

Centrale PC ; Physique 2 ; 2012. Trajectoires électroniques dans un atome Traitement du rayonnement Zeeman

I - Atome isolé

I.A.
$$k = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$$

I.B. Cf. cours. Principales étapes :

★ Force centrale → conservation du moment cinétique par rapport à O .

★ $\vec{\sigma}_0 \cdot \vec{r} = 0$ et $\vec{\sigma}_0 \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow$ le mouvement a lieu dans le plan perpendiculaire au moment cinétique et passant par O .

I.C. On applique la deuxième loi de Newton à l'électron soumis à l'action de la force électrique exercée par le proton, la projection de cette équation sur la direction radiale donne :

$$m \frac{v^2}{a} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \Leftrightarrow \omega_0^2 = \frac{v^2}{a^2} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3 m} = \boxed{\frac{k}{a^3 m}}$$

I.D. Pour un atome d'hydrogène $a \simeq 10^{-10}$ m, on en déduit :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3 m}} = \sqrt{\frac{(1,6 \times 10^{-19})^2}{4\pi \times 8,85 \times 10^{-12} \times 10^{-30} \times 9,11 \times 10^{-31}}} \simeq \boxed{1,6 \times 10^{16} \text{ rad.s}^{-1}}$$

II - Atome placé dans un champ magnétique extérieur

II.A. Mise en équation

- Dans le référentiel $\mathcal{R}$ galiléen, on applique la deuxième loi de Newton à l'électron soumis à l'attraction du proton et à la force magnétique :

$$m\vec{a} = \vec{F} - e\vec{v} \wedge \vec{B}_1 \Leftrightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{v}$$

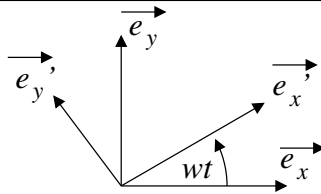
- $\vec{\omega}_1 \wedge \vec{v}$ a la dimension d'une accélération, ω_1 est donc l'inverse d'un temps, une pulsation en $\boxed{\text{rad.s}^{-1}}$
Avec un champ de l'ordre de la dizaine de tesla :

$$\omega_1 = \frac{eB_1}{m} = \frac{1,6 \times 10^{-19} \times 10}{9,11 \times 10^{-31}} \simeq 1,8 \times 10^{12} \text{ rad.s}^{-1}$$

et donc $\boxed{\omega_1/\omega_0 \leq 10^{-4}}$.

II.B. Étude générale

- $\boxed{\vec{e}_x' = \cos(\omega t)\vec{e}_x + \sin(\omega t)\vec{e}_y}; \boxed{\vec{e}_y' = -\sin(\omega t)\vec{e}_x + \cos(\omega t)\vec{e}_y}$



- On dérive les expressions précédentes :

$$\left(\frac{d\vec{e}_x'}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = -\omega \sin(\omega t)\vec{e}_x + \omega \cos(\omega t)\vec{e}_y = \boxed{\vec{\omega} \wedge \vec{e}_x'} \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\vec{e}_y'}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_y'$$

- En utilisant les résultats précédents, on en déduit la formule de composition des vitesses pour un mouvement de rotation autour d'un axe fixe :

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}}$$

- Formule de composition des accélérations :

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM})}$$

- On utilise la formule de la composition des accélérations dans la relation obtenue en **II.A.1** :

$$\vec{a}' + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}) = \frac{\vec{F}}{m} + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{v}$$

$$\begin{aligned}
\vec{a}' &= \frac{\vec{F}}{m} + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{v} - 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}' - \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}) \\
\vec{a}' &= \frac{\vec{F}}{m} + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{v} - 2\vec{\omega} \wedge (\vec{v} - \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}) - \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}) \\
\vec{a}' &= \frac{\vec{F}}{m} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}) + (\vec{\omega}_1 - 2\vec{\omega}) \wedge \vec{v}
\end{aligned}$$

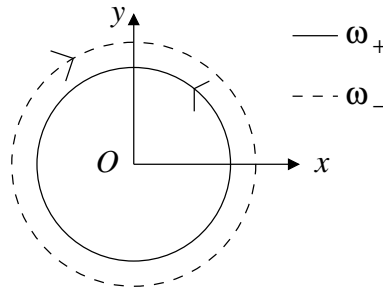
Pour obtenir la formule demandée, il faut poser $\boxed{\vec{\omega}_L = \frac{\vec{\omega}_1}{2}}$.

6. En l'absence de champ magnétique, $\vec{F}/m = \vec{a}$; pour une trajectoire circulaire à la pulsation ω_0 : $a \sim \omega_0^2 OM$; le terme correctif est en $\omega_1^2 OM$; comme $\omega_1 \ll \omega_0$ (**II.A.2**), **le terme correctif est totalement négligeable devant le terme $\vec{F}/m$.**

L'équation du mouvement en présence du champ magnétique est dans le référentiel $\mathcal{R}'$ la même que celle dans le référentiel $\mathcal{R}$ en l'absence de champ magnétique.

7. Dans le référentiel $\mathcal{R}'$, la force $\vec{F}$ conduit à des trajectoires circulaires de pulsation ω_0 ; dans le plan xOy , il y a deux trajectoires circulaires en sens opposé.

Dans $\mathcal{R}$, la trajectoire tournant dans le sens trigonométrique est toujours circulaire mais décrite à la pulsation $\omega_+ = \omega_0 + \omega_1/2$, la trajectoire tournant dans le sens horaire est toujours circulaire mais décrite à la pulsation $\omega_- = \omega_0 - \omega_1/2$.



8. Dans $\mathcal{R}'$ le vecteur position peut s'écrire (avec un choix judicieux de l'origine des temps) :

$$\overrightarrow{OM} = x'(t)\vec{e}_x' + z'(t)\vec{e}_z' = a \cos(\omega_0 t)\vec{e}_x' + a \sin(\omega_0 t)\vec{e}_z'$$

Grâce à la question **II.B.1**, on en déduit l'expression du vecteur position dans $\mathcal{R}$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM} &= a \cos(\omega_0 t) (\cos(\omega_L t)\vec{e}_x + \sin(\omega_L t)\vec{e}_y) + a \sin(\omega_0 t)\vec{e}_z \\
\overrightarrow{OM} &= \frac{a}{2} (\cos([\omega_0 + \omega_L]t) + \cos([\omega_0 - \omega_L]t)) \vec{e}_x + \frac{a}{2} (\sin([\omega_0 + \omega_L]t) - \sin([\omega_0 - \omega_L]t)) \vec{e}_y + a \sin(\omega_0 t)\vec{e}_z
\end{aligned}$$

En regroupant les termes, on peut identifier trois mouvements :

- * $a \sin(\omega_0 t)\vec{e}_z$: mouvement sinusoïdal selon Oz ,
- * $\frac{a}{2} (\cos([\omega_0 + \omega_L]t)) \vec{e}_x + \frac{a}{2} (\sin([\omega_0 + \omega_L]t)) \vec{e}_y$: mouvement circulaire dans le plan (xOy) parcouru dans le sens trigonométrique à la pulsation $\omega_+ = \omega_0 + \omega_L$.
- * $\frac{a}{2} (\cos([\omega_0 - \omega_L]t)) \vec{e}_x - \frac{a}{2} (\sin([\omega_0 - \omega_L]t)) \vec{e}_y$: mouvement circulaire dans le plan (xOy) parcouru dans le sens horaire à la pulsation $\omega_- = \omega_0 - \omega_L$.

9. Dans $\mathcal{R}'$, le moment cinétique $\vec{L}'_O$ se conserve (mouvement à force centrale, Cf. question **II.B.6**), on en déduit :

$$\left(\frac{d\vec{L}'_O}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \underbrace{\left(\frac{d\vec{L}'_O}{dt} \right)_{\mathcal{R}'}}_{=\vec{0}} + \vec{\omega}_L \wedge \vec{L}'_O = \vec{\omega}_L \wedge \vec{L}'_O$$

Dans $\mathcal{R}$, le vecteur moment cinétique $\vec{L}'_O$ a un mouvement de précession à la vitesse angulaire ω_L , c'est à dire qu'il décrit le cône de sommet O faisant l'angle α avec Oz . Dans $\mathcal{R}$, le plan de la trajectoire tourne avec le vecteur moment cinétique.

II.C. Aspect énergétique

1. Variation de l'énergie mécanique :

(a) $\boxed{E_p = -k/r}$.

(b) L'énergie mécanique a pour expression $E_M = -k/2a$ et sachant que $\omega^2 = \frac{k}{a^3 m}$, on en déduit :

$$\boxed{E_M = -\frac{(m\omega^2 k^2)^{1/3}}{2}}$$

(c) Commençons par déterminer a_+ le rayon de l'orbite associée au mouvement en présence du champ magnétique :

$$m\vec{a} = \vec{f} - e\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Ce qui donne en projection sur la direction radiale :

$$\begin{aligned} -m \frac{v_+^2}{a_+} &= -\frac{k}{a_+^2} - ev_+ B \\ m \frac{a_+^2 \omega_+^2}{a_+} &= \frac{k}{a_+^2} + ea_+ \omega_+ B \\ a_+^2 \omega_+^2 &= \frac{k}{a_+ m} + \omega_1 \omega_+ a_+^2 \\ a_+^3 &= \frac{k}{m} \times \frac{1}{\omega_+^2 - \omega_1 \omega_+} \end{aligned}$$

On peut alors calculer la nouvelle valeur de l'énergie mécanique (le calcul est fait à l'ordre 1 en ω_1/ω_0) :

$$\begin{aligned} E_m^+ &= -\frac{k}{a_+} + \frac{1}{2} m \omega_+^2 a_+^2 \\ &= -\frac{k}{2a_+} \left(2 - \frac{\omega_+^2}{\omega_+^2 - \omega_1 \omega_+} \right) \\ &= -\frac{k m^{1/3}}{2 k^{1/3}} (\omega_+^2 - \omega_1 \omega_+)^{1/3} \left(2 - \frac{1}{1 - \omega_1/\omega_+} \right) \\ &= -\frac{k^{2/3} m^{1/3}}{2} \omega_+^{2/3} (1 - \omega_1/\omega_+)^{1/3} \left(2 - \frac{1}{1 - \omega_1/\omega_+} \right) \\ &= -\frac{k^{2/3} m^{1/3}}{2} \omega_0^{2/3} \left(1 + \frac{\omega_1}{2\omega_0} \right)^{2/3} (1 - \omega_1/\omega_+)^{1/3} \left(2 - \frac{1}{1 - \omega_1/\omega_+} \right) \\ &\simeq -\frac{k^{2/3} m^{1/3}}{2} \omega_0^{2/3} \left(1 + \frac{\omega_1}{2\omega_0} \right)^{2/3} (1 - \omega_1/\omega_0)^{1/3} \left(2 - \frac{1}{1 - \omega_1/\omega_0} \right) \\ &\simeq -\frac{k^{2/3} m^{1/3} \omega_0^{2/3}}{2} \left(1 + \frac{\omega_1}{3\omega_0} \right) \left(1 - \frac{\omega_1}{3\omega_0} \right) \left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_0} \right) \\ &\simeq -\frac{k^{2/3} m^{1/3} \omega_0^{2/3}}{2} \left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_0} \right) \\ &\simeq E_M \left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_0} \right) \end{aligned}$$

On en déduit finalement : $\boxed{\frac{\Delta E_M}{E_M} = -\frac{\omega_1}{\omega}}$

Attention que E_M est négative, l'énergie finale est donc plus élevée que l'énergie initiale.

(d) La force magnétique, perpendiculaire à la vitesse, a une puissance nulle ; elle ne peut donc pas contribuer à l'augmentation de l'énergie mécanique.

- (e) **Il ne faut pas oublier de tenir compte du régime transitoire pendant lequel le champ magnétique varie** passant d'une valeur nulle à sa valeur finale; Comme le champ magnétique dépend du temps, il en est de même du potentiel vecteur ce qui contribue à ajouter un terme en $-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ au champ électrique.

2. Étude du régime transitoire :

- (a) Rappelons-nous qu'en régime permanent :

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad \text{et} \quad \text{div} \vec{B} = 0$$

Pour un tube de courant infini et invariant selon Oz , on sait que le champ magnétique est de la forme $\vec{B} = B_\theta(r) \vec{u}_\theta$.

Nous avons ici pour le potentiel vecteur $\vec{A}$:

$$\text{rot} \vec{A} = \vec{B} \quad \text{et} \quad \text{div} \vec{A} = 0$$

De la même façon, comme le champ magnétique est uniforme et dirigé selon Oz , il va générer un potentiel vecteur de la forme $\vec{A} = A_\theta(r) \vec{u}_\theta$.

- (b) En appliquant la transposition du théorème d'Ampère pour le couple $\{\vec{B}, \vec{A}\}$, et en considérant dans le plan xOy un contour de rayon r orienté conforme à $\vec{u}_z$:

$$A(r) \times 2\pi r = B \times 2\pi r^2 \quad \text{donc} \quad \vec{A} = \frac{B(t)r}{2} \vec{u}_\theta$$

- (c) Pour une trajectoire circulaire, vecteur vitesse et vecteur position sont perpendiculaires donc $\sigma = mrv$; comme le moment cinétique est supposé constant, on en déduit $C = rv = cste$.

- (d) Le champ électrique dû à la mise en place du champ magnétique a pour expression :

$$\vec{E}' = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{B'(t)r}{2} \vec{u}_\theta \quad \text{donc} \quad \vec{f}' = -e\vec{E}' = \frac{eB'(t)r}{2} \vec{u}_\theta$$

Le travail infinitésimal reçu par l'électron a pour expression :

$$\delta W = \vec{f}' \cdot d\vec{l} = \frac{eB'(t)r}{2} r d\theta = \frac{e(dB)r}{2} r \frac{d\theta}{dt} = \frac{e(dB)r}{2} v = \frac{e(dB)}{2} C$$

- (e) Il reste alors à intégrer d'un champ nul à un champ de valeur B_1 :

$$W = \int \delta W = \frac{eCB_1}{2}$$

- (f) On peut réécrire l'expression précédente :

$$W = \frac{eB_1}{m} \frac{mC}{2} = \omega_1 \frac{mC}{2}$$

Comme ω_1 est en facteur, on peut se contenter, pour un calcul à l'ordre 1, d'exprimer C à l'ordre 0 :

$$W = \omega_1 \frac{ma^2\omega_0}{2} = \omega_1 \frac{m\omega_0 k^{2/3}}{2m^{2/3}\omega_0^{4/3}} = \frac{\omega_1}{\omega_0} \times \frac{(mk^2\omega_0^2)^{1/3}}{2} = -\frac{\omega_1}{\omega_0} E_M = \Delta E_M$$

On retrouve bien le résultat de la partie précédente.

III - Étude des ondes émises

III.A - Structure de l'onde

1. Expression du champ électrique (attention K/r^3 et non K/r^5 comme proposé dans l'énoncé) :

$$\vec{E}(M, t) = \frac{K}{r^3} \left(p'' \left(t - \frac{r}{c} \right) \vec{e}_z \wedge r \vec{u}_r \right) \wedge r \vec{e}_r = \frac{K}{r} p'' \left(t - \frac{r}{c} \right) \sin \theta \vec{e}_\varphi \wedge \vec{e}_r$$

$$\vec{E}(M, t) = \frac{K}{r} p'' \left(t - \frac{r}{c} \right) \sin \theta \vec{e}_\theta$$

2. L'onde émise en $t - r/c$ qui se propage à la célérité c arrive en r à l'instant t (potentiels retardés).
3. Le proton étant fixe au centre des coordonnées et l'électron étant au point M , on peut déterminer l'expression du dipôle :

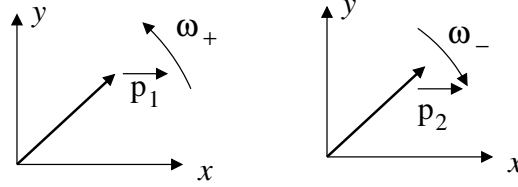
$$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{OM}_i = -e(a \cos(\omega_+ t) + b \cos(\omega_- t)) \vec{e}_x - e(a \sin(\omega_+ t) - b \sin(\omega_- t)) \vec{e}_y - ec \cos(\omega t) \vec{e}_z$$

Expression que l'on peut décomposer en trois termes :

★ $\vec{p}_+ = -ea(\cos(\omega_+ t)\vec{e}_x + \sin(\omega_+ t)\vec{e}_y) = -ea\vec{e}_+$: dipôle tournant dans le plan (xOy) à la pulsation ω_+ dans le sens trigonométrique.

★ $\vec{p}_- = -eb(\cos(\omega_- t)\vec{e}_x - \sin(\omega_- t)\vec{e}_y) = -eb\vec{e}_-$: dipôle tournant dans le plan (xOy) à la pulsation ω_- dans le sens horaire.

★ $\vec{p}_3 = -ec \cos(\omega t)\vec{e}_z$: dipôle oscillant selon la direction Oz à la pulsation ω .



4. Pour le dipôle $\vec{p}_3$ oscillant selon l'axe (Oz) , on peut utiliser le résultat de la question **III.A.1** sachant que pour un point selon $x > 0$ ($\theta = \pi/2$, $\vec{e}_\theta = -\vec{e}_z$) :

$$\vec{E}_3(M_1, t) = \frac{K}{r} ec \cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \vec{e}_z$$

Pour le dipôle $\vec{p}_+$:

$$\vec{E}_+(M_1, t) = \frac{K}{r} (ea\omega_+^2 \vec{e}_+(t - r/c) \wedge \vec{e}_x) \wedge \vec{e}_x = -\frac{Kea\omega_+^2}{r} \sin(\omega_+(t - r/c)) \vec{e}_z \wedge \vec{e}_x$$

$$\vec{E}_+(M_1, t) = -\frac{Kea\omega_+^2}{r} \sin(\omega_+(t - r/c)) \vec{e}_y$$

Pour le dipôle $\vec{p}_-$:

$$\vec{E}_-(M_1, t) = \frac{K}{r} (eb\omega_-^2 \vec{e}_-(t - r/c) \wedge \vec{e}_x) \wedge \vec{e}_x = \frac{Keb\omega_-^2}{r} \sin(\omega_-(t - r/c)) \vec{e}_z \wedge \vec{e}_x$$

$$\vec{E}_-(M_1, t) = \frac{Keb\omega_-^2}{r} \sin(\omega_-(t - r/c)) \vec{e}_y$$

Le champ est la superposition de trois champs de polarisation rectiligne :

- ★ $\vec{E}_3$ champ oscillant à la pulsation ω selon Oz ,
- ★ $\vec{E}_+$ champ oscillant à la pulsation ω_+ selon Oy ,
- ★ $\vec{E}_-$ champ oscillant à la pulsation ω_- selon Oy .

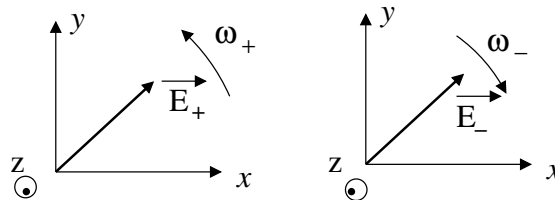
5. Pour $z > 0$ ($\theta = 0$), le champ électrique rayonné par le dipôle p_3 oscillant selon Oz est nul.

Pour le dipôle $\vec{p}_+$:

$$\vec{E}_+(M, t) = \frac{K}{r} (ea\omega_+^2 \vec{e}_+(t - r/c) \wedge \vec{e}_z) \wedge \vec{e}_z = -\frac{Kea\omega_+^2}{r} \vec{e}_+(t - r/c)$$

Le dipôle $\vec{p}_+$ crée donc une onde circulaire gauche de pulsation ω_+ .

On montre de même que le dipôle $\vec{p}_-$ crée donc une onde circulaire droite de pulsation ω_- .



6. Étude du spectre d'émission :

(a) L'observation se faisant dans un plan perpendiculaire au champ magnétique, on peut utiliser les résultats de la question **III.A.4**.

★ Pour un atome donné, on sait que **le champ rayonné est la superposition de trois champs de pulsation ω_0 , ω_+ et ω_-** , ce qui explique la présence d'un triplet.

★ Pour expliquer la présence de deux triplets légèrement décalés (1 par atome), on peut invoquer le fait que les noyaux des deux atomes n'ont pas la même masse ; dans le cadre d'un traitement plus complet (problème à deux corps), la masse réduite des deux systèmes est différente ce qui modifie légèrement la pulsation de l'oscillateur.

- (b) Entre l'onde émise à ω_+ et celle émise à ω_- , on a :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\omega_+ - \omega_-}{\omega_0} = \frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{eB_1}{m\omega_0}$$

De manière générale pour une onde de pulsation ω et de longueur d'onde λ :

$$\omega\lambda = 2\pi c \quad \text{donc} \quad \frac{d\lambda}{\lambda} = -\frac{d\omega}{\omega}$$

On en déduit (en valeur absolue) :

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{eB_1}{m\omega_0} \quad \text{donc} \quad \boxed{B_1 = \frac{2\pi mc\Delta\lambda}{\lambda_0^2 e}}$$

Application numérique :

$$B_1 = \frac{2\pi \times 9,1 \times 10^{-31} \times 3 \times 10^8 \times 7 \times 10^{-11}}{(656,1 \times 10^{-9})^2 \times 1,6 \times 10^{-19}} = \boxed{1,7 \text{ T}}$$

III.B - Étude d'un polarimètre

1. Paramètres de Stokes :

- (a) Pour l'onde proposée : $\underline{A} = E_0 \cos \alpha$ et $\underline{B} = E_0 \sin \alpha$; on détermine alors les paramètres de Stokes :

$$\boxed{(I, Q, U, V) = (E_0^2, E_0^2 \cos 2\alpha, E_0^2 \sin 2\alpha, 0)}$$

- (b) Pour une onde circulaire droite : $\underline{A} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$ et $\underline{B} = i\frac{E_0}{\sqrt{2}}$:

$$\star \boxed{(I, Q, U, V) = (E_0^2, 0, 0, -E_0^2)}$$

- (c) On constate que ces paramètres sont compatibles avec $\underline{A} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$ et $\underline{B} = -i\frac{E_0}{\sqrt{2}}$, c'est à dire une onde de polarisation circulaire gauche.

2. Dispositif de lames à retard :

- (a) Avec l'axe lent selon Ox et $\varphi_1 > 0$: $\boxed{\vec{E}_1 = (\underline{A}e^{-i\varphi_1}, \underline{B}, 0)}$.

- (b) On projette tout d'abord le champ $\vec{E}_1$ sur la nouvelle base :

$$\vec{E}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} (\underline{A}e^{-i\varphi_1} + \underline{B}, \underline{B} - \underline{A}e^{-i\varphi_1}, 0)$$

L'onde traverse alors la lame L_2 ; en sortie de cette lame :

$$\boxed{\vec{E}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} ([\underline{A}e^{-i\varphi_1} + \underline{B}] e^{-i\varphi_2}, \underline{B} - \underline{A}e^{-i\varphi_1}, 0)}$$

- (c) Après projection sur la direction du polariseur :

$$\vec{E}_P = \frac{1}{2} [\underline{A}e^{-i\varphi_1} (1 + e^{-i\varphi_2}) + \underline{B} (e^{-i\varphi_2} - 1)] \vec{e}_x$$

L'intensité lumineuse en sortie du polariseur est proportionnelle à $\underline{E}_P \underline{E}_P^*$:

$$I_P \sim \underline{A}\underline{A}^* (1 + e^{-i\varphi_2}) (1 + e^{i\varphi_2}) + \underline{B}\underline{B}^* (1 - e^{-i\varphi_2}) (1 - e^{i\varphi_2}) + 2\text{Re} [\underline{A}e^{-i\varphi_1} (1 + e^{-i\varphi_2}) \underline{B}^* (e^{i\varphi_2} - 1)]$$

$$I_P \sim 2\underline{A}\underline{A}^* (1 + \cos \varphi_2) + 2\underline{B}\underline{B}^* (1 - \cos \varphi_2) + 2\text{Re} (2\underline{A}\underline{B}^* e^{-i\varphi_1} i \sin \varphi_2)$$

$$I_P \sim (\underline{A}\underline{A}^* + \underline{B}\underline{B}^*) + (\underline{A}\underline{A}^* - \underline{B}\underline{B}^*) \cos \varphi_2 + \text{Re} (2\underline{A}\underline{B}^* (\cos \varphi_1 - i \sin \varphi_1) i \sin \varphi_2)$$

Pour simplifier le dernier terme, posons $\underline{z} = \underline{A}\underline{B}^*$ et remarquons que : $2\underline{z} = \underline{z} + \underline{z}^* + (\underline{z} - \underline{z}^*)$:

$$\text{Re} (2\underline{z} (\cos \varphi_1 - i \sin \varphi_1) i \sin \varphi_2) =$$

$$\text{Re} ((\underline{z} + \underline{z}^*) (\cos \varphi_1 - i \sin \varphi_1) i \sin \varphi_2) + \text{Re} (i (\underline{z} - \underline{z}^*) (\cos \varphi_1 - i \sin \varphi_1) \sin \varphi_2)$$

Comme $\underline{z} + \underline{z}^*$ est un nombre réel, le premier terme vaut :

$$(\underline{z} + \underline{z}^*) \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 = (\underline{A}\underline{B}^* + \underline{A}^*\underline{B}) \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 = U \sin \varphi_1 \sin \varphi_2$$

Comme $i (\underline{z} - \underline{z}^*)$ est un nombre réel, le second terme vaut :

$$i (\underline{z} - \underline{z}^*) \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 = i (\underline{A}\underline{B}^* - \underline{A}^*\underline{B}) \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 = -i (\underline{A}^*\underline{B} - \underline{A}\underline{B}^*) \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 = -V \cos \varphi_1 \sin \varphi_2$$

On regroupe tous les termes pour en déduire l'expression proposée :

$$\boxed{I_P \sim I + Q \cos \varphi_2 + U \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 - V \cos \varphi_1 \sin \varphi_2}$$

- (d) Pour les différents couples :

$$\star \boxed{I_P(0, 0) = K' (I + Q)} ; \boxed{I_P(0, \pi) = K' (I - Q)}$$

$$\star \boxed{I_P(0, \pi/2) = K'(I - V)}; \boxed{I_P(0, 3\pi/2) = K'(I + V)}$$

$$\star \boxed{I_P(\pi/2, \pi/2) = K'(I + U)}; \boxed{I_P(\pi/2, 3\pi/2) = K'(I - U)}$$

En réglant astucieusement le polarimètre, on peut donc accéder aux quatre paramètres de Stokes et donc à la structure de l'onde.

III.C - Étude d'un polarimètre

1. Résolution spectrale et polarisation :

★ D'après la figure 3 de l'énoncé, on considère l'observation dans la direction z , c'est à dire celle du champ magnétique; dans cette situation (Cf. **III.A.5**), le champ rayonné est la superposition d'une circulaire gauche de polarisation ω_+ et d'une circulaire droite de polarisation ω_- .

★ D'après la partie **III.B.1**, on sait que les paramètres de Stokes sont $I = -V = E_0^2$ pour une circulaire droite et $I = V = E_0^2$ pour une circulaire gauche.

★ D'après la figure 4, si on s'intéresse simplement au profil I (c'est à dire l'intensité) identique pour les deux ondes, il n'est pas possible de résoudre les deux pics, la largeur $2\Delta\lambda$ des pics étant comparable à leur décalage $2\Delta\lambda_B$.

★ Avec le réglage du polarimètre en $I - V$, on ne conserve que la circulaire droite; avec le réglage en $I + V$, on ne conserve que la circulaire gauche; les deux raies sont alors résolues et leur décalage $2\Delta\lambda_B$ donne accès à la valeur du champ magnétique.

Remarque : si $I - V$ laisse apparaître la circulaire droite de pulsation $\omega_- < \omega_+$, le pic devrait se situer pour la longueur d'onde la plus élevée, ce qui n'est pas le cas sur la figure proposée.

2. Orientation du champ magnétique :

★ La direction de $B_{1\parallel}$ est alignée avec celle de la ligne de visée, les ondes reçues sont circulaires droite et gauche.

★ La direction de $B_{1\perp}$ est perpendiculaire à la ligne de visée, les ondes reçues ont toutes trois une polarisation rectiligne (Cf. **III.A.4**) :

* une oscillation selon Ox à la pulsation ω faisant apparaître les paramètres de Stokes I et Q .

* deux oscillations selon Oy à la pulsation ω_+ et ω_- faisant apparaître les paramètres de Stokes I et U .

En réglant le polarimètre selon les configurations $I + V$ et $I - V$, on peut accéder à V , c'est à dire aux caractéristiques des circulaires droite et gauche et donc à $B_{1\parallel}$.

En réglant le polarimètre selon les configurations $I + Q$ et $I - Q$ ou $(I + U$ et $I - U)$, on peut accéder à U et Q , c'est à dire aux caractéristiques des ondes polarisées rectilignes et donc *a priori* à $B_{1\perp}$.

Le polarimètre permet d'accéder à la direction du champ magnétique en plus de connaître son intensité.