

1. Réponses A et D

On appelle $x(t)$ la longueur du ressort ; la deuxième loi de Newton appliquée à la masse M et projetée sur l'axe (Ox) donne :

$$m\ddot{x} = -k(x - l_0) + F \quad \text{donc} \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F + kl_0}{m} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0^2 = k/m}$$

Résolution :

★ Solution particulière : $x_1 = \frac{F}{k} + l_0$

★ Solution générale de l'équation sans second membre : $x_2 = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$

En tenant compte des conditions initiales $x(0) = l_0$ et $\dot{x}(0) = 0$, on en déduit :

$$\boxed{x(t) = l_0 + \frac{F}{k} - \frac{F}{k} \cos(\omega_0 t)}$$

2. Réponse B

On appelle x_{all} l'allongement du ressort :

$$E_M = E_c + E_p = \frac{1}{2} k x_{all}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} k \frac{F^2}{k^2} (1 - \cos(\omega_0 t))^2 + \frac{1}{2} m \frac{F^2}{k^2} \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t)$$

On en déduit, après simplification, $\boxed{E_m = \frac{F^2}{k} (1 - \cos(\omega_0 t))}$

3. Réponse E

Une fois la force supprimée, l'énergie mécanique se conserve, l'énergie potentielle maximale est égale à l'énergie mécanique à l'instant τ :

$$\frac{F^2}{k} (1 - \cos(\omega_0 \tau)) = \frac{1}{2} k x_m^2 \quad \text{donc} \quad x_m^2 = \frac{2F^2}{k^2} (1 - \cos(\omega_0 \tau))$$

Avec $2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x$, on obtient : $\boxed{x_m = \frac{2F}{k} \left| \sin\left(\frac{\omega_0 \tau}{2}\right) \right|}$

4. Réponse A

L'amplitude x_m est maximale pour $\omega_0 \tau = \pi$, donc $\tau = \pi/\omega_0$.

$$\tau = \frac{\pi}{\sqrt{k/m}} = \frac{\pi}{\sqrt{12/0,2}} = \frac{\pi}{\sqrt{60}} = \frac{\pi}{2\sqrt{15}} \simeq \frac{3}{2 \times 4} \simeq \boxed{0,4 \text{ s}}$$

5. Réponse C

D'après le théorème de l'énergie mécanique et en utilisant le résultat de la question 2 :

$$\Delta E_M = E_M(\tau) - E_M(0) = W(\vec{F}) \quad \text{donc} \quad \boxed{W(\vec{F}) = E_M(\tau) = \frac{F^2}{k} (1 - \cos \pi) = \frac{2F^2}{k}}$$

6. Réponse D

Pour un régime pseudo-périodique, l'allongement vérifie : $x_{all}(t) = A \exp(-\frac{\omega_0 t}{2Q}) \cos(\omega_0 t + \varphi)$, le nombre d'oscillations amorties étant important, on peut confondre pulsation propre et pseudo-pulsation. D'après l'énoncé, pour $t_1 = 25T_0$:

$$e^{-\frac{\omega_0 \times 25T_0}{2Q}} = e^{-\frac{\frac{2\pi}{T_0} \times 25T_0}{2Q}} = \frac{1}{2} \quad \text{donc} \quad \boxed{Q = \frac{25\pi}{\ln 2} \simeq 110}$$

On peut certainement retenir la réponse D.

7. Réponse C

La loi des mailles donne : $E = Ri + R(i - i_L)$.

L'intensité i_L traversant la bobine est continue $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$, donc $\boxed{i(0^+) = E/2R}$.

8. Réponses B et D

En régime permanent, $u_L = -L \frac{di_L}{dt} = 0$, l'intensité dans la branche inférieure est donc nulle :

$$\boxed{i(t_1^-) = i_L(t_1^-) = E/R}$$

9. Réponse E

On considère à nouveau la loi des mailles à l'instant t_1^+ :

$$0 = Ri + R(i - i_L) \quad \text{avec} \quad i_L(t_1^+) = i_L(t_1^-) = E/R \quad \text{donc} \quad \boxed{i(t_1^+) = E/2R}$$

10. Réponses B et C

La loi des mailles donne $E = Ri + L \frac{di_L}{dt}$ et $E = 2Ri - Ri_L$; on dérive la seconde équation et on reporte dans la première :

$$\frac{di}{dt} + \frac{i}{2L/R} = \frac{E}{2L}$$

$$\boxed{\tau = \frac{2L}{R}} \quad \text{et} \quad \boxed{\alpha = \frac{E}{2L}}$$

11. Réponses A et C

L'impédance équivalente de l'association parallèle bobine-résistance vaut $\underline{Z} = \frac{jRL\omega}{R + jL\omega}$; on applique un pont diviseur de tension en prenant garde à l'orientation de u_L :

$$\frac{-\underline{u}_L}{\underline{e}} = \frac{\underline{Z}}{R + \underline{Z}} = \frac{jL\omega}{R + 2jL\omega} \quad \text{donc} \quad \frac{\underline{u}_L}{\underline{e}} = \frac{-jL\omega}{R + 2jL\omega}$$

Il s'agit d'un filtre passe-haut dont le gain à haut fréquence vaut 1/2 ; on détermine alors la pulsation de coupure ω_c qui vérifie :

$$\frac{L\omega_c}{\sqrt{R^2 + 4L^2\omega_c^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \text{donc} \quad \boxed{\omega_c = \frac{R}{2L}}$$

12. Réponse D

$$\arg \underline{u}_L = \arg(-jL\omega) - \arg(R + 2jL\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{2L\omega}{R}$$

On constate que $\underline{u}_L$ est toujours en retard par rapport à e .

13. Réponses A et C

14. Réponse D

On applique le théorème de Gauss sur une surface sphérique Σ de rayon r centrée sur O :

$$\Phi_\Sigma = E(r) \times 4\pi r^2 = \frac{q(r)}{\epsilon_0} \quad \text{donc} \quad \boxed{q(r) = e \left(1 + \frac{r}{a}\right) e^{-r/a}}$$

15. Réponses B et C

Considérons une coquille sphérique située entre deux sphères de rayon r et $r + dr$; la charge élémentaire contenue dans cette coquille a pour expression :

$$\boxed{dq = 4\pi r^2 \rho(r) dr}$$

En dérivant l'expression obtenue à la question précédente pour $q(r)$, on obtient :

$$\boxed{\rho(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dq}{dr} = \frac{-e}{4\pi r a^2} e^{-r/a}}$$

16. Réponse E

La valeur absolue de la charge volumique est une fonction strictement décroissante qui tend vers l'infini pour $r \rightarrow 0$.

17. Réponse D

On applique le théorème de Gauss sur une surface fermée constituée de deux sphères de rayons respectifs r et $r + dr$:

$$E(r + dr) \times 4\pi(r + dr)^2 - E(r)4\pi r^2 = d(E(r) \times 4\pi r^2) = \frac{dq}{\epsilon_0} = \frac{4\pi r^2 \rho'(r) dr}{\epsilon_0}$$

$$\boxed{\rho'(r) = \frac{\epsilon_0}{4\pi r^2} \frac{d(E(r) \times 4\pi r^2)}{dr} = \frac{3e}{4\pi a^3}}$$

18. Réponses B et D

Si le champ est partout nul pour $r > a$, il ne peut y avoir de charges dans le domaine $r > a$; pour s'en convaincre il suffit de considérer qu'au voisinage immédiat d'une charge ponctuel le champ est quasiment celui de la charge et ne peut donc être nul.

L'application du théorème de Gauss sur une sphère de rayon $r = a_+$ indique que la charge contenue dans un tel volume est nulle ; des charges disposées à la surface de la sphère doivent donc compenser la charge en volume :

$$\frac{3e}{4\pi a^3} \times \frac{4\pi a^3}{3} + \sigma \times 4\pi a^2 = 0 \quad \text{donc} \quad \boxed{\sigma = \frac{-e}{4\pi a^2}}$$

19. Réponse A

L'air dans les conditions ambiantes est environ 1000 fois moins dense que l'eau (en réalité plutôt $1,3 \text{ kg.m}^{-3}$)

20. Réponses A et D

Dans un fluide incompressible et pour une orientation de l'axe vers le bas :

$$\boxed{\frac{dP_i}{dz} = \mu_e g} \quad \text{et} \quad \boxed{P_i = P_{a,i} + \mu_e g z}$$

21. Réponses A et C

Calcul du rayon : $\frac{4\pi r^3}{3} = V_0$ donc $r^3 = 3V_0/4\pi \simeq 3 \times 64/(3 \times 4) \simeq 16$ soit $\boxed{r \simeq 2,5 \text{ cm}}$.

Le ludion est à l'équilibre sous l'effet de son poids et de la poussée d'Archimède (avec V_{im} le volume immergé) :

$$mg = \mu_e V_{im} g \quad \text{donc} \quad V_{im} = \frac{m}{\mu_e} = 60 \text{ mL} \quad \text{et} \quad \boxed{V_e = V_0 - V_{im} = 4 \text{ mL}}$$

22. Réponses A et C

Notons déjà qu'avec une augmentation de la pression de 20%, le volume total passe sous les 60 mL et même l'immersion complète du Ludion ne peut assurer son équilibre à la surface.

L'augmentation de la pression au cours de la descente entraîne, à température constante, une diminution du volume, la poussée d'Archimède $\mu_e V_{ballon} g$ va donc diminuer au cours de la descente.

La résultante des forces étant vers le bas (le poids l'emportant sur la poussée d'Archimède), on observe, en l'absence de frottement, une descente accélérée du ludion.

23. Réponse B

On utilise la conservation de la quantité de matière à température constante :

$$V_{ballon} \times (P_{a,1} + \mu_e g h) = V_0 \times P_{a,1} \quad \text{donc} \quad \boxed{V_{ballon} = \frac{V_0 P_{a,1}}{P_{a,1} + \mu_e g h} = \frac{64 \times 1}{1,1} \simeq 58 \text{ mL}}$$

Le volume du ballon étant inférieur au volume de 60 mL nécessaire pour compenser le poids, la poussée d'Archimède reste inférieure au poids et l'objet ne remonte pas.

24. Réponse B

L'équilibre à mi-hauteur impose que la poussée d'Archimède compense le poids ; pour cela on sait que le volume du ballon doit être égal à $V_{im} = 60 \text{ mL}$. En utilisant la conservation de la matière on peut déterminer la pression P_a qu'il faut imposer à la surface :

$$(P_a + \mu_e g \frac{h}{2}) V_{im} = P_0 V_0 \quad \text{donc} \quad P_a = \frac{P_0 V_0 - \frac{\mu_e g h V_{im}}{2}}{V_{im}} = 1,02 \text{ bar} > P_0$$

En toute rigueur l'opérateur doit d'abord appuyer plus fort pour immerger totalement le ludion puis diminuer l'action exercée.

Cette position d'équilibre est instable car si le ludion s'enfonce un peu par rapport à cette position, la pression augmente, le volume du ballon diminue, la poussée d'Archimède diminue et le ballon s'enfonce encore plus et ceci quelle que soit la masse du ludion permettant l'existence de la position d'équilibre.

25. Réponses C et D**26. Réponses A et C**

Pour un objet à l'infini, l'image se forme dans le plan focal image donc $\boxed{f'_{PR} = d}$.

Pour l'objet à distance finie, on utilise la relation de conjugaison avec origine au centre :

$$\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{d} - \frac{1}{-D} = \frac{1}{f'_{PP}} \quad \text{donc} \quad \boxed{f'_{PP} = \frac{dD}{d+D}}$$

27. Réponses A et B

La vergence étant divisée par n , le système est moins convergent ; la nouvelle valeur de $f'_{PP} = 17,6 \times 1,33 \simeq 23 \text{ cm}$ est supérieure à la distance entre le cristallin et la rétine, une image réelle se faisant toujours sur ou au-delà du plan focal image, il ne sera pas possible d'observer des objets nets.

28. Réponses B et D

On considère un rayon issu de A_1 qui frappe le dioptre avec une incidence i_1 et est réfracté avec un angle i_2 tel que $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$.

En se plaçant dans l'approximation de Gauss, $n_1 i_1 = n_2 i_2$ et finalement $\boxed{\frac{\overline{HA_2}}{n_2} = \frac{\overline{HA_1}}{n_1}}$. L'image située avant le dioptre est virtuelle.

29. Réponse B

Il y a deux interface, il faut donc appliquer deux fois la relation précédente ; on appelle H_1 le point tel que $\overline{HH_1} = e$ et A_1 l'image intermédiaire :

$$\star \text{ Interface eau-verre : } \frac{\overline{HA_1}}{n_v} = \frac{\overline{HA}}{n_e}$$

$$\star \text{ Interface verre-air : } \frac{\overline{H_1 A'}}{n_a} = \frac{\overline{H_1 A_1}}{n_v}$$

On combine alors les relations :

$$\overline{HA'} = \overline{HH_1} + \overline{H_1 A'} = e + \frac{\overline{H_1 A_1}}{n_v} = e + \frac{\overline{H_1 H} + \overline{HA_1}}{n_v} = \boxed{e \left(\frac{n_v - 1}{n_v} \right) + \frac{\overline{HA}}{n_e}}$$

30. Réponses B et D

La réflexion totale ne peut se produire que lors du passage vers un milieu plus réfringent, c'est à dire du verre vers l'air.

Pour que l'enfant ne puisse pas voir le poisson, il faut que le rayon touchant le masque au plus bas subisse le phénomène de réflexion totale, les autres rayons plus inclinés par rapport à la normale subiront aussi ce phénomène.

De la seconde loi de Descartes pour la réfraction, on déduit :

$$1 = n_v \sin i_v = n_e \sin i_e \quad \text{donc} \quad \sin i_e = \frac{1}{n_e} = \frac{1}{4/3} = \frac{3}{4} \simeq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

L'angle d'incidence sur le masque doit être d'au moins $\pi/4$ et donc $\boxed{x \simeq 1 \text{ m}}$.

31. Réponses B et C

Au niveau du piston, la pression dans le mercure vaut $P_0 + \mu_{Hg} g H_i = \frac{3}{2} P_0$, l'équilibre mécanique initial

impose $\boxed{P_i = \frac{3}{2} P_0}$.

Lorsque le piston affleure le sommet du cylindre, la colonne de mercure n'est plus présente et la pression finale vaut $\boxed{P_f = P_0}$, d'autre part le volume du gaz a doublé ; l'application de la loi des gaz parfaits permet d'écrire :

$$\frac{P_f V_f}{T_f} = \frac{P_0 \times 2V_0}{T_f} = \frac{P_i V_i}{T_i} = \frac{3P_0 V_0}{2T_i} \quad \text{donc} \quad \boxed{T_f = \frac{4}{3} T_i = 400 \text{ K}}$$

32. Réponse A

Pour un gaz parfait :

$$\Delta U = n \frac{R}{\gamma - 1} (T_f - T_i) = \frac{nRT_i}{3(\gamma - 1)} = \boxed{\frac{P_i V_i}{3(\gamma - 1)}}$$

33. Réponses B et D

Appelons z la hauteur quelconque dont s'élève le piston par rapport à la position initiale :

$$P = P_0 + \mu_{Hg} g (H_i - z)$$

Pour un déplacement de dz , $dP = -\mu_{Hg} g dz$ et $dV = S dz$ donc $\boxed{dP = -\frac{\mu_{Hg} g dV}{S}}$.

Partons de l'expression du travail élémentaire des forces de pression : $\delta W_P = -P dV = \frac{PS dz}{\mu_{Hg} g}$.

On intègre alors de la pression initiale à la pression finale :

$$W_P = \frac{S}{2\mu_{Hg} g} (P_f^2 - P_i^2) = \frac{SH_i}{2\mu_{Hg} g H_i} \left(P_0^2 - \frac{9}{4} P_0^2 \right) = -\frac{5}{4} V_i P_0 = \boxed{-\frac{5}{6} P_i V_i}$$

34. Réponse C

On applique le premier principe au gaz lors de la transformation :

$$\Delta U = \frac{P_i V_i}{3(\gamma - 1)} = W_P + R_{el} I^2 \tau = -\frac{5}{6} P_i V_i + R_{el} I^2 \tau \quad \text{donc} \quad \boxed{\tau = \frac{P_i V_i (5\gamma - 3)}{6 R_{el} I^2 (\gamma - 1)}}$$

35. **Réponses A et C**

L'atmosphère subit une transformation monobare qui réduit son volume de V_i : $W_a = -P_0 \times -V_i = \frac{2p_i V_i}{3}$.

Appliquons le premier principe au mercure : le mercure est isolé thermiquement du gaz et est à la même température que l'atmosphère :

$$\Delta(U_{Hg} + E_p^{Hg}) = \Delta E_p^{Hg} = W_{Hg}$$

La variation d'énergie interne d'un liquide est nulle pour une transformation isotherme.

Pour évaluer ΔE_p il faut considérer que le centre de gravité du mercure s'élève de $H_i/2$ durant la transformation :

$$W_{Hg} = \Delta E_p^{Hg} = \mu_{Hg} V_i g \frac{H_i}{2} = \mu_{Hg} g H_i \frac{V_i}{2} = \frac{P_0}{2} \frac{V_i}{2} = \frac{P_i V_i}{6}$$

36. **Réponse E :**

On considère le système global constitué de l'atmosphère, du mercure et du contenu du cylindre. Pour ce système isolé, la variation d'entropie s'identifie à l'entropie créée.

L'atmosphère en tant que thermostat subit une transformation que l'on peut considérer comme réversible ; pour le mercure assimilé à un liquide incompressible, l'entropie est une simple fonction de la température qui ne varie pas ; enfin pour le gaz parfait :

$$S_c = \Delta S_{gaz} = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) + nR \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) = \frac{P_i V_i}{T_i (\gamma - 1)} \ln \left(\frac{4}{3} \right) + \frac{P_i V_i}{T_i} \ln(2)$$

Remarques et commentaires : cedric.grange@laposte.net