

De la terre à la lune

D'après Concours centrale TSI 2012

I/ De la terre

I-A- Décollage

I-A-1- Choix du référentiel

a- Définitions :

► «Le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$: Son origine un point O quelconque de la terre et ces axes sont fixes par rapport à la terre.»

► «Le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_G$: Son origine est le barycentre G de la terre, le plan (xoy) forme le plan équatorial, l'axe oz se dirige vers le nord géographique; en translation par rapport au référentiel de Copérnic .»

b- Un référentiel est galiléen s'il obéit à la première loi de Newton (dite aussi principe d'inertie :

«Dans un référentiel $\mathcal{R}$ si un point matériel M isolé ou pseudo isolé et son mouvement par rapport à ce référentiel $\mathcal{R}$ est rectiligne uniforme ($\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{cte}$); alors ce référentiel est galiléen.»

c- Puisque la durée de l'expérience $\Delta t \ll T$ la période de révolution de la terre autour du soleil ($T = 1$ année); alors le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_G$ est galiléen

I-A-2- Influence de la base de lancement

a- La nature de la trajectoire d'un point B à la surface de la Terre : Trajectoire circulaire de rayon

$$r = R_T \cos \lambda$$

b- L'expression du module v_B de sa vitesse :

$$v_B = r\Omega \implies v_B = R_T \Omega \cos \lambda$$

c- Application numérique :

Cap canaveral (E.U.A)	Kourou en Guyane (France)
$\lambda_1 = 28,5^\circ$	$\lambda_2 = 5,2^\circ$
$v_{B1} = 408,74 \text{ m/s}$	$v_{B2} = 463,19 \text{ m/s}$

d- L'expression de la variation d'énergie cinétique :

Par rapport à $\mathcal{R}_G$ on a :

► $E_c(F) = \frac{1}{2} m_F v_0^2$

$$\blacktriangleright E_c(\text{initiale}) = \frac{1}{2} m_F \vec{V}^2(F/\mathcal{R}_G) = \frac{1}{2} m_F \vec{V}_B^2$$

Ce qui donne

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m_F (v_o^2 - v_B^2)$$

e- L'économie relative

$$E_r = \frac{\Delta E_{c1} - \Delta E_{c2}}{\Delta E_{c1}} = \frac{v_{B2}^2 - v_{B1}^2}{v_o^2 - v_{B1}^2} \xrightarrow{\text{A.N}} E_r = 7,44.10^{-4}$$

Commentaire : Pour lancer la fusée de Cap Canaveral nécessite plus d'énergie cinétique (plus de vitesse initiale) que celle de Kourou en guyane.

f- Autres avantages :

- $\blacktriangleright$ L'île de guyane est moins peuplée (afin de diminuer les dégâts en cas d'explosion de la fusée).
- $\blacktriangleright$ La station de Kourou présente une grande ouverture sur l'océan atlantique.
- $\blacktriangleright$ Pas de tremblement de terre , pas de cyclones, ainsi une stabilité politique.

Extrait de l'encyclopédie électronique wikipedia.org

I-B- Orbite circulaire

I-B-1- Généralités

a- L'expression de la force gravitationnelle :

$$\vec{F}_G = -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r$$

Avec $\vec{e}_r = \frac{\vec{OM}}{r}$

b- L'expression de la force électrique :

$$\vec{F}_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e}_r$$

c- Le théorème de Gauss de l'électrostatique :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E}(M).d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

d- Le théorème de Gauss gravitationnel

$$\oiint_{\Sigma} \vec{G}(M).d\vec{S} = -4\pi\mathcal{G}M_{int}$$

L'expression du champ gravitationnel

$$\vec{G}(M) = -4\pi\mathcal{G} \iiint_{V(\Sigma)} \frac{\mu(M)}{r^2} d\tau \frac{\vec{OM}}{r}$$

I-B-2- Champ gravitationnel terrestre

a- Symétrie sphérique : $\Rightarrow \vec{G}(M) = G(M)\vec{e}_r$ c'est à dire radiale.

b- Symétrie sphérique : $\Rightarrow G(M) = G(r, \theta, \varphi) = G(r)$

c- L'expression de $\vec{G}(M)$ à l'extérieur de la terre $r > R_T$

Comme : $\oint \vec{G}(M) \cdot d\vec{S} = G(r) \cdot 4\pi r^2$

Ainsi $M_{int} = m_T$ alors le théorème de Gauss gravitationnel donne :

$$\vec{G}(M) = -\frac{Gm_T}{r^2}\vec{e}_r$$

d- Module g_T à la surface de la Terre :

A la surface de la terre on a : $r = R_T$ ce qui donne

$$\vec{G}(R_T) = -\frac{Gm_T}{R_T^2}\vec{e}_r \Rightarrow g_T = \|\vec{G}(R_T)\| = \frac{Gm_T}{R_T^2} \xrightarrow{\text{A.N}} g_T = 9,827 \text{ m.s}^{-2}$$

e- Justification : Si on néglige l'action des autres planètes sur le satellite vu la distance très grande par rapport à celle de la terre alors le satellite est soumis uniquement à la seule action de la terre et donc

$$\vec{F} = -G\frac{m_F m_T}{r^3} \vec{T\vec{M}}$$

I-B-3- Mouvement d'un satellite

a- L'expression de l'énergie potentielle E_{po}

$$E_{po} = -\frac{Gm_F m_T}{r^2} (< 0)$$

b- Planéité de la trajectoire :

Par application du T.M.C en T centre de la terre et remarquons la force $\vec{F}$ est centrale alors :

$\vec{\sigma}_{oT} = \vec{T\vec{M}} \wedge m_F \vec{V}$ et $\frac{d\vec{\sigma}_{oT}}{dt/\mathcal{R}} = \vec{M}_T(\vec{F}) = \vec{0}$ ce qui donne que

$$\vec{\sigma}_{oT} = \vec{T\vec{M}} \wedge m_F \vec{V} = c\vec{te}$$

Donc la trajectoire est plane.

► La trajectoire est une ellipse.

c- Mouvement circulaire :

Projetons la RFD dans le repère de Frenet : $G\frac{m_F m_T}{r^2} = m_F \frac{V_o^2}{r}$ ce qui donne :

► Pour la vitesse

$$V_o = \sqrt{\frac{Gm_T}{r}}$$

► Pour l'énergie cinétique

$$E_{co} = \frac{1}{2} m_F V_o^2 = \frac{1}{2} \frac{Gm_T m_F}{r} = -\frac{1}{2} E_{po}$$

d- On a le mouvement est circulaire de périmètre $2\pi r$ alors $T_o = \frac{2\pi r}{V_o} = \frac{2\pi}{\omega_o}$
remplaçant V_o par sa valeur on obtient :

$$T_o = 2\pi r \sqrt{\frac{r}{\mathcal{G}m_T}} \Rightarrow \frac{T_o^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}m_T}$$

C'est la troisième loi de Kepler

e- Application numérique :

$$V_o = 7918,07 \text{ ms}^{-1} ; T_o = 5062,7 \text{ (s)} = 1,406 \text{ (h)}$$

f- L'expression de l'énergie mécanique E_{mo} :

On a $E_{mo} = E_{co} + E_{po} = \frac{1}{2}E_{po}$ donc

$$E_{mo} = -\frac{\mathcal{G}m_F m_T}{2r} \Rightarrow k = \mathcal{G}m_F m_T$$

II / A la lune

II-A- Objectif Lune

II-A-1- Orbite de transfert

a- L'énergie mécanique E_{m1} de la fusée :

On a : $E_{m1} = -\frac{k}{2a}$ avec $2a = d_{TL}$ donc

$$E_{m1} = -\frac{k}{d_{TL}}$$

b- L'expression de la vitesse v_1 :

On a : $E_{m1} = \frac{1}{2}m_F v_1^2 - \frac{\mathcal{G}m_T m_F}{R_T} = -\frac{\mathcal{G}m_T m_F}{d_{TL}}$ ce qui donne

$$v_1 = \sqrt{2\mathcal{G}m_T \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{d_{TL}} \right)}$$

Application numérique :

$$v_1 = 11103,45 \text{ m/s}$$

c- La terre est placée au foyer de l'ellipse.

On allume les moteurs lorsque la fusée, la terre, la fusée et la lune sont alignées.

d- la durée t_1 du transfert :

On a : $t_1 = \frac{1}{2}T$, avec $T = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{\mathcal{G}m_T}}$ ainsi $a = \frac{1}{2}d_{TL}$ ce qui donne

$$t_1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{d_{TL}^3}{2\mathcal{G}m_T}} \xrightarrow{\text{A.N}} t_1 = 411386,73 \text{ s} = 114,274 \text{ h}$$

II-A-2- Orbite lunaire

a- Il faut freiner par ce que la fusée possède une énergie supplémentaire qui lui permet de faire son retour à la terre.

b- Détermination numérique v_2 :

On a :

$$v_2 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}m_L}{R_L}} \xrightarrow{\text{A.N}} v_2 = 1678,12 \text{ m/s}$$

Si on compare v_1 et v_2 on trouve que $v_1 > v_2$ c'est à dire il faut freiner.

II-B- Déplacements sur la Lune

II-B-1- Caractéristiques du sol lunaire

a- Le module du champ gravitationnel lunaire g_L à la surface de la Lune :

On a : $g_L = \frac{\mathcal{G}m_L}{R_L^2}$ or $g_T = \frac{\mathcal{G}m_T}{R_T^2}$ ce qui donne

$$g_L = \frac{m_L R_T^2}{m_T R_L^2} g_T \xrightarrow{\text{A.N}} g_L = 1,618 \text{ m/s}^2$$

b- La détente sur la Lune :

On applique le théorème de l'énergie cinétique :

► Sur terre : $v_o^2 = 2g_T h_T$

► Sur lune : $v_o^2 = 2g_L h_L$

Ce qui donne

$$h_L = \frac{g_T}{g_L} h_T \xrightarrow{\text{A.N}} h_L = 6,072 \text{ m}$$

c- On a : $z(x) = A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right)$ et $x = vt$ ce qui donne

$$z(t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} vt\right) \Rightarrow \omega = \frac{2\pi v}{\lambda}$$

d- Déterminer la valeur maximale de A qui assure le maintien du véhicule au sol :

Appliquons la RFD sur la masse m_R qu'on projette sur oz :

Notons R le module de la réaction du sol sur la masse :

$m_R \ddot{z} = -m_R \omega^2 A \cos \omega t = R - m_R g_L \Rightarrow R = m_R (g_L - A \omega^2 \cos \omega t) \geq 0 (\forall t \geq 0)$ ce qui donne

$$\omega^2 A \leq g_L \Rightarrow A_{\max} = \frac{g_L}{\omega^2} = \frac{g_L \lambda^2}{4\pi^2 v^2}$$

e- Application numérique :

$$A_{\max} = 2,71 \text{ mm}$$

Valeur très faible devant λ

II-B-2- Rover lunaire

a- l'allongement Δl du ressort au repos :

$$k\Delta l = m_R g_L \Rightarrow \Delta l = \frac{m_R g_L}{k}$$

b- Application du principe fondamental de la dynamique à la masse m_R :

$$m_R \ddot{z} = -\beta(\dot{z} - \dot{z}_o) - k(z - z_o) \Rightarrow m_R \ddot{z} + \beta \dot{z} + kz = \beta \dot{z}_o + kz_o$$

En posant

$$\omega_1 = \frac{\beta}{m_R} \quad \text{et} \quad \omega_o = \sqrt{\frac{k}{m_R}}$$

On obtient :

$$\ddot{z} + \omega_1 \dot{z} + \omega_o^2 z = \omega_1 \dot{z}_o + \omega_o^2 z_o \quad (E)$$

Il en résulte que

$$f(t) = \omega_1 \dot{z}_o + \omega_o^2 z_o = \omega_o^2 A \cos \omega t - \omega_1 A \omega \sin \omega t$$

c- L'amplitude complexe du mouvement du point G :

En notation complexe on a :

$$\underline{z} = \underline{Z} e^{j\omega t} \quad \underline{z}_o = \underline{Z}_o e^{j\omega t}$$

L'équation (E) donne :

$$-\omega^2 \underline{z} + j\omega \omega_1 \underline{z} + \omega_o^2 \underline{z} = j\omega \omega_1 \underline{z}_o + \omega_o^2 \underline{z}_o \Rightarrow \underline{z}(\omega_o^2 - \omega^2 + j\omega \omega_1) = (\omega_o^2 + j\omega \omega_1) \underline{z}_o$$

Ce qui donne :

$$\underline{H} = \frac{\underline{z}}{\underline{z}_o} = \frac{\omega_o^2 + j\omega \omega_1}{\omega_o^2 - \omega^2 + j\omega \omega_1} \Rightarrow \underline{H} = \frac{1 + j \frac{\omega \omega_1}{\omega_o^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_o^2} + j \frac{\omega \omega_1}{\omega_o^2}}$$

d- Pour k suffisamment faible alors $\omega_o \rightsquigarrow 0$ ce qui donne de l'équation (E)

$$\ddot{z} + \omega_1 \dot{z} = \omega_1 \dot{z}_o \Rightarrow \underline{H} = \frac{j\omega \omega_1}{-\omega^2 + j\omega \omega_1} = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_1}}$$

L'expression de la pulsation de coupure :

$$\omega_c = \omega_1 = \frac{\beta}{m_R}$$

e- La valeur de β : sachant que pour $\omega = \omega_c$ on a :

$$\omega = \frac{2\pi v}{\lambda} = \frac{\beta}{m_R} \Rightarrow \beta = \frac{2\pi v m_R}{\lambda} \xrightarrow{\text{A.N}} \beta = 17104,23 \text{ N.m}^{-1} \cdot \text{s}$$

f- L'ordre de grandeur de k :

Puisque $\omega_1 = \omega \gg \omega_o$ alors on prend $\omega = 10\omega_o$ (négligé avec un rapport de 10 utilisé en chimie) ce qui donne :

$$\omega = 10\omega_o \implies k \approx \frac{m_R \omega^2}{100} \xrightarrow{\text{A.N}} k \approx 4179 \text{ N/m}$$

Le rôle du ressort : permet d'avoir des oscillations au voisinage de la position d'équilibre stable $z = 0$

g- Le comportement de ce véhicule sur un terrain de même nature, à la surface de la Terre : Puisque l'influence entre la terre et la lune se fait par g alors uniquement l'allongement à l'équilibre qui va varier par contre l'étude dynamique est sans influence.