

PARTIE A: Détection d'onde électromagnétiqueI) Le capteur:

I-1-a) $\vec{k} = k \vec{u}_x = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}_x$ (l' longueur d'onde)

$k + \vec{u}_x$ car l'onde se propage selon l'axe (Ox) dans le sens des x croissants.

I-1-b) $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{cT} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{\omega}{c} \Rightarrow \boxed{k = \frac{\omega}{c}}$

(relation de dispersion d'une OPPM dans le vide)

I-1-c) polarisation rectiligne selon (Oy) $\Rightarrow \vec{E} \propto \vec{u}_y$

* pulsation ω
 propagation selon $+\vec{u}_x$ $\Rightarrow \omega t - kx + \varphi$
 à $t=0$, en $x=0$, $\varphi = \varphi_0 = 0$

* amplitude E_0

$$\Rightarrow \vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y$$

$$\text{or } \omega = kc$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = E_0 \cos[k(ct-x)] \vec{u}_y}$$

OPPM dans le vide $\Rightarrow \vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}}{c}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{E_0}{c} \cos[k(ct-x)] \vec{u}_z}$$

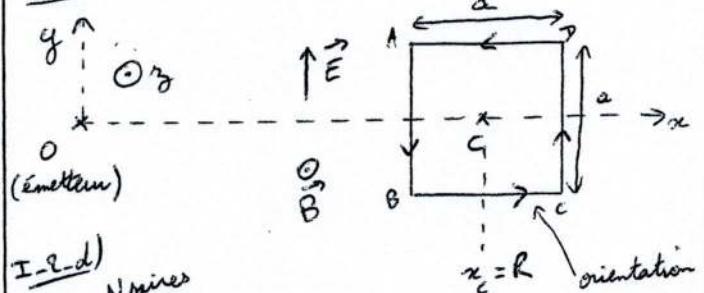
I-2-a) Le récepteur est un conducteur immobile placé dans un champ magnétique variable dans le temps. Il est donc le siège d'un phénomène d'induction de Neumann. Une force électromotrice induite va apparaître dans le cadre. Cette fem est évidemment liée à l'onde électromagnétique.

I-2-b) Pour une réception optimale, il faut que le flux magnétique soit maximum (cf loi de Faraday).

$$\text{or } \vec{B} \propto \vec{u}_z \Rightarrow \text{il faut } \vec{S} \propto \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta = \frac{\pi}{2}}$$

I-2-c)



I-2-d)

$\phi = N \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = N \iint_S B \vec{u}_z \cdot (+dx dy \vec{u}_z)$
 orientation

$$\phi = Na \int_{R-\frac{a}{2}}^{R+\frac{a}{2}} \frac{E_0}{c} \cos[k(ct-x)] dx$$

$$\phi = \frac{Na E_0}{c k} \left[-\sin[k(ct-x)] \right]_{R-\frac{a}{2}}^{R+\frac{a}{2}}$$

$$\phi = \frac{Na E_0}{c k} \left(\sin[k(ct-R+\frac{a}{2})] - \sin[k(ct-R-\frac{a}{2})] \right)$$

$$\text{or } \sin(a+b) - \sin(a-b) = 2 \sin b \cos a$$

$$\Rightarrow \phi = N \frac{2a E_0}{c k} \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \cos[k(ct-R)]$$

loi de Faraday: $u = - \frac{d\phi}{dt}$

$$\Rightarrow u = N \frac{2a E_0}{c k} \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \sin(kct - kR)$$

$$\Rightarrow u = A \sin(\gamma t + \psi)$$

$$\text{avec } \boxed{A = 2Na E_0 \sin\left(\frac{ka}{2}\right)}$$

$$\gamma = kc$$

$$\psi = -kR$$

Autre méthode: dans le cas de l'induction de Neumann

$$\mathcal{U} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_B^C \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_C^D \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_D^A \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$= \left(-a E \left(x=R-\frac{a}{2} \right) + a E \left(x=R+\frac{a}{2} \right) \right) \times \underset{\substack{\uparrow \\ N \text{ spires}}}{N}$$

$$\mathcal{U} = N a E_0 \left(\cos \left(k c t - k R - k \frac{a}{2} \right) - \cos \left(k c t - k R + k \frac{a}{2} \right) \right)$$

or $\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2 \sin a \sin b$

$$\Rightarrow \mathcal{U} = 2 N a E_0 \sin \left(\frac{k a}{2} \right) \sin \left(k c t - k R \right)$$

CQFD

I-2-e) $U = \frac{\mathcal{U}_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{A}{\sqrt{2}}$

$$U = N a E_0 \sqrt{2} \sin \left(\frac{k a}{2} \right)$$

I-3) $k a = 3,4 \cdot 10^{-4} \ll 1$

$$\Rightarrow \sin \frac{k a}{2} \simeq \frac{k a}{2}$$

$$\Rightarrow U = \frac{N k a^2 E_0}{\sqrt{2}}$$

I-4/a) $\vec{B}(R) = \frac{E_0}{c} \cos(k c t - k R) \vec{u}_y$

$$\vec{B}\left(R-\frac{a}{2}\right) = \frac{E_0}{c} \cos \left(k c t - k R + k \frac{a}{2} \right) \vec{u}_y$$

$$\vec{B}\left(R+\frac{a}{2}\right) = \frac{E_0}{c} \cos \left(k c t - k R - k \frac{a}{2} \right) \vec{u}_y$$

or $\frac{k a}{2} \ll 1$

$$\Rightarrow \vec{B}(R) \simeq \vec{B}\left(R-\frac{a}{2}\right) \simeq \vec{B}\left(R+\frac{a}{2}\right)$$

D'autre part, on identifie à $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t + \varphi) \vec{u}_y$

$$\Rightarrow k c = \omega \quad \text{OK!!}$$

$$\varphi = -k R$$

I-4-b) on identifie:

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = 1 \cdot 10^{-11} \text{ T}$$

I-4-c) $\phi = \underset{\substack{\uparrow \\ N \text{ spires}}}{N} \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = N B_0 \cos(\omega t + \varphi) a^2$

$$\mathcal{U} = - \frac{d\phi}{dt} = + N B_0 a^2 \omega \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\mathcal{U} = N B_0 a^2 \omega \sin(\omega t + \varphi) = N \frac{E_0}{c} a^2 k c \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\mathcal{U} = N k a^2 E_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$U = \frac{\mathcal{U}_{\max}}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow U = \frac{N B_0 a^2 \omega}{\sqrt{2}} = \frac{N k a^2 E_0}{\sqrt{2}}$$

I-4-d) $U = 7 \cdot 10^{-5} \text{ V}$

I-5-a) $\vec{\Pi}(R) = \frac{\vec{E}(R) \wedge \vec{B}(R)}{\mu_0}$

$$\Rightarrow \vec{\Pi} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2[k(c t - R)] \vec{u}_x$$

$\alpha + \vec{u}_x$
OK!!

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2}{2 \mu_0 c} \vec{u}_x = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 \vec{u}_x$$

$\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$

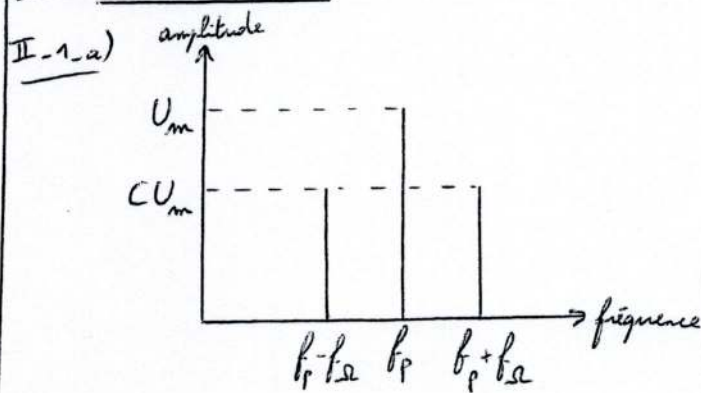
I-5-b) P_e se retrouve être la puissance rayonnée (moyenne) à travers toute sphère de centre O, car il n'y a pas d'absorption, et l'émission rayonne de manière isotrope.

$$\Rightarrow P_e = \langle \Pi(R) \rangle \times 4\pi R^2$$

$$P_e = 2\pi R^2 \epsilon_0 c E_0^2$$

II) Filtrage d'une onde modulée en amplitude:

II-1) Tension modulée:



II-1-b)

$$u_e(t) = U_m \cos \omega_p t + U_m C \left(\cos \omega_p t \cos \Omega t - \sin \omega_p t \sin \Omega t \right) + U_m C \left(\cos \omega_p t \cos \Omega t + \sin \omega_p t \sin \Omega t \right)$$

$$u_e(t) = U_m \cos \omega_p t \left(1 + 2C \cos \Omega t \right)$$

$$u_e(t) = A(t) \cos \omega_p t \text{ avec } A(t) = U_m (1 + m \cos \Omega t)$$

$$\text{et } m = 2C$$

II-2) Etude du filtre:

$$\underline{H} = \frac{G_0}{1 + jQ \left(\pi - \frac{1}{\pi} \right)}$$

II-2-a) HF: $\pi \gg 1$ $\underline{H} = \frac{G_0}{1 + jQ \left(\pi - \frac{1}{\pi} \right)}$

$$\underline{H} = \frac{G_0}{jQ\pi} \quad |\underline{H}| = \frac{G_0}{Q\pi} \quad G = 20 \log |\underline{H}|$$

$$\Rightarrow G = 20 \log \frac{G_0}{Q} - 20 \log \pi$$

↑
pente -20 dB/décade

II-2-b) BF: $\pi \ll 1$ $\underline{H} = \frac{G_0}{1 + jQ \left(\pi - \frac{1}{\pi} \right)} = j \frac{G_0 \cdot \pi}{Q}$

$$G = 20 \log \frac{G_0}{Q} + 20 \log \pi$$

II-2-c) $\pi = 1$: $|\underline{H}| = G_0 \Rightarrow G = 20 \log G_0 = 20$ ($G_0 = 10$)

II-2-d) intersection des asymptotes:

$$20 \log \frac{G_0}{Q} - 20 \log \pi = 20 \log \frac{G_0}{Q} + 20 \log \pi$$

$$\Rightarrow \log \pi = 0 \quad (\pi = 1)$$

$$\text{et alors } G = 20 \log \frac{G_0}{Q} = 20 \log \frac{10}{10} = 0$$

$$\star \log \pi = 1 \Rightarrow \pi = 10$$

$$|\underline{H}| = \frac{10}{\sqrt{1 + 100 \left(\pi - \frac{1}{\pi} \right)^2}}$$

$$\Rightarrow |\underline{H}| = \frac{10}{\sqrt{1 + 100 (10 - 0,1)^2}} \approx 0,1$$

$$G = 20 \log |\underline{H}| \approx -20 \text{ dB} \Rightarrow \text{quasi sur l'asymptote}$$

$$\star \text{ idem en } \log \pi = -1$$

$$\star G = 0 \Rightarrow |\underline{H}| = 1 \Rightarrow \frac{10}{\sqrt{1 + 100 \left(\pi - \frac{1}{\pi} \right)^2}} = 1$$

$$\Rightarrow 1 + 100 \left(\pi - \frac{1}{\pi} \right)^2 = 100$$

$$\Rightarrow \left(\pi - \frac{1}{\pi} \right)^2 = 0,99 \Rightarrow \pi \approx 1 \Rightarrow \log \pi \approx 0$$

$$\Rightarrow \text{le filtre est très sélectif } (Q = 10 \text{ "grand"})$$

$$\Rightarrow \text{résonance aiguë.}$$

II-2-e) $\underline{H} = \frac{G_0}{1 + jQ \left(\pi - \frac{1}{\pi} \right)}$

Posons $\pi = 1 + \varepsilon$ avec $\varepsilon \ll 1$ ($\pi \approx 1$)

$$\Rightarrow \pi - \frac{1}{\pi} = 1 + \varepsilon - \frac{1}{1 + \varepsilon} = 1 + \varepsilon - (1 - \varepsilon) = 2\varepsilon = 2(\pi - 1)$$

$$\Rightarrow \underline{H} = \frac{G_0}{1 + 2jQ(\pi - 1)}$$

II-3) Filtrage:

II-3-a) cf feuille annexe

II-3-b) $u_s = G_0 U_m \left\{ \cos \omega_p t + \frac{C}{\sqrt{1 + 4Q^2 \frac{\Omega^2}{\omega_p^2}}} \cos \left[\omega_p t - \left(\Omega t - \text{Arctan} \left(\frac{2Q\Omega}{\omega_p} \right) \right) \right] \right\}$

$$+ \frac{C}{\sqrt{1 + 4Q^2 \frac{\Omega^2}{\omega_p^2}}} \cos \left[\omega_p t + \left(\Omega t - \text{Arctan} \left(\frac{2Q\Omega}{\omega_p} \right) \right) \right] \}$$

Par analogie avec II-1-b)

$$U_m \rightarrow G_0 U_m$$

$$C \rightarrow \frac{C}{\sqrt{1 + 4Q^2 \frac{\Omega^2}{\omega_p^2}}}$$

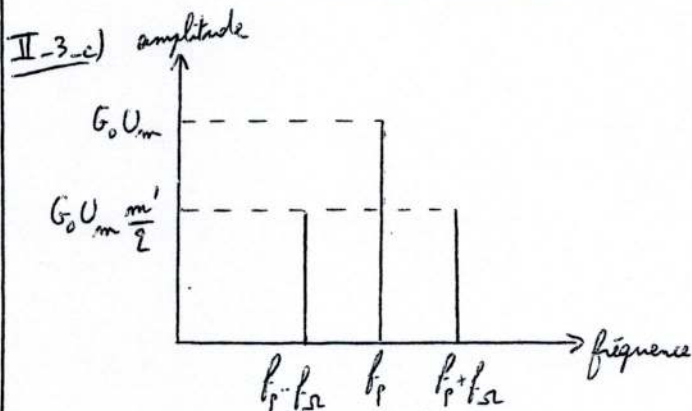
$$\Omega t \rightarrow \Omega t - \text{Arctan} \left(\frac{2Q\Omega}{\omega_p} \right)$$

$$m \rightarrow m'$$

$$\Omega t \rightarrow \Omega t - \phi$$

$$\Rightarrow \phi = \text{Arctan} \frac{2Q\Omega}{\omega_p} = \frac{2Q\Omega}{\omega_p}$$

$$m = 2C \Rightarrow m' = \frac{2C}{\sqrt{1 + 4Q^2 \frac{\Omega^2}{\omega_p^2}}}$$

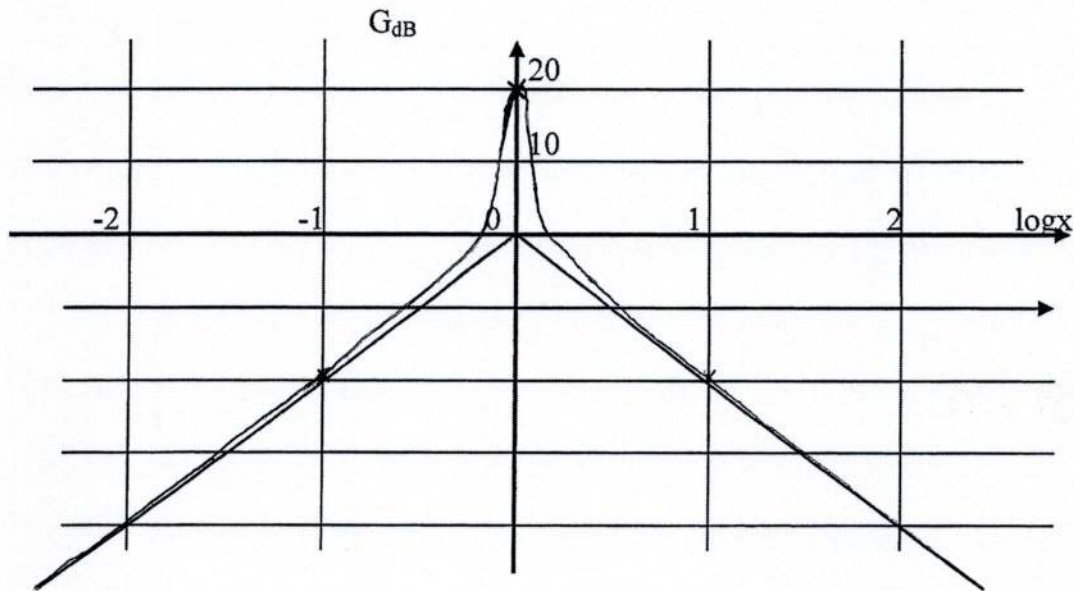


On voit que le signal de sortie est quasiment le même que le signal d'entrée.

L'intérêt de ce filtrage est d'enlever les éventuels "bruits". (on a un filtre très sélectif) et d'amplifier les 3 fréquences qui nous intéressent, avant l'étape de démodulation.

Feuille réponse

Question AII-2e : Diagramme de BODE



Question A II 3 a

Composante d'entrée $\Rightarrow$	$U_m \cdot \cos(\omega_p t)$	$C \cdot U_m \cdot \cos[(\omega_p - \Omega)t]$	$C \cdot U_m \cdot \cos[(\omega_p + \Omega)t]$
$x = f/f_p$	1	$1 - \frac{\Omega}{\omega_p}$	$1 + \frac{\Omega}{\omega_p}$
$\underline{H}$	G_0	$\frac{G_0}{1 - 2jQ\frac{\Omega}{\omega_p}}$	$\frac{G_0}{1 + 2jQ\frac{\Omega}{\omega_p}}$
Amplitude de la tension de sortie associée à cette composante	$G_0 U_m$	$\frac{G_0 C U_m}{\sqrt{1 + 4Q^2\frac{\Omega^2}{\omega_p^2}}}$	$\frac{G_0 C U_m}{\sqrt{1 + 4Q^2\frac{\Omega^2}{\omega_p^2}}}$
Phase de la tension de sortie associée	$\omega_p t + 0$	$(\omega_p - \Omega)t + \text{Arctan}\left(\frac{2Q\Omega}{\omega_p}\right)$	$(\omega_p + \Omega)t - \text{Arctan}\left(\frac{2Q\Omega}{\omega_p}\right)$
Equation horaire de la sortie	$G_0 U_m \cos(\omega_p t)$	$\frac{G_0 C U_m}{\sqrt{1 + 4Q^2\frac{\Omega^2}{\omega_p^2}}} \cos\left[(\omega_p - \Omega)t + \text{Arctan}\left(\frac{2Q\Omega}{\omega_p}\right)\right]$	$\frac{G_0 C U_m}{\sqrt{1 + 4Q^2\frac{\Omega^2}{\omega_p^2}}} \cos\left[(\omega_p + \Omega)t - \text{Arctan}\left(\frac{2Q\Omega}{\omega_p}\right)\right]$

PARTIE B : Distribution volumique en régime permanent

I) Relations de Maxwell :

I-1) Maxwell-Gauss : $\boxed{\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$

$\Rightarrow$ si $r < R_1$ ou $r > R_2$: $\rho = 0 \Rightarrow \text{div } \vec{E} = 0$

si $R_1 < r < R_2$: $\rho = \rho_0 \Rightarrow \text{div } \vec{E} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}$

Maxwell-flux : $\boxed{\text{div } \vec{B} = 0}$

Maxwell-Faraday : $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
régime permanent

$\boxed{\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}}$

Maxwell-Ampère : $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
pas de courants régime permanent

$\Rightarrow \boxed{\vec{\text{rot}} \vec{B} = \vec{0}}$

I-2-a) théorème de Gauss = le flux sortant du champ électrique à travers une surface fermée est égal à la charge intérieure à cette surface divisée par ϵ_0 la permittivité diélectrique du vide.

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

I-2-b) $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

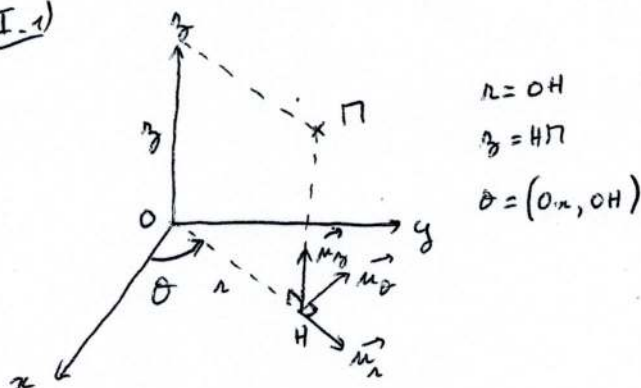
$$\Rightarrow \iiint_V \text{div } \vec{E} d\tau = \iiint_V \frac{\rho}{\epsilon_0} d\tau$$

thm
d'Ostrogradski $\rightarrow$ "

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho d\tau = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

II) Champ électrostatique $\vec{E}$:

II-1)



$$r = OH$$

$$\phi = H\pi$$

$$\theta = (0, r, OH)$$

II-2) Cela revient à négliger les effets de bord :

$\boxed{d \gg R_2}$

il faut se placer en $|z| \ll \frac{d}{2}$ et r pas trop grand

II-3) $d \gg R_2 \Rightarrow$ le plan contenant Π et $\perp (Oz)$

est plan de symétrie de la distribution de charges
or $\vec{E}$ est un vecteur polaire donc $\vec{E}(\Pi) \in$ à ce plan

$\Rightarrow E_z = 0$

* idem avec le plan contenant Π et (Oz)

$\Rightarrow E_\phi = 0$

$\Rightarrow \vec{E} = E \vec{u}_r$

* on a invariance de la distribution de charges par rotation autour de $(Oz) \Rightarrow E(r, \phi, z)$

* $d \gg R_2 \Rightarrow$ on a invariance de la distribution de charges par translation suivant $\vec{u}_z \Rightarrow E(r, \phi, z)$

$\Rightarrow \vec{E} = E(r) \vec{u}_r$

* thm de Gauss : $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$

S : cylindre d'axe (Oz) , de rayon r , de hauteur l

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{largeur}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{\text{largeur}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_{\text{bt}}} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$\vec{E} \perp \vec{u}_r$ et $d\vec{S} \propto \pm \vec{u}_z$

$$= \iint_{S_{\text{bt}}} E(r) \vec{u}_r \cdot (dS \vec{u}_r) = E 2\pi r l = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$\leftarrow S_{\text{bt}} : r = R_1 \text{ ou } R_2$

• si $r < R_1$: $Q_{int} = 0 \Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$ ($r < R_1$)
(pas demandé)

• si $R_1 < r < R_2$: $Q_{int} = \rho_0 (\pi r^2 - \pi R_1^2) l$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho_0 (r^2 - R_1^2)}{2\epsilon_0 r} \vec{u}_r \quad \text{dans la couche cylindrique}$$

• si $r > R_2$: $\vec{E} = \frac{\rho_0 (R_2^2 - R_1^2)}{2\epsilon_0 r} \vec{u}_r$
(pas demandé)

III) Potentiel électrique V:

III-1) $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V \Rightarrow dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$

$$dV = -E \vec{u}_r \cdot d\vec{l} = -E dr$$

Pour $R_1 < r < R_2$: $E = \frac{\rho_0 (r^2 - R_1^2)}{2\epsilon_0 r}$

$$\Rightarrow dV = \left(-\frac{\rho_0 r}{2\epsilon_0} + \frac{\rho_0 R_1^2}{2\epsilon_0 r} \right) dr$$

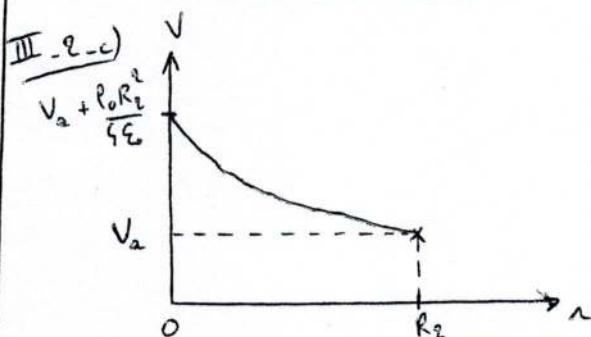
$$\Rightarrow V = -\frac{\rho_0}{4\epsilon_0} r^2 + \frac{\rho_0 R_1^2}{2\epsilon_0} \ln r + c$$

on $V(R_2) = V_a$

$$\Rightarrow V(r) = V_a + \frac{\rho_0}{4\epsilon_0} (R_2^2 - r^2) + \frac{\rho_0 R_1^2}{2\epsilon_0} \ln \frac{r}{R_2}$$

III-2.a) $V(r) = V_a + \frac{\rho_0}{4\epsilon_0} (R_2^2 - r^2)$

III-2.b) $V(r=0) = V_a + \frac{\rho_0 R_2^2}{4\epsilon_0}$



IV) Equation de Poisson:

* $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}$ dans la couche

* $\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$

$$\Rightarrow \text{div}(-\vec{\text{grad}} V) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}$$

$$= -\text{div} \vec{\text{grad}} V = -\Delta V$$

$$\Rightarrow \Delta V = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \quad \text{dans la couche}$$

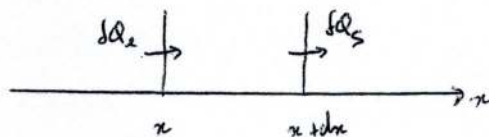
PARTIE C : COUPLAGE ELECTRO-THERMIQUE

I) Etablissement de la relation $\text{div}(\vec{j}_{el}) = P_{vi}$:I-1) $P_{vi} = \vec{j} \cdot \vec{E}$ or loi d'Ohm locale: $\vec{j} = \gamma \vec{E}$

$$\Rightarrow \boxed{P_{vi} = \frac{j^2}{\gamma}}$$

I-2a) loi de Fourier: $\vec{j}_{el} = -\lambda \text{grad} T$

I-2.b)

1^{er} principe à la tranche comprise entre x et $x+dx$ entre t et $t+dt$:

$$dU = C dT = dm c \frac{\partial T}{\partial t} dt = \mu S dx c \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

$$= SQ_e(x, t) - SQ_s(x+dx, t) + P_{vi}(S dx) dt$$

$$+ \delta Q$$

$$- P_{ext} dt$$

indilatable (ou régime permanent $\Rightarrow V = \text{cte}$)

$$\Rightarrow 0 = j_{el}(x, t) S dt - j_{el}(x+dx, t) S dt + P_{vi} S dx dt$$

$$\Rightarrow - \frac{\partial j_{el}}{\partial x} dx + P_{vi} dx = 0$$

or j_{el} ne dépend que de $x \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{dj_{el}}{dx} = P_{vi}}$$

$$\text{I-2-c)} \quad \text{div} \vec{j}_{el} = \frac{\partial j_{elx}}{\partial x} + \frac{\partial j_{ely}}{\partial y} + \frac{\partial j_{elz}}{\partial z}$$

$$\text{I-2-d)} \quad \text{ici } \vec{j}_{el} = j_{el} \vec{u}_x \Rightarrow j_{ely} = j_{elz} = 0$$

$$(\text{et } j_{el}(x, y, z) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0)$$

$$\text{car problème unidimensionnel } \Rightarrow \text{div} \vec{j}_{el} = \frac{\partial j_{el}}{\partial x}$$

$$\text{ou régime permanent } \Rightarrow j_{el}(x, y) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{dx}$$

$$\Rightarrow \text{div} \vec{j}_{el} = \frac{dj_{el}}{dx} \Rightarrow \boxed{\text{div} \vec{j}_{el} = P_{vi}}$$

II) Analogie:

II-1)

électrostatique	$\vec{E} = -\text{grad} V$	$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (Maxwell-Gauss)	$\frac{\rho}{\epsilon_0}$	V
conduction thermique	$\vec{j}_{el} = -\lambda \text{grad} T$ $= -\text{grad}(dT)$ (loi de Fourier)	$\text{div} \vec{j}_{el} = P_{vi}$	P_{vi}	ΔT

$$\text{II-2)} \quad \text{div} \vec{j}_{el} = \text{div}(-\text{grad}(\Delta T)) = -\Delta(\Delta T) = -\lambda \Delta T = P_{vi}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta T = - \frac{P_{vi}}{\lambda}}$$

Pg: analogie avec l'équation de Poisson: $\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$

$$\Rightarrow \Delta(\Delta T) = -P_{vi} \Rightarrow \Delta T = - \frac{P_{vi}}{\lambda}$$

III) Application au profil de température d'un câble déroulé:

$$\text{III-1-a)} \quad \boxed{S = \pi \frac{b^2}{4}}$$

$$\text{III-1-b)} \quad \boxed{P_e = P_{vi} \pi \frac{b^2}{4} L}$$

$$P_e = \frac{80 \cdot 10^3 \times \pi \times (5 \cdot 10^{-3})^2 \times 50}{4} = \frac{8 \cdot 10^4 \pi \cdot 25 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^1}{4}$$

$$= \frac{1000 \pi \cdot 10^{-3}}{4} = \frac{100\pi}{4} \approx \frac{100 \times 3}{4} = 75 \text{ W} \Rightarrow \text{OK!}$$

$$\text{III-1-c)} \quad P_e = R I^2 = \frac{1}{\gamma} \frac{L}{S} I^2 = \frac{4L}{8\pi b^2} I^2$$

$$\Rightarrow I = b \sqrt{\frac{\pi \gamma P_e}{4L}} = b \sqrt{\frac{\pi \gamma P_{vi} \pi b^2 L}{16L}}$$

$$\boxed{I = \frac{\pi b^2}{4} \sqrt{\gamma P_{vi}}}$$

III-2-a) cf partie B III-2-a): $V(r) = V_a + \frac{\rho_0}{4\epsilon_0} (R_2^2 - r^2)$

$$V(r) \rightarrow \Delta T(r)$$

$$V_a \rightarrow \Delta T_a$$

$$\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \rightarrow P_{\text{vri}}$$

$$R_2 \rightarrow \frac{b}{2}$$

$$\Rightarrow \Delta T(r) = \Delta T_a + \frac{P_{\text{vri}}}{4} \left(\frac{b^2}{4} - r^2 \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{T(r) = T_a + \frac{P_{\text{vri}}}{4\lambda} \left(\frac{b^2}{4} - r^2 \right)}$$

III-2-b) $\boxed{T_0 = T_a + \frac{P_{\text{vri}} b^2}{16\lambda}}$

III-2-c) $T_0 - T_a = 3 \cdot 10^{-4} \text{ K} !!$

$$\ll 1 \text{ K} !!$$

$\Rightarrow$ on peut considérer que la température est uniforme dans l'âme en cuivre.

(le cuivre est un très bon conducteur thermique).

PARTIE D: Notation d'un câble bobiné:I) Etude géométrique:

I-1-a) $N = \frac{d}{\delta}$

I-1-b) $R_0 = R_1 + \frac{\delta}{2}$

I-1-c)

couche n°	rayon moyen	longueur bobinée sur cette couche
1	$R_0 = R_1 + \frac{\delta}{2}$	$N \times 2\pi R_0 = 2\pi \frac{d}{\delta} \left(R_1 + \frac{\delta}{2}\right)$
2	$R_1 + \frac{\delta}{2} + \delta$	$2\pi \frac{d}{\delta} \left(R_1 + \frac{\delta}{2} + \delta\right)$
...	...	...
k	$R_1 + \frac{\delta}{2} + (k-1)\delta$	$2\pi \frac{d}{\delta} \left(R_1 + \frac{\delta}{2} + (k-1)\delta\right)$

I-1-d) $L_1 + L_2 + \dots + L_k = L$

$$\Rightarrow \frac{2\pi d}{\delta} \left(k \left(R_1 + \frac{\delta}{2}\right) + \sum_{n=1}^k (n-1)\delta \right) = L$$

$$\frac{2\pi d}{\delta} \left(k \left(R_1 + \frac{\delta}{2}\right) - k\delta + \delta \left(\sum_{n=1}^k n\right) \right) = L$$

$$\text{or } \sum_{n=1}^k n = \frac{k(k+1)}{2}$$

$$\frac{2\pi d}{\delta} \left(k \left(R_1 - \frac{\delta}{2}\right) + \frac{\delta}{2} k(k+1) \right) = L$$

$$\frac{2\pi d}{\delta} \left(k R_1 + k^2 \frac{\delta}{2} \right) = L$$

$$k R_1 + k^2 \frac{\delta}{2} = \frac{L\delta}{2\pi d}$$

$$\frac{\delta}{2R_1} k^2 + k - \frac{L\delta}{2\pi d R_1} = 0$$

$$\Rightarrow A k^2 + k - B = 0 \quad \text{avec} \quad \boxed{A = \frac{\delta}{2R_1}}$$

$$\boxed{B = \frac{L\delta}{2\pi d R_1}}$$

I-1-e) $\frac{1}{12} k^2 + k - 11 = 0$

$$\Delta = 1 - 4 \frac{1}{12} (-11) = 1 + \frac{11}{3} = \frac{14}{3}$$

$$\Rightarrow k = \frac{-1 + \sqrt{\frac{14}{3}}}{\frac{2}{12}} = 6 \left(\sqrt{\frac{14}{3}} - 1 \right)$$

$$k \approx 6 \left(\sqrt{4,7} - 1 \right) \approx 7 \quad \Rightarrow \boxed{k=7}$$

↑
légèrement > 2

I-1-f) $R_2 - R_1 = k\delta$

$$\Rightarrow \boxed{R_2 = R_1 + k\delta}$$

or $\delta = 1 \text{ cm}$ et $A = \frac{1}{12} = \frac{\delta}{2R_1} \Rightarrow R_1 = 6 \text{ cm}$

$$\Rightarrow R_2 \approx 6 + 7 \times 1 \approx 13 \text{ cm} \Rightarrow \boxed{R_2 \approx 13 \text{ cm}}$$

I-2-a) nb de spires par maille carrée

= nb de spires par couche $\times$ nb de couches

$$= N \times k$$

$$= \frac{d}{\delta} \frac{R_2 - R_1}{\delta} = \boxed{\frac{d(R_2 - R_1)}{\delta^2}}$$

I-2-b) $n = \frac{\text{nb de spires par maille carrée}}{\text{surface de la maille carrée}}$

or surface de la maille carrée = $d(R_2 - R_1)$

$$\Rightarrow \boxed{n = \frac{1}{\delta^2}}$$

I-2-c) $dL = dN_s \times 2\pi r$

avec dN_s le nombre de spires comprises entre r et $r+dr$

$$dN_s = n dS = n d \cdot dr$$

$$\Rightarrow dL = 2\pi n d r dr \Rightarrow \boxed{dL = \frac{2\pi d}{\delta^2} r dr}$$

I-2-d) on intègre: $L = \frac{2\pi d}{\delta^2} \int_{R_1}^{R_2} r dr$

$$L = \frac{2\pi d}{\delta^2} \frac{R_2^2 - R_1^2}{2} = \frac{\pi d}{\delta^2} (R_2^2 - R_1^2)$$

$$\Rightarrow R_2 = \sqrt{R_1^2 + \frac{L\delta^2}{\pi d}} = \sqrt{R_1^2 + K}$$

avec $K = \frac{L\delta^2}{\pi d}$

I-2-e) cf I-1-e) $A = \frac{1}{12} = \frac{\delta}{2R_1}$ et $\delta = 1 \text{ cm}$

$$\Rightarrow R_1 = 6 \text{ cm} ; R_2 = 13 \text{ cm}$$

$$k = \frac{R_2 - R_1}{\delta} = \frac{13 - 6}{1} = 7 \Rightarrow \boxed{k = 7}$$

II) Etude des températures:

II-1-a) $V_c = \pi(R_2^2 - R_1^2)d$

II-1-b) $P_e = P'_{vi} V_c = 15,6 \cdot 10^3 \times 5,01 \cdot 10^{-3}$

$$\boxed{P_e \approx 78 \text{ W}}$$

On retrouve la même valeur que quand le câble est déroulé (cf partie C, III-1-b)

II-2) On est en régime permanent $\Rightarrow$ la puissance

totale P_e doit être évacuée sur la surface latérale en $r = R_2$.

$$\Rightarrow P_e = h(T_a - T_e) 2\pi R_2 d > 0$$

($T_a > T_e$)

$$\Rightarrow \boxed{T_a = T_e + \frac{P_e}{2\pi R_2 d h}}$$

II-3) cf partie B III-1):

$$V(R_1) - V(R_2) = \frac{\rho_0}{4\epsilon_0} (R_2^2 - R_1^2) + \frac{\rho_0 R_1^2}{2\epsilon_0} \ln \frac{R_1}{R_2}$$

cf partie C: II: $V \rightarrow \Delta T \rightarrow K_2 T$

$$\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \rightarrow P'_{vi}$$

$$\Rightarrow K_2 T(R_1) - K_2 T(R_2) = \frac{P'_{vi}}{4} (R_2^2 - R_1^2) + \frac{P'_{vi} R_1^2}{2} \ln \frac{R_1}{R_2}$$

$$\Rightarrow T(R_1) - T(R_2) = \frac{P'_{vi}}{4K_2} \left\{ R_2^2 - R_1^2 + 2R_1^2 \ln \frac{R_1}{R_2} \right\}$$

$$= A \left\{ R_2^2 - R_1^2 + B \ln \frac{R_1}{R_2} \right\}$$

avec $A = \frac{P'_{vi}}{4K_2}$ et $B = 2R_1^2$

III) Justification du modèle thermique:

III-1-a)

fil n°	0	1	2	3	4
x	x_0	$x_0 + \delta$	x_0	$x_0 - \delta$	x_0
y	y_0	y_0	$y_0 + \delta$	y_0	$y_0 - \delta$

III-1-b-a) $T_1 - T_0 = T(x_0 + \delta, y_0) - T(x_0, y_0)$

$$\Rightarrow T_1 - T_0 = \delta \frac{\partial T}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\delta^2}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_0, y_0)$$

$$= A \frac{\partial T}{\partial x}(x_0, y_0) + B \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_0, y_0)$$

avec $A = \delta$ et $B = \frac{\delta^2}{2}$

III-1-b-b) $T_3 - T_0 = T(x_0 - \delta, y_0) - T(x_0, y_0)$

$$\Rightarrow \boxed{T_3 - T_0 = -\delta \frac{\partial T}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\delta^2}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_0, y_0)}$$

$$(T_1 - T_0) + (T_3 - T_0) = \delta^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x_0, y_0)$$

III-1-c) $T_2 - T_0 = T(x_0, y_0 + \delta) - T(x_0, y_0)$

$$\Rightarrow T_2 - T_0 = \delta \frac{\partial T}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\delta^2}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}(x_0, y_0)$$

$$= A \frac{\partial T}{\partial y}(x_0, y_0) + B \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}(x_0, y_0)$$

avec $A = \delta$ et $B = \frac{\delta^2}{2}$ OK

$$T_4 - T_0 = T(x_0, y_0 - \delta) - T(x_0, y_0)$$

$$\Rightarrow T_4 - T_0 = -\delta \frac{\partial T}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\delta^2}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}(x_0, y_0)$$

$$(T_4 - T_0) + (T_2 - T_0) = \delta^2 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}(x_0, y_0)$$

III-2-a) on est en régime stationnaire

$$\Rightarrow \Sigma P_{\text{resque par filo}} = 0$$

$$P_{\text{Ink}} + \Sigma P_{\text{transférée}} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{j^2}{\delta} \right) (S\delta) + \alpha \delta (T_1 - T_0) + \alpha \delta (T_2 - T_0) + \alpha \delta (T_3 - T_0) + \alpha \delta (T_4 - T_0) = 0$$

$$\alpha j = \frac{I}{S}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\delta} \left(\frac{I}{S} \right)^2 S + \alpha \delta^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\delta} \left(\frac{I}{S} \right)^2 = - \frac{\alpha \delta^2}{S} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

$$= -C \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

$$\text{avec } C = \frac{\alpha \delta^2}{S}$$

III-2-b) C est l'opérateur Laplacien scalaire.

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

0 (problème invariant selon z)

III-2-c) cf partie B: IV: $\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$

cf partie C: II-2): $\Delta T = -\frac{P_{\text{rx}}}{\lambda}$ par analogie

$$\alpha P_{\text{rx}} = \frac{j^2}{\delta} = \frac{1}{\delta} \left(\frac{I}{S} \right)^2$$

$$\Rightarrow P_{\text{rx}} = \frac{1}{\delta} \left(\frac{I}{S} \right)^2 = -C \Delta T = -\lambda \Delta T$$

$\Rightarrow C = \lambda$ est la conductivité thermique du cuivre

$$C = \lambda = 400 \text{ W.m}^{-1}\text{.K}^{-1}$$