

Banque PT 2012

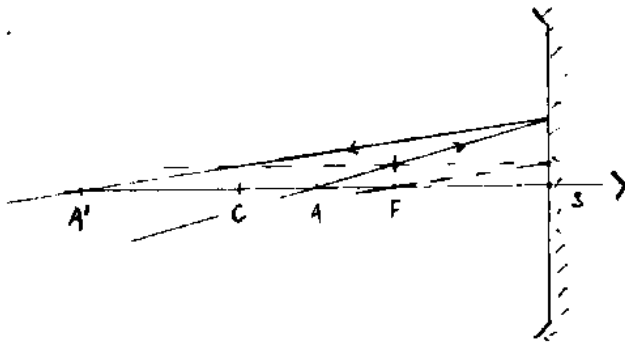
Epreuve B

1. 1. * C et C' sont confondus $\Rightarrow \frac{1}{\overline{SC}} + \frac{1}{\overline{SC}'} = \frac{2}{\overline{SC}}$

* F : image à l'infini : $\frac{1}{\overline{SA}'} \rightarrow 0 \Rightarrow \overline{SF} = \frac{\overline{SC}}{2}$

F' : image d'un point à l'infini $\Rightarrow \frac{1}{\overline{SA}} \rightarrow 0 \Rightarrow \overline{SF'} = \frac{\overline{SC}}{2}$

2.



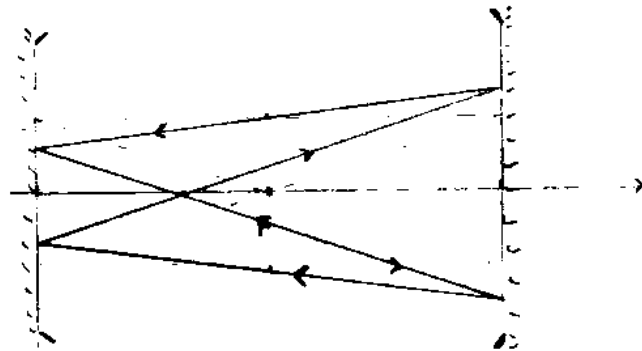
Le rayon incident passe par un foyer objet secondaire qui a pour image un faisceau de rayons parallèles entre eux.

* Relation de conjugaison, avec $\overline{SA} = \frac{3}{4} \overline{SC}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\overline{SA}'} = \frac{2}{\overline{SC}} - \frac{4}{3} \frac{1}{\overline{SC}} = \frac{2}{3} \frac{1}{\overline{SC}} \Rightarrow \overline{SA}' = \frac{3}{2} \overline{SC}$$

Cela semble cohérent avec la figure

3. * donc $a = R$, les foyers des deux miroirs sont confondus



Cette construction "montre" qu'au bout de 4 réflexions, le rayon reprend le même chemin.

4.a Il s'agit d'établir 2 relations distinctes.

* Compte tenu des choix d'orientations, on peut écrire $\tan(\alpha_{nn}) = \frac{y_n + y_{n+1}}{a}$.

Dans les conditions de Gauss, les angles sont faibles donc $\tan(\alpha_{nn}) \approx \alpha_{nn}$. Il vient $\boxed{y_n + y_{n+1} = a \alpha_{nn}}$

* Notons A_n le point de l'axe optique coupé par le rayon numéro n .

• $\tan(\alpha_n) = \frac{y_n}{A_n O}$ et $\tan(\alpha_{nn}) = \frac{y_n}{A_{nn} O}$

• La relation de conjugaison (A_{nn} image de A_n):

$$\frac{1}{A_n O} + \frac{1}{A_{nn} O} = \frac{2}{CS} = \frac{2}{R}$$

Toujours dans l'hypothèse des angles faibles, il vient:

$$\boxed{\frac{\alpha_n}{y_n} + \frac{\alpha_{nn}}{y_n} = \frac{2}{R}}, \text{ qui est la relation cherchée}$$

4.b * Il vient $\alpha_n + \alpha_{n+1} = \frac{2y_n}{R}$

Soit $y_{n-1} + y_n + y_n + y_{n+1} = \frac{2ay_n}{R}$. Après tralittage,

$$\boxed{y_{n+1} + 2y_n \left(1 - \frac{a}{R}\right) + y_{n-1} = 0}$$

* En injectant la forme précédente.

$$Ar^{n+1} + 2Ar^n \left(1 - \frac{a}{R}\right) + Ar^{n-1} = 0$$

$$\Rightarrow r^2 + 2r \left(1 - \frac{a}{R}\right) + 1 = 0.$$

• Le discriminant de ce "polynôme caractéristique"

$$\Delta = 4 \left[\left(1 - \frac{a}{R}\right)^2 - 1 \right] = -4 \frac{a}{R} \left(2 - \frac{a}{R}\right)$$

Comme $a < 2R$, $2 > \frac{a}{R}$ et $\underline{\Delta < 0}$.

Les racines sont effectivement complexes conjuguées.

Elles s'écrivent $\Gamma_{1,2} = \frac{a}{R} - 1 \pm i \sqrt{\frac{a}{R} \left(2 - \frac{a}{R}\right)}$

At 2012

Ep B
③

• Comme le produit des racines vaut 1, il vient $|\Gamma_1|^2 = |\Gamma_2|^2 = 1$. Elles sont de module 1.

• Conséquence : $y_n = A_1 \Gamma_1^n + A_2 \Gamma_2^n$

$\Rightarrow |y_n| = |A_1 \Gamma_1^n + A_2 \Gamma_2^n| \leq |A_1| + |A_2|$

* La cavité est ici stable. Aucun rayon ne finit par sortir en s'éloignant de plus en plus de l'axe optique.

4.c) Pour $a = R$, $y_{n+1} = -y_{n-1} = y_{n-3}$

ou encore $\Gamma_{1,2} = \pm i \Rightarrow \Gamma_{1,2}^4 = 1$

Ceci montre bien qu'au bout de 4 réflexions, le rayon revient sur ses pas.

1.1. * Faire l'approximation scalaire revient à ignorer le caractère vectoriel du champ électromagnétique.

• L'amplitude de l'onde représente l'amplitude du champ électrique de l'onde.

2. L'équation de propagation est une équation de d'Alembert (à 1 dimension ici) :

$$\Delta A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0$$

d'où $\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} A = 0$

3. Au sein d'un conducteur parfait (conductivité infinie), le champ électromagnétique est nul. Par continuité de la composante tangentielle du champ électrique (onde transverse et propagation selon z), le champ électrique doit s'annuler en $z=0$ et en $z=a$.

II.4 * Les solutions s'écrivent :

ST 2012

Ep B
(4)

$$f(z) = \kappa_1 \cos\left(\frac{\omega z}{c}\right) + \kappa_2 \sin\left(\frac{\omega z}{c}\right)$$

où κ_1 et κ_2 sont des constantes à trouver.

$$\bullet f(0) = 0 \Rightarrow \kappa_1 = 0$$

$$\bullet f(a) = 0 \Rightarrow \frac{\omega a}{c} = p\pi \quad \text{avec } p \in \mathbb{N}^+.$$

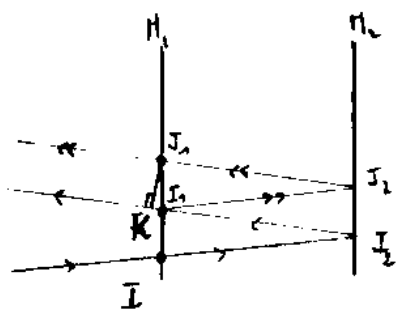
Finalement,
$$f(z) = \kappa_2 \sin\left(p \frac{\pi z}{a}\right)$$

* On trouve des ondes stationnaires ; l'amplitude s'écrit $A(z,t) = \text{Re} [A(z,t)] = A_0 \sin\left(p \frac{\pi z}{a}\right) \cos(\omega t + \varphi)$.

• A chaque mode, correspond une valeur de p ;
comme $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$, la longueur d'onde associée au mode p vaut :
$$\lambda_p = \frac{2a}{p}.$$

Rem : il est plus simple d'écrire $2a = p\lambda_p$
ou encore $a = p \frac{\lambda_p}{2}$.

III 1)



• Soit η le point d'observation à l'infini. D'après le théorème de Fermat, les chemins optiques $(I_1\eta)$ et $(I_2\eta)$ sont identiques.

• la différence de chemin optique géométrique, entre 2 rayons

émergents successifs, s'écrit : $\delta = (I_1 I_2 I_2) - (I_1 K)$.

• Dans l'air, d'indice 1, $(I_1 I_2 I_2) = \frac{2a}{\cos(i)}$

D'autre part, $(I_1 K) = I_1 I_2 \sin i = 2a \tan i \sin i$.

$$\text{D'où } \delta = \frac{2a}{\cos(i)} (1 - \sin^2 i) = 2a \cos(i).$$

Finalement, le déphasage géométrique entre deux rayons émergents successifs vaut $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} 2a \cos(i)$

Pr 2012
Ep B
(5)

Remarque : c'est le signe du coefficient de réflexion en amplitude qui fournit effectivement un déphasage supplémentaire. Celui-ci est ignoré volontairement (cf énoncé)

III.2 * Soit A_0 l'amplitude du rayon d'origine

Alors, en prenant $r_2 = +1$ pour la réflexion sur M_2 , il vient $A_0 = +t^2 A_0$, puis $A_1 = r t^2 A_0 = +r A_0$.
En récurrence, il vient $A_k = +r A_{k-1}$.

* Tous les rayons émergents sont cohérents entre eux.
L'amplitude complexe résultante s'écrit :

$$A(M) = A_0(M) \sum_{q=0}^{\infty} (+r)^q \exp(iq\varphi).$$

III.3 On reconnaît la somme d'une série géométrique, de raison $+r e^{i\varphi}$. Elle vaut : $A(M) = A_0(M) \frac{1}{1 - r e^{i\varphi}}$

• Intensité : $I(M) = |A(M)|^2 = |A_0|^2 \frac{1}{1 + r^2 - 2r \cos \varphi}$

• Traitement du dénominateur : $1 + r^2 - 2r \cos \varphi = (1-r)^2 + 2r(1 - \cos \varphi)$
 $= (1-r)^2 + 2r \cdot 2 \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$

Donc $I(M) = \frac{|A_0|^2}{(1-r)^2} \frac{1}{1 + m \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$ avec $m = \frac{4r}{(1-r)^2}$

* A.N $m = \frac{4 \cdot 0,9}{(0,1)^2} = 360$

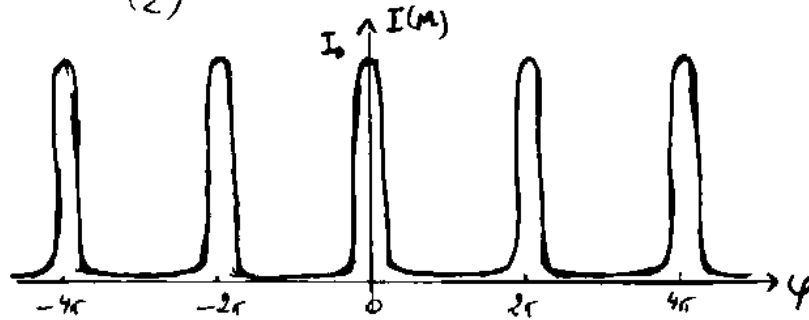
III 4 * $\sin^2(\frac{\varphi}{2})$ varie annuellement entre 0 et 1
et $I(m)$ varie entre I_0 et $\frac{I_0}{1+m} \approx \frac{I_0}{m}$

ET 2012
Ep B
(6)

$I(m) \geq \frac{I_0}{2}$ tant que $\sin^2(\frac{\varphi}{2}) \leq \frac{1}{m} \approx$

Effectivement, l'intensité n'a de valeurs importantes que tant que $\sin^2(\frac{\varphi}{2}) \ll 1$.

* $\sin^2(\frac{\varphi}{2}) = 0 \Rightarrow \varphi = 2q\pi, \quad q \in \mathbb{Z}$



* Largeur à mi-hauteur: dans l'approximation des petits angles $\sin^2(\frac{\varphi}{2}) \approx (\frac{\varphi}{2})^2 \Rightarrow I > \frac{I_0}{2}$ pour $\varphi < \frac{2}{\sqrt{m}}$

La largeur totale vaut donc $\left[\Delta\varphi_{1/2} = \frac{4}{\sqrt{m}} \approx \frac{4}{10,36} \approx 0,2 \text{ rad.} \right]$

III 5 On raisonne à λ fixé mais, avec λ dans un petit intervalle. En fréquence, $\varphi = \frac{4\pi a f}{c}$

$\Rightarrow \Delta f \approx c \frac{\Delta\varphi_{1/2}}{4\pi a}$

A.N. $\frac{\Delta f}{f} \approx 3 \cdot 10^8 \cdot 0,2 \cdot \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot 0,2} \approx 2,5 \cdot 10^4 \text{ Hz}$

Or la fréquence de l'onde vaut $f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8}{0,6 \cdot 10^{-6}} = 5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$

Par conséquent, $\frac{\Delta f}{f} \approx 5 \cdot 10^{-11}$. Le rayonnement laser est quasi-monochromatique.

IV 1) Onde plane, harmonique $\vec{E} = E_0 \vec{e}_x \cos(\omega t - k_z z)$
 $= \text{Re} [E_0 \exp i(\omega t - k_z z)] \vec{e}_x$

Relation de structure: $\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E} = \frac{\vec{e}_z}{c} \wedge \vec{E}$
 $\Rightarrow \vec{B} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - k_z z) \vec{e}_y$

IV.2. Vecteur de Poynting $\vec{\pi} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}$

PT 2012
Ep B
(+)

D'où $\vec{\pi} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - k_z) \vec{e}_z = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2} \cos^2(\omega t - k_z) \vec{e}_z$

Enfin, la valeur moyenne temporelle $\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2} \vec{e}_z$

IV.3. Une onde plane a une extension spatiale infinie, notamment transversale, ce qui n'est manifestement pas le cas d'un faisceau laser.

IV.4. Puissance moyenne $P = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2} \pi b^2 = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \pi b^2$

D'où $E_0 = \sqrt{\frac{2\mu_0 c P}{\pi b^2}}$

A.N. $E_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 10^2}{\pi}} \cdot \frac{1}{5 \cdot 10^{-4}} = \frac{\sqrt{60}}{5} \cdot 10^5 \approx 1,6 \cdot 10^5 \text{ V.m}^{-1}$

Un chiffre significatif $\Rightarrow E_0 \approx 2 \cdot 10^5 \text{ V.m}^{-1}$

IV.5. La diffraction provoque un étalement du faisceau.

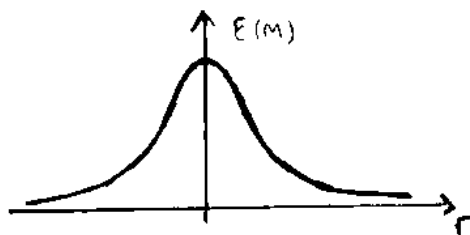
Un ordre de grandeur simple de l'angle de divergence

est $\theta = \frac{\lambda}{b}$. A.N. $\theta = \frac{0,6 \cdot 10^{-6}}{95 \cdot 10^{-3}} = 1,2 \text{ mrad.}$

IV.6. * Par identification, $\omega^2 = \frac{z_0^2 + z_0'^2}{k z_0} = \frac{z_0}{k} \left(1 + \frac{z_0'^2}{z_0^2}\right)$

Par conséquent, $\omega_0 = \sqrt{\frac{z_0}{k}} = \sqrt{\frac{z_0 \lambda}{2\pi}}$, en mètres

* Allure (gaussienne)



Le faisceau est plus intense au centre, et s'éteint latéralement, c'est plausible

D'autre part, la taille caractéristique du faisceau varie avec $\omega(z)$. Cette expression tient compte de l'étalement progressif du faisceau, au fur et à mesure de la propagation.

IV.6 (suite) Le champ électrique a une direction constante, $\vec{e}_x$. Cette onde est polarisée rectilignement

ET 212
Ep B
(3)

IV.7 * Le champ électrique réel s'écrit

$$\vec{E}(M,t) = E_0 \exp\left(\frac{-r^2}{w_0^2}\right) \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x$$

Le terme de propagation a une période spatiale λ .
Aire que l'amplitude $E(M)$ varie très lentement par rapport à r et z signifie que, sur une distance de l'ordre de λ , l'amplitude $E(M)$ reste constante ou presque.
A t fixe, la "forme spatiale" d'évolution de $\vec{E}$ vaut alors $k E(M)$.

Donc les deux critères de l'énoncé $\left| \frac{\partial E}{\partial x} \right| \ll k E(M)$
et $\left| \frac{\partial E}{\partial y} \right| \ll k E(M)$

* Courage ! Soient $f = E(M)$

$$\text{Alors } \vec{\text{rot}}(\vec{A}) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \exp(i\omega t - kz) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -ik \exp(i\omega t - kz) \vec{e}_y$$

D'autre part, $\|\vec{\text{grad}}(f)\| \ll k f$, donc je néglige le 2^e terme devant le premier.

$$\text{Il vient } \vec{\text{rot}}(\vec{E}) = -ik E(M) \exp(i\omega t - kz) \vec{e}_y = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{soit } \vec{B} = \frac{k}{\omega} E(M) \exp(i\omega t - kz) \vec{e}_y. \quad \text{De façon approchée}$$

$$\text{on a encore } \boxed{\vec{B}(M) = \frac{E(M)}{c}} \quad \text{car } \frac{k}{\omega} = \frac{1}{c}$$

IV.8 Les résultats sont ceux de l'onde plane progressive (de façon approchée) donc le vecteur de Poynting moyen s'écrit : $\boxed{\vec{P}(r,z) = \frac{\epsilon_0 c}{2} E^2(M) \vec{e}_z}$

V.9 * Calculons le flux de $\vec{P}$ à travers
un plan $z = Cte$ $\mathcal{P}_m(z) = \int_{z=Cte} \frac{\epsilon_0 c}{2} E_0^2 \exp\left(-\frac{2r^2}{w^2}\right) dS$

(9)

L'élément de surface s'écrit, en coordonnées polaires,
 $dS = 2\pi r dr$ avec r variant de 0 à $+\infty$.

Il vient $\mathcal{P}_m(z) = \frac{\epsilon_0 c}{2} E_0^2 \cdot \int_0^\infty \left[-\frac{w^2}{4} \exp\left(-\frac{2r^2}{w^2}\right) \right]_0^\infty$

$$\mathcal{P}_m(z) = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{4} \cdot w^2(z)$$

* Dans un milieu transparent, la puissance moyenne transportée par le faisceau devrait être indépendante de z .
Pour que ce soit le cas, il faut que le produit $E_0 \cdot w(z)$ soit constant. Donc l'amplitude E_0 devrait
dépendre de z .

V.10. Cela revient à montrer $\exp\left(-\frac{2r^2}{w^2}\right) = \exp(-2)$
d'où $R^2(z) = w^2(z) \Rightarrow R(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_0^2}} = w(z)$.

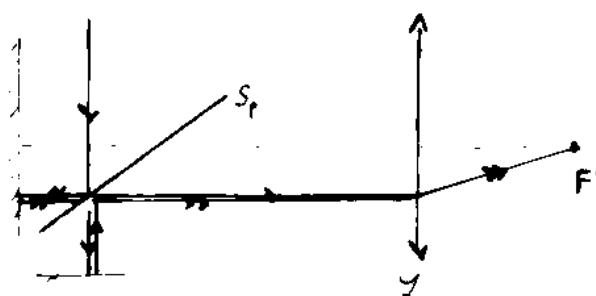
V.11 * Pour $z \gg z_0$, $R(z) \approx w_0 \frac{z}{z_0}$ ($z > 0$ ou)

L'angle de divergence vaut donc $\alpha \approx \frac{w_0}{z_0}$ (angle petit)

* A.N. $w_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 0.6 \cdot 10^{-6}}{2\pi}} \approx \sqrt{0.2} \cdot 10^{-3} \approx 0.14 \text{ mm}$

d'où $\alpha \approx 907 \text{ mrad}$ C'est beaucoup plus faible
que la précédente estimation (1,2 mrad)

V.1



On souhaite voir peu
d'anneaux. Le faisceau
d'entrée est à peu près
parallèle, en incidence
normale sur le miroir.

Pour ce faire, on place une source étendue au foyer objet d'une lentille convergente.

V.2. La différence de chemin optique correspond à un aller et retour dans la lame d'air, soit $\delta = 2d$.

La formule des interférences à deux ondes donne :

$$I(\nu) = 2 \frac{I_0}{4} \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi \delta}{\lambda} \right) \right] = \frac{I_0}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{4\pi d \nu}{c} \right) \right]$$

En effet, si I_0 est l'intensité du faisceau d'entrée, l'intensité après réflexion et transmission par la séparatrice vaut $\frac{I_0}{4}$.

V.3 * $I_{\max} = I(\nu_0) = 2 \frac{I_0}{4}$.

* Pour trouver la largeur à mi-hauteur, il faut résoudre $4\pi^2 d^2 (\nu - \nu_0)^2 = 1 \Rightarrow \nu = \nu_0 \pm \frac{1}{2\pi d}$.

Par conséquent, la largeur spectrale est $\boxed{\frac{1}{\pi d} = \Delta \nu}$

V.4. Deux raies de longueurs d'onde différentes sont incohérentes, entre elles. Par conséquent, l'intensité recueillie est la "somme" des figures d'interférences créées par chaque composante spectrale de la source :

$$I(d) = \int \frac{dI}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{4\pi d \nu}{c} \right) \right]$$

$$\Rightarrow I(d) = I_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + \cos \left(\frac{4\pi d \nu}{c} \right)}{1 + 4\pi^2 d^2 (\nu - \nu_0)^2} d\nu$$

• Calcul de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\nu}{1 + 4\pi^2 d^2 (\nu - \nu_0)^2}$: cela ressemble à $\int \frac{du}{1+u^2}$

et la primitive de $\frac{1}{1+u^2}$ est $\arctan(u)$.

II.4 (suite)

Il vient
$$J = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} \quad \text{avec } u = 2\pi\epsilon_0(v-v_0)$$

ST 2012

Ep B

(11)

d'où
$$J = \frac{1}{2\epsilon_0}$$

* Grâce au résultat fourni, il vient.

$$I(d) = \frac{I_0}{2} \left[1 + \cos(2\pi v_0 z) \exp\left(-\frac{2d}{c\tau_c}\right) \right] \quad \text{avec } z = \frac{2d}{c}$$

* Remarque: ce résultat suggère un facteur de contraste égal à $\exp\left(-\frac{2d}{c\tau_c}\right)$.

II.5 * D'après le cours, les interférences ne s'observent que si $\delta = 2d < L_c = c\tau_c$ où le temps de cohérence de la source est d'autant plus grand que le spectre de la source est étroit.

* Quantitativement, on peut arbitrairement choisir comme critère $\exp\left(-\frac{2d}{c\tau_c}\right) < \frac{1}{100} \Rightarrow 2d > 5c\tau_c$.

On retrouve un ordre de ^{grandeur de} la longueur de cohérence à savoir $L_c \approx \frac{5}{2} c \tau_c \approx \frac{5}{2} \frac{c}{\pi \Delta\nu} \approx \frac{c}{\Delta\nu}$

* A.N. A la louche
$$L_c \approx \frac{3 \cdot 10^8}{2,5 \cdot 10^7} \approx 12 \text{ m.}$$

II.1 Plaçons-nous dans la trajectoire entre x et $x+dx$, pendant une petite durée dt , le nombre d'atomes qui passent dans un état excité vaut $dN = B N_1 P(x) dt dx$

Le milieu a alors pu émettre sur le faisceau incident une énergie $dE = dN \cdot (E_2 - E_1)$ et $dE = I(x) dt - I(x+dx) dt$

En conséquence,
$$-\frac{dI}{dx} = B(E_2 - E_1) N_1 P(x)$$

En intégrant, il vient
$$I(x) = I_0 \exp\left(-B N_1 (E_2 - E_1) x\right)$$

On reconnaît la loi de Beer-Lambert

VI.2 * Il s'agit d'une ample cinétique d'ordre 1:

$$\boxed{\frac{dN_2}{dt} = -A N_2(t)} \quad \text{avec } A \text{ en } s^{-1} \text{ ou en Hz}$$

* P. pométrie $A \sim 10^3 s^{-1}$ à $10^{10} s^{-1}$

BT 2012

Ep B

(12)

VI.3 En un raisonnement analogue à celui du VI.1, l'énergie fournie au faisceau pendant dt vaut:

$$dE_{\text{stimulée}} = B N_2 (E_2 - E_1) I(x) dt dx.$$

Finalement, le bilan de puissance est de la forme:

$$\boxed{\frac{dP}{dx} = B (E_2 - E_1) (N_2 - N_1) \cdot I(x)}.$$

VI.4 * Il y a une amplification si $N_2 > N_1$. Il s'agit d'une situation hors d'équilibre puisque l'état excité est alors plus peuplé que l'état fondamental.

* Question de culture générale (pas endente b):

Le grand monsieur qui élabore les méthodes de pompage optique, vers 1950, est Alfred Kastler (prix Nobel en 1966)

VI.5 * L'émission spontanée fournit des photons de directions aléatoires, incohérents avec les photons de l'émission stimulée. Malgré tout, c'est un mécanisme important pour amorcer les oscillations, "laser".

* Encore une question de culture générale:

LASER est un acronyme signifiant:

Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation.

FIN