0 n_0 e \vec{v} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

il vient :

$$\frac{e}{\epsilon_0} \overrightarrow{\operatorname{grad} n_1} - \Delta \vec{E} = -\mu_0 n_0 e \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2},$$

nous identifions alors la célérité de la lumière dans le vide définie par $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ et nous réintroduisons l'équation d'Euler linéarisée pour obtenir :

$$\frac{e}{\epsilon_0} \overrightarrow{\operatorname{grad} n_1} - \Delta \vec{E} = -\mu_0 n_0 e \left(-\frac{\chi^2}{n_0} \overrightarrow{\operatorname{grad} n_1} - \frac{e}{m_e} \vec{E} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2},$$

Nous multiplions par c^2 , éliminons μ_0 et identifions ω_p^2 pour obtenir la loi fournie par l'énoncé :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \vec{E} + \omega_p^2 \vec{E} = \frac{e}{\epsilon_0} (c^2 - \chi^2) \overrightarrow{\operatorname{grad} n_1}.$$

B. Étude des solutions

23. Oscillations de la densité d'électron Nous recherchons la relation de dispersion associée en remplaçant dans l'équation d'évolution de la densité électronique n_1 par sa représentation complexe, il vient :

$$\left(-\omega^2 + \chi^2 k^2 + \omega_p^2\right) \underline{n}_1 = 0.$$

Comme nous ne considérons pas la solution triviale $n_1 = 0$, la condition nécessaire d'existence de solution sous forme d'onde plane monochromatique (relation de dispersion) s'écrit :

$$k^2 = \frac{1}{\chi^2} \left(\omega^2 - \omega_p^2\right).$$

La propagation n'est possible que si k est réel, c'est-à-dire si $k^2 > 0$ donc lorsque $\omega > \omega_p$.

24. Vitesse de phase et vitesse de groupe La vitesse de phase (célérité des ondes monochromatiques) est par définition :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \chi \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}} = \chi \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

La vitesse de groupe est donnée par la relation $v_g = \frac{d\omega}{dk}$. Pour alléger le calcul, remarquons ici que $k \cdot dk = \frac{1}{\chi^2} \omega d\omega$ et que par conséquent :

$$v_g v_\varphi = \frac{\omega}{k} \frac{d\omega}{dk} = \chi^2,$$

donc ici :

$$v_g = \frac{\chi^2}{v_\varphi} = \chi \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} = \chi \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}.$$

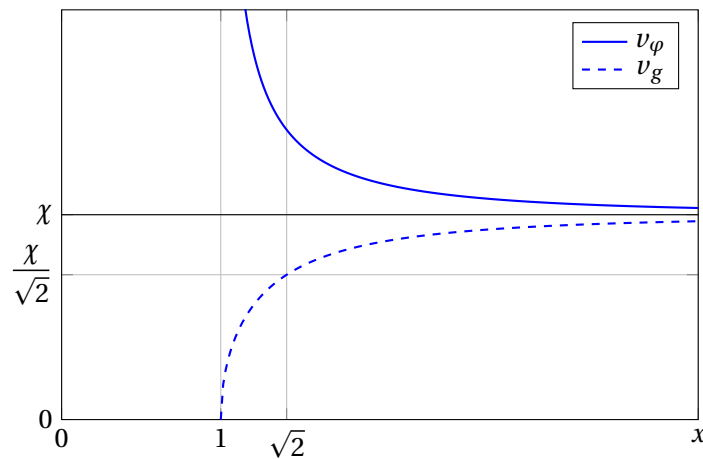


FIGURE 2 – Vitesse de phase et vitesse de groupe

On sait que la vitesse de groupe caractérise la vitesse de transmission de l'information, la valeur maximale de cette vitesse est ici $v_{max} = \chi$. Nous remarquons simplement que la vitesse de groupe est une fonction monotone croissante de x , la vitesse est supérieure à $\frac{v_{max}}{\sqrt{2}}$ pour $x \geq \sqrt{2}$.

25. Onde transverse électrique Nous admettons que $n_1 = 0$ d'après l'énoncé, par conséquent les équations de Maxwell-Gauss et de Maxwell-Faraday prennent la même forme que dans le vide. Ce qui implique que l'onde est transverse électrique et le trièdre $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ est orthogonal et direct.

L'équation de dispersion pour $\vec{E}$ s'obtient immédiatement puisque le terme faisant intervenir n_1 n'est pas présent et nous trouvons par un calcul analogue au précédent :

$$k^2 = \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega_p^2).$$

Pour $\omega < \omega_p$, k est imaginaire pur de la forme :

$$k = \pm \frac{i}{c} \sqrt{\omega_p^2 - \omega^2} = \pm i k''$$

et par conséquent :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(i\omega t) \exp(\pm k'' x)$$

Le milieu n'est pas amplificateur à priori, donc nous ne retenons que les ondes amorties dans la direction de propagation considérée à priori.

La conséquence de ceci est que si un halo de ce type entoure une étoile, il absorbe les radiations de pulsation inférieure à ω_p et que ces pulsations sont inexistantes dans le spectre observé à distance.

26. Ondes longitudinales Par construction, le champ électrique (grandeur vibratoire) est colinéaire à la direction de propagation, ce qui définit une onde *longitudinale*. Un calcul simple fournit le rotationnel de $\vec{E}$: $\text{rot } \vec{E} = \vec{k} \wedge \vec{E} = k \vec{e}_x \wedge E \vec{e}_x = \vec{0}$. Nous en concluons d'après l'équation de Maxwell-Faraday que $\vec{B}$ est une constante, qu'il est d'usage de ne pas considérer comme une onde.

L'onde longitudinale est donc une onde électrique.

Pour écrire la relation de dispersion, nous projetons l'équation d'évolution du champ électrique obtenue question (22.) sur l'axe Ox et remarquons également que $\text{grad } n_1 = -i k n_1 \vec{e}_x$ pour obtenir :

$$\underline{E} (-\omega^2 + k^2 c^2 + \omega_p^2) = -i \frac{e}{\epsilon_0} (c^2 - \chi^2) k n_1$$

L'équation de Maxwell-Gauss s'écrit ici sous la forme :

$$i k \underline{E} = \frac{e}{\epsilon_0} n_1,$$

En combinant ces deux relations, il vient :

$$\underline{E} (-\omega^2 + k^2 \chi^2 + \omega_p^2) = 0.$$

Nous retrouvons la relation de dispersion associée aux oscillations de la densité d'électrons. L'équation de Maxwell-Gauss fournit entre les amplitudes la relation :

$$i k \underline{E}_0 = \frac{e}{\epsilon_0} n_{10}.$$

Nous en déduisons que la densité volumique de charge est en quadrature avance sur le champ électrique.

27. Étude énergétique des ondes longitudinales Le lien entre $\underline{E}_0$ et $\underline{v}_0$ s'obtient à partir de la formule obtenue à la question (22.) dans le cas d'un écoulement *irrotationnel*. Nous avons remarqué que $\vec{\text{rot}} \underline{E} = \vec{0}$. Par conséquent une solution telle que $\underline{v}$ soit proportionnel à $\underline{E}$ sera bien irrotationnelle. Il ne sera pas donc contradictoire d'utiliser (22.), mais nous ne sommes pas certains de ne pas laisser échapper de solutions.⁸

Il vient alors immédiatement :

$$(-\omega^2 + \chi^2) \underline{v} + i\omega \frac{e}{m_e} \underline{E} = 0,$$

d'où :

$$\underline{v} = -i\omega \frac{e}{m_e(-\omega^2 + \chi^2)} \underline{E}.$$

La relation entre amplitude complexes $\underline{E}_0$ et $\underline{v}_0$ est la même.

La puissance volumique dissipée par effet Joule est donnée de manière générale par $\pi = \vec{j} \cdot \vec{E}$. Nous nous intéressons ici à la puissance volumique moyenne, donnée en notation complexe par la relation :

$$\langle \pi \rangle = \frac{1}{2} \Re(\vec{j} \cdot \vec{E}^*) = \frac{1}{2} \Re(n_0 \underline{v} \cdot \underline{E}^*)$$

Il vient donc ici $\langle \pi \rangle = 0$. Ces ondes se propagent sans atténuation.

C. Limites de validité du modèle

28. Distance moyenne entre électrons Si nous supposons que chaque électrons occupe le centre un espace cubique d'arête d , d représente aussi la distance entre électrons et $n_0 = \frac{1}{d^3}$. Ce calcul n'est qu'approximatif et nous poserons donc numériquement :

$$d \approx n_0^{-\frac{1}{3}} \approx 10^{-5} \text{ cm} = 0.1 \mu\text{m}.$$

La modélisation du plasma nébulaire par un milieu continu ne sera donc pertinente que si les densités moyennes sont calculées sur des volumes dont la longueur caractéristique est supérieure à $10^3 d \approx 100 \mu\text{m}$.

29. Écrantage Dans le cas d'un potentiel électrostatique $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$ où V est le potentiel électrostatique et $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$. Il nous suffit de combiner ces deux relations et de remplacer ρ par son expression pour obtenir :

$$\Delta V = -\text{div}(\vec{\text{grad}} V) = -\frac{n_0 e}{\epsilon_0} \left\{ \exp\left(-\frac{eV}{k_B T}\right) - \exp\left(\frac{eV}{k_B T}\right) \right\} = \frac{n_0 e}{\epsilon_0} \text{sh}\left(\frac{eV}{k_B T}\right).$$

30. Résolution approchée Dans le cas des températures élevées et pour des particules assez éloignées les unes des autres, l'approximation linéaire peut être appliquée au second membre, il vient :

$$\Delta V = \frac{n_0 e}{\epsilon_0} \frac{eV}{k_B T},$$

dans un système de coordonnées sphériques où nous recherchons uniquement des fonctions de la forme $V(r)$, il vient :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV(r)}{dr} \right) = \frac{n_0 e}{\epsilon_0} \frac{eV}{k_B T},$$

8. Compte tenu de la logique du problème, je ne vois pas comment aller plus loin de manière raisonnablement simple...

Il est aisé de retrouver que :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV(r)}{dr} \right) = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (rV),$$

ce qui nous fournit l'équation différentielle simple :

$$\frac{d^2}{dr^2} (rV) - \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 k_B T} (rV) = 0.$$

Les solutions de cette équation sont donc de la forme :

$$V = \frac{\alpha}{r} \exp \frac{r}{\lambda_D} + \frac{\beta}{r} \exp -\frac{r}{\lambda_D}.$$

Remarquons que lorsque $r \rightarrow \infty$ la distribution des charges redevient uniforme, c'est donc que $V \rightarrow 0$ ce qui implique $\alpha = 0$. Au voisinage de la charge $r \rightarrow 0$, on doit retrouver le potentiel électrique créé par une charge ponctuelle, d'où la solution à retenir :

$$V = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} \exp \left(-\sqrt{\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 k_B T}} r \right).$$

Nous identifions une première longueur caractéristique⁹ :

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{n_0 e^2}} = \sqrt{\frac{k_B T}{m_e \omega_p^2}},$$

où ω_p est la pulsation de plasma.¹⁰ La seconde constante introduite par l'énoncé a donc pour valeur :

$$l_B = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 k_B T}.$$

La longueur λ_D caractérise la décroissance exponentielle du potentiel, elle définit l'ordre de grandeur de la distance à partir de laquelle une charge électrique est écrantée par les autres charges de la distribution, donc la distance à partir de laquelle les interactions entre particules chargées deviennent négligeables.

La constante l_1 caractérise la distance à partir de laquelle les termes d'énergie cinétique deviennent supérieurs aux termes d'énergie potentielle électrostatique, c'est à dire la distance à partir de laquelle il n'est plus possible que deux charges restent liées.

Numériquement : L'application numérique nécessite la température du halo qui n'est pas fournie.

Cependant, le candidat plein d'initiative peut remarquer que puisque le plasma d'hydrogène est entièrement ionisé, l'énergie cinétique des particules doit être supérieure à l'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène qui est de 13.6 eV, valeur que nous pouvons attribuer à $k_B T$ d'où il vient :

$$\lambda_D = 9 \times 10^{-7} \text{ m} = 0.9 \mu\text{m}.$$

Les interactions électrostatiques seront négligeables si la longueur d'onde est grande par rapport à λ_D . Nous remarquons que la condition obtenue ici est moins stricte que celle permettant l'utilisation de la modélisation continue (obtenue à la question 28.).

Au vu de ces ordres de grandeur, le modèle n'est pas utilisable dans le domaine visible pour lequel les longueurs d'ondes sont comprises entre 0.4 μm et 0.8 μm .

9. Dite longueur de Debye, d'où l'indice D

10. La deuxième formulation permet de vérifier rapidement l'homogénéité du résultat.

III Formation de « tourbillons » dans le halo

A. Étude du cas statique.

31. Équation de la chaleur La loi de Fourier fournit directement $\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$. Considérons comme système $\mathcal{S}$ le fluide contenu à l'intérieur d'une surface fermée régulière Σ fixe et appliquons lui le premier principe de la thermodynamique. Dans le cas statique, il n'y a pas d'échange de matière à travers la surface Σ , nous étudions bien un système fermé. Il n'y a pas non plus d'échange de travail, par conséquent le premier principe de la thermodynamique s'écrit $dU = \delta Q$. La chaleur étant échangée par conduction thermique exclusivement, nous introduisons le flux de chaleur reçue Φ et nous écrivons le premier principe sous la forme : $dU = \Phi dt$ ou mieux sous la forme :

$$\frac{dU}{dt} = \Phi = - \oint_{\Sigma} \vec{j}_{th} \cdot d\Sigma.$$

Comme le système est caractérisé par une capacité thermique massique c_v et une masse volumique ρ nous pouvons remarquer que :

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{S}} u_v d\tau = \iiint_{\mathcal{S}} \frac{\partial u_v}{\partial t} d\tau.$$

Le premier principe de la thermodynamique s'écrit donc :

$$\iiint_{\mathcal{S}} \frac{\partial u_v}{\partial t} d\tau = - \oint_{\Sigma} \vec{j}_{th} \cdot d\Sigma.$$

Par une classique transformation d'intégrale, nous obtenons la forme locale du premier principe de la thermodynamique :

$$\text{div } \vec{j}_{th} = - \frac{\partial u_v}{\partial t}.$$

Où u_v représente la densité volumique d'énergie interne. Remarquons alors que :

$$\frac{\partial u_v}{\partial t} = \frac{\partial \rho_0 u_m}{\partial t} = \rho_0 \frac{\partial u_m}{\partial t}$$

où u_m est la densité massique d'énergie interne.

Remarquons alors que l'énergie interne massique est à priori une fonction de la température et de la masse volumique, cependant, celle dernière grandeur n'évoluant pas dans la situation ici-considérée, il ne nous faut retenir que la dépendance en température et par conséquent :

$$\frac{\partial u_v}{\partial t} = \rho_0 \frac{\partial u_m}{\partial t} = \rho_0 \frac{\partial u_m}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} = \rho_0 c_v \frac{\partial T}{\partial t}.$$

La forme locale du premier principe est donc maintenant :

$$\text{div } \vec{j}_{th} = -\rho_0 c_v \frac{\partial T}{\partial t},$$

l'introduction de la loi de Fourier au premier membre fournit alors :

$$\text{div} \left(-\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T \right) = -\rho_0 c_v \frac{\partial T}{\partial t},$$

si nous supposons de plus λ uniforme sur la région étudiée, il vient :

$$\Delta T_0 = \frac{\rho_0 c_0}{\lambda} \frac{\partial T_0}{\partial t}.$$

En introduisant la diffusivité thermique $\kappa = \frac{\lambda}{\rho_0 c_v}$ dont l'unité est le $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$, nous obtenons l'équation de la chaleur sous la forme demandée par l'énoncé :

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} = \kappa \Delta T_0.$$

32. Répartition des températures

Il vient en régime indépendant du temps

$$\kappa \Delta T_0 = 0.$$

En utilisant le système de coordonnées cylindriques,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = 0.$$

Les conditions aux limites sur la température présentant une symétrie de révolution, nous recherchons une solution où la température ne dépend que de r . Il vient donc immédiatement :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \Rightarrow T_0 = \alpha \ln r + \beta.$$

Les deux conditions limites imposent :

$$T(R_1) = T_1 \text{ et } T(R_2) = 0,$$

la résolution du système d'équation résultant fournit rapidement $\alpha = -\frac{T_1}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$, $\beta = -\frac{T_1}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \ln R_2$

d'où l'expression recherchée :

$$T_0(r) = -\frac{T_1}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \ln\left(\frac{r}{R_2}\right).$$

33. Répartition des pressions

Le principe fondamental de la statique des fluides étant écrit sous la forme :

$$\vec{\text{grad}} P_0 = -\rho_0 \frac{GM_c}{r^2} \vec{e}_r,$$

il vient immédiatement en supposant que ρ_0 est une constante et en projetant sur l'axe radial :

$$\frac{dP}{dr} = -\rho_0 \frac{GM_c}{r^2},$$

qui s'intègre immédiatement entre la surface où $P = 0$ pour $r = R_2$ en :

$$P(r) = \rho_0 GM_c \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right).$$

B. Démarrage de la convection

34. Étude qualitative Si nous imaginons qu'une « particule » de fluide est réchauffé au niveau du cœur plus que son environnement immédiat, sa masse volumique diminue par rapport à celle du milieu environnant et par conséquent, la poussée d'Archimède engendrée par ce milieu ambiant, dirigée vers l'extérieur du halo devient supérieure en module à la force de pesanteur dirigée vers le centre. la particule est donc globalement soumise à une force dirigée vers l'extérieur qui la fait s'éloigner du centre. Comme les échanges de chaleur par conduction sont très lents, cette particule de fluide, si elle est suffisamment chaude peut être soumise à ce phénomène tout le long de sa remontée.

Un raisonnement de même nature permet de comprendre pourquoi une particule de fluide refroidie au niveau de R_2 davantage que le reste du halo peut descendre jusqu'à la surface du cœur.

Les phénomènes de convection s'observent aisément dans une casserole d'eau chauffée ou bien dans une salle chauffée par un « radiateur ».

35. Équation de Navier-Stokes Nous identifions les termes :

Dérivée locale Le terme $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ représente l'évolution temporelle du champ des vitesses en un point fixe;

Dérivée convective Le terme $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}$ représente la variation du champ de vitesse découlant du déplacement d'une particule de fluide,

Forces de pression Le terme $-\overrightarrow{\text{grad}} P$ représente l'équivalent volumique des forces de pression,

Forces de pesanteur La quantité $-\rho \frac{GM_c}{r^2} \vec{e}_r$ représente l'équivalent volumique des forces de pesanteurs, ici attribuées au seul cœur.

Forces de viscosité leur équivalent volumique est, dans le cas d'un fluide incompressible $\eta \Delta(\vec{v})$.

D'après l'énoncé, le régime de rotation s'établit très rapidement devant le temps que met le fluide pour faire un tour de la cellule de convection. Ceci revient à dire que le temps caractéristique des variations locales de vitesse est petit devant les temps de déplacement donc que la dérivée locale est grande devant la dérivée convective.

Plus précisément, si nous notons τ le temps d'établissement du régime convectif et V l'ordre de grandeur de la vitesse :

$$\left\| \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right\| \approx \frac{V}{\tau},$$

de même si nous notons L le périmètre de la cellule convective :

$$\left\| (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right\| \approx V \frac{V}{L},$$

mais $\frac{L}{V}$ est précisément le temps T_{rot} que met la particule à parcourir le périmètre de la cellule. Par conséquent :

$$\frac{\left\| (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right\|}{\left\| \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right\|} \approx \frac{V}{\tau} \frac{L}{V.V} = \frac{\tau}{T_{rot}} \ll 1$$

36. Équation de la chaleur : Il nous suffit d'affirmer que le bilan d'énergie interne est effectué dans le cadre d'une représentation lagrangienne pour remarquer que le passage à la représentation eulérienne fait intervenir la dérivée totale de la température au premier membre de l'équation de la chaleur pour obtenir :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T = \kappa \Delta T.$$

37. Linéarisation de l'équation de Navier-Stokes Nous procédons en deux étapes.

Tout d'abord, nous avons montré que le terme de dérivée convective présent au premier membre peut être négligé dans le fluide en mouvement, ce qui implique que :

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} (P_0(r) + \delta P(\theta, t)) - (\rho_0(r) + \delta \rho(\theta, t)) \frac{GM_c}{r^2} \vec{e}_r + \eta \Delta(\vec{v}),$$

nous écrivons l'équation statique associée :

$$\vec{0} = -\overrightarrow{\text{grad}} P_0(r) - \rho_0(r) \frac{GM_c}{r^2} \vec{e}_r,$$

et nous retranchons membre à membre :

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} \delta P(\theta, t) - (\delta \rho(\theta, t)) \frac{GM_c}{r^2} \vec{e}_r + \eta \Delta(\vec{v}),$$

nous remarquons ensuite que l'équation n'étant à écrire que pour $R_1 + \delta r < r < R_2 + \delta r$, il est pertinent de projeter l'équation sur les axes $(O, \vec{e}_r)$ selon lequel la composante du gradient est nulle, et de remarquer que la faible variation de ρ ne doit pas être prise en compte au premier membre il vient donc :

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -(\delta \rho(\theta, t)) \frac{GM_c}{r^2} + \eta \Delta_r(\vec{v}),$$

il ne nous reste plus qu'à remarquer que : $\delta \rho = -\rho_0 \alpha \delta T$ pour obtenir l'équation recherchée :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = +\alpha \delta T \frac{GM_c}{r^2} + \frac{\eta}{\rho_0} \Delta_r(\vec{v}),$$

soit : ¹¹

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \alpha \delta T \frac{GM_c}{r^2} = \frac{\eta}{\rho_0} \Delta_r(\vec{v}).$$

En ce qui concerne l'équation de la chaleur, nous écrivons de même immédiatement :

$$\frac{\partial(\delta T)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}(T_0(r)) = \kappa \Delta(\delta T).$$

Nous avons montré à la question 32. que :

$$T_0(r) = -\frac{T_1}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \ln\left(\frac{r}{R_2}\right),$$

par conséquent :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(T_0(r)) = -\frac{T_1}{r \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \vec{e}_r$$

et il vient donc en effectuant le produit scalaire :

$$\frac{\partial(\delta T)}{\partial t} - \frac{B}{r} v = \kappa \Delta(\delta T)$$

avec $B = \frac{T_1}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}.$

38. Recherches de solutions On recherche une solution des équations précédentes sous la forme :

$$v = v_0 \exp(\gamma t) \cos(\beta \theta),$$

$$\delta T = \Gamma_0 \exp(\gamma t) \cos(\beta \theta).$$

La perturbation croît si $\gamma > 0$.

β représente la pulsation angulaire de la perturbation, c'est-à-dire la dépendance angulaire des déformations. On ne peut bien évidemment choisir vu l'unicité du champ de température et du champ des vitesses que $\beta = p$, $p \in \mathbb{N}^*$. La structure proposée dans l'énoncé est relative au cas $\beta = 2$.

11. Une petite erreur dans l'énoncé où figure un terme ρ_0 au dénominateur de l'expression des forces de pesant.

39. Évolution de γ Pour calculer le laplacien de v et celui de δT nous utilisons la formule du laplacien *scalaire* en coordonnées cylindriques (car une seule composante du champ des vitesses, même si son orientation change définit bien un unique champ scalaire).

Les dérivations par rapport au temps étant d'ordre 1 reviennent à une simple multiplication par γ et les dérivations par rapport à θ étant toutes d'ordre 2 reviennent à une simple multiplication par $-\beta^2$, il vient donc :

$$\gamma v_0 - \frac{\alpha G M_c}{r^2} \Gamma_0 = -\beta^2 \frac{\eta}{\rho_0 r^2} v_0,$$

$$\gamma \Gamma_0 - \frac{B}{r} v_0 = -\beta^2 \frac{\kappa}{r^2} \Gamma_0.$$

Après transposition ces équations fournissent :

$$\left(\gamma + \frac{\beta^2 \eta}{\rho_0 r^2} \right) v_0 - \frac{\alpha G M_c}{r^2} \Gamma_0 = 0,$$

$$\frac{B}{r} v_0 - \left(\gamma + \beta^2 \frac{\kappa}{r^2} \right) \Gamma_0 = 0.$$

Ce système n'admet une solution non nulle que si et seulement si le déterminant du système de Cramer est nul d'où :

$$\left(\gamma + \frac{\beta^2 \eta}{\rho_0 r^2} \right) \cdot \left(\gamma + \beta^2 \frac{\kappa}{r^2} \right) - \frac{B}{r} \frac{\alpha G M_c}{r^2} = 0.$$

Dans le cas général, c'est donc une équation du quatrième de degré en r .

40. Limite du démarrage Nous posons $\gamma = 0$ et $\beta = 2$, il vient alors simplement :

$$16 \frac{\eta \kappa}{\rho_0 r} - \alpha B G M_c = 0.$$

Remplaçons B par son expression et plaçons nous au niveau du cœur, il vient alors :

$$T_{1c} = 16 \frac{\eta \kappa}{\rho_0 G M_c \alpha} \frac{1}{R_1} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Si $T_1 < T_{1c}$, la poussée d'Archimède n'est pas suffisante pour entraîner la convection, tandis que si $T_1 > T_{1c}$, la convection peut démarrer au niveau du cœur puis se propager à la surface. Interprétons les termes du résultat.

η : Plus le fluide est visqueux, plus sa déformation est difficile, donc plus le cœur doit être chaud pour que la convection s'établisse.¹²

κ Si le fluide est diffusif, sa température tend à s'homogénéiser rapidement ce qui limite les gradients de masse volumique responsables de la poussée d'Archimède donc plus le cœur doit être chaud pour que la convection s'établisse.

α Plus α est grand, plus les différences de masse volumiques associées aux variations de température sont importantes et plus la convection se produit facilement.

M_c Plus M_c est grand, plus le système est étendu, ce qui favorise le démarrage de la convection.

12. Il aurait été préférable de raisonner sur la viscosité dynamique $\nu = \frac{\eta}{\rho}$, puisque la discussion porte sur un régime transitoire.