

ENS-BCPST-2012
Les énergies renouvelables

1 Ordres de grandeur des ressources d'énergies renouvelables

1.1 Énergie géothermique

1. Comme $\vec{J}_G = -k \overrightarrow{\text{grad}T}$, on en déduit :

$$J_G = 2 \times \frac{1}{30} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15} = \boxed{6 \times 10^{-2} \text{ W.m}^{-2}}$$

2. Du rapport de la puissance P par le flux thermique, on en déduit S la surface nécessaire :

$$S = \frac{P}{J_G} = \frac{7 \times 10^{10}}{6 \times 10^{-2}} \simeq 1 \times 10^{12} \text{ m}^2$$

Même avec un transfert sans perte, la surface considérable, supérieure à la surface de la France, ne permet pas d'envisager la géothermie pour fournir une part conséquente de la production électrique.

1.2 Énergie solaire

3. En utilisant la loi de Stefan :

$$J_L^S = \sigma T_S^4 = 6 \times 10^{-8} \times 6^4 \times 10^{12} = 6 \times 10^{-8+3+12} = \boxed{6 \times 10^7 \text{ W.m}^{-2}}$$

4. La conservation de l'énergie impose que l'énergie répartie à la surface du Soleil se retrouve sur une sphère ayant pour rayon la distance Terre-Soleil, ce qui donne pour le flux d'énergie à la surface de la Terre :

$$J_L^T \times 4\pi^2 d_{TS}^2 = J_L^S \times 4\pi^2 R_S^2 \quad \Leftrightarrow \quad J_L^T = J_L^S \left(\frac{R_S}{d_{TS}} \right)^2$$

$$J_L^T = 6 \times 10^7 \times \left(\frac{7 \times 10^8}{15 \times 10^{10}} \right)^2 = 6 \times 10^7 \times 0,2 \times 10^{-4} = \boxed{1 \times 10^3 \text{ W.m}^{-2}}$$

5. Pour le flux moyenné : $\boxed{5 \times 10^2 \text{ W.m}^{-2}}$.

6. Pour la surface nécessaire dans le cadre de cette situation optimisée :

$$S = \frac{7 \times 10^{10}}{5 \times 10^2} = \boxed{1 \times 10^8 \text{ m}^2}$$

2 Transport d'énergie électrique en régime sinusoïdal

2.1 Généralités

7. Par définition de la puissance moyenne :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)i(t)dt = \frac{u_m i_m}{T} \int_0^T \cos(\omega t) \cos(\omega t + \phi) dt = \frac{u_m i_m}{2T} \int_0^T [\cos(2\omega t + \phi) + \cos(\phi)] dt$$

$$\boxed{\langle \mathcal{P} \rangle = U_{eff} I_{eff} \cos \phi}$$

8. Partons de la formule proposée :

$$\frac{1}{2} \Re(u_m \exp(j\omega t) i_m \exp(-j\omega t - j\phi)) = \frac{1}{2} \Re(u_m i_m \exp(-j\phi)) = \frac{1}{2} \Re(u_m i_m \exp(-j\phi)) = \frac{u_m i_m}{2} \cos \phi$$

Nous retrouvons bien la formule de la question précédente.

9. Pour les amplitudes complexes :

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{U}_m}{\underline{Z}} \quad \Leftrightarrow \quad i_m e^{j\phi} = \frac{u_m}{|Z|} e^{-j\theta} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{i_m = \frac{u_m}{|Z|}} \quad \text{et} \quad \phi = -\theta$$

avec $\theta = \arg \underline{Z}$.

2.2 Exemple d'une ligne à haute tension

10. On utilise la formule démontrée à la question 8 :

$$\langle \mathcal{P}_f \rangle = \frac{1}{2} \Re \left(u_m \times \frac{u_m}{\underline{Z}^*} \right) = \frac{u_m^2}{2} \Re \left(\frac{1}{R_1 + R_2 - j(X_1 + X_2)} \right)$$

$$\langle \mathcal{P}_f \rangle = \frac{u_m^2}{2} \Re \left(\frac{R_1 + R_2 + j(X_1 + X_2)}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2} \right) = \boxed{\frac{u_m^2}{2} \frac{R_1 + R_2}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2}}$$

11. Pour la puissance reçue :

$$\langle \mathcal{P}_u \rangle = \frac{1}{2} \Re \left(\underline{u}_{2m} \times \frac{u_m}{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)^*} \right) = \frac{1}{2} \Re \left(\frac{u_m \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \times \frac{u_m}{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)^*} \right) = \frac{u_m^2}{2} \frac{\Re(\underline{Z}_2)}{|\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2|^2}$$

$$\boxed{\langle \mathcal{P}_u \rangle = \frac{u_m^2}{2} \frac{R_2}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2}}$$

12. Le rendement est défini par le rapport des puissances :

$$\boxed{\eta = \frac{P_u}{P_f} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}}$$

Le rendement est maximal pour $\boxed{R_1 = 0}$, dans ce cas toute la puissance fournie est dissipée dans le dipôle de l'utilisateur. Cependant il faut tenir compte de l'adaptation d'impédance (Cf. question suivante).

13. Pour optimiser la puissance P_u , on peut déjà choisir $X_2 = -X_1$ (possible pour la partie complexe de l'impédance), ce qui a pour effet de diminuer la valeur du dénominateur et d'augmenter d'autant la fraction ; on est alors ramené à l'expression :

$$P_u(X_2 = -X_1) = \frac{R_2}{(R_1 + R_2)^2} \frac{u_m^2}{2} = \frac{u_m^2}{2R_1} \frac{x}{(1+x)^2} \quad \text{avec} \quad x = R_2/R_1$$

Il s'agit donc d'étudier la fonction $x \rightarrow x/(1+x)^2$; cette fonction s'annule pour $x = 0$, pour $x \rightarrow \infty$ et passe par un maximum en $x = 1$, c'est à dire $R_2 = R_1$.

La puissance est maximale pour $X_2 = -X_1$ et $R_2 = R_1$ et pour ces valeurs $\boxed{P_u = \frac{U_m^2}{8R_1}}$.

Avec $R_1 = R_2$, le rendement vaut : $\boxed{\eta = 1/2}$.

14. On reprend les formules obtenues aux questions 10 et 11 avec $X_2 = -X_1$, la conservation de l'énergie impose :

$$P_J = P_f - P_u = \frac{R_1 + R_2}{(R_1 + R_2)^2} \frac{u_m^2}{2} - \frac{R_2}{(R_1 + R_2)^2} \frac{u_m^2}{2} = \frac{R_1}{(R_1 + R_2)^2} \frac{u_m^2}{2} = \frac{R_1 u_m^2}{2} \frac{4P_f^2}{u_m^4} = \boxed{\frac{2R_1 P_f^2}{u_m^2}}$$

À R_1 et P_f fixées, on constate que la puissance dissipée par effet Joule est d'autant plus faible que la tension u_m est importante, d'où l'intérêt des lignes haute tension pour minimiser les pertes en ligne.

15. Application numérique : avec $X_1 = L\omega = 0,1 \times 2\pi \times 50 \simeq 30 \, \Omega$

$$P_f = \frac{30}{30^2 + 30^2} \frac{10^8}{2} = \frac{10^8}{4 \times 30} \simeq \boxed{10^6 \, \text{W}}$$

$$\boxed{P_u = \frac{20}{30^2 + 30^2} \frac{10^8}{2} = \frac{2}{3} P_f} \quad \text{et} \quad \boxed{\eta = \frac{2}{3}}$$

3 Énergie hydraulique

3.1 Potentiel hydroélectrique

16. L'énergie potentielle E_p d'une masse m a pour expression : $E_p = mgH = \rho_{\text{eau}} \times V \times gH$; si cette masse s'écoule en une durée T , la puissance P_{hydro} vaut :

$$P_{\text{hydro}} = \frac{E_p}{T} = \frac{\rho_{\text{eau}} \times V \times gH}{T} = \frac{V}{T} \rho_{\text{eau}} gH = \boxed{Q \rho_{\text{eau}} gH}$$

ρ_{eau} et g sont des paramètres fixés, en revanche on peut optimiser H et Q en augmentant la taille du barrage.

3.2 Équilibre hydrostatique d'un barrage

17. Dans l'eau $P(z) = P_0 + \rho_{eau}g(H - z)$. La masse volumique de l'air est environ mille fois plus faible que celle de l'eau, il faut des hauteurs de l'ordre du kilomètre pour ressentir une baisse de pression significative.

18. Soit dF_x la composante des forces de pression due à l'eau s'exerçant sur une hauteur dz du barrage :

$$dF_x = (P_0 + \rho_{eau}g(H - z)) L dz \quad \text{donc} \quad F_{eau,x} = \int_0^H (P_0 + \rho_{eau}g(H - z)) L dz$$

Ce qui donne :

$$\vec{F}_{eau} = \left[P_0 LH + \frac{\rho_{eau}gLH^2}{2} \right] \vec{u}_x$$

Les forces dues à l'air s'exercent perpendiculairement à l'hypoténuse de la paroi :

$$\vec{F}_{air} = -P_0 LH (\vec{u}_x + \vec{u}_z)$$

Finalement pour la composante horizontale des forces de pression :

$$\vec{F} \cdot \vec{u}_x = (\vec{F}_{air} + \vec{F}_{eau}) \cdot \vec{u}_x = \frac{\rho_{eau}gLH^2}{2}$$

19. Équilibre du barrage :

★ Horizontalement les frottements équilibrent la composante horizontale de la force de pression :

$$\|\vec{F}_f\| = \frac{\rho_{eau}gLH^2}{2}$$

★ Verticalement, la réaction du sol équilibre le poids du barrage et la composante verticale de la force de pression de l'air :

$$\|\vec{R}\| = \rho_m \times \frac{LH^2}{2} \times g + P_0 LH = LH \left(P_0 + \rho_m \times g \frac{H}{2} \right)$$

L'inégalité impose :

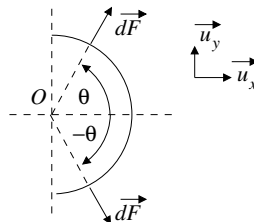
$$\frac{\rho_{eau}gLH^2}{2} \leq \mu LH \left(P_0 + \rho_m \times g \frac{H}{2} \right) \quad \text{donc} \quad \frac{\rho_{eau}gH}{2} \leq \mu \left(P_0 + \rho_m \times g \frac{H}{2} \right)$$

On sait qu'une colonne de 10 mètres d'eau est équivalent à une pression atmosphérique, donc pour une hauteur de 100 m, on peut, en première approximation, négliger le terme P_0 dans l'expression ci-dessus, ce qui permet d'obtenir la relation simplifiée :

$$\rho_{eau} \leq \mu \rho_m$$

Pour que l'inégalité soit vérifiée, il suffit que la masse volumique du mélange béton-gravats soit au moins le double de celle de l'eau ce qui semble tout à fait réalisable ; ainsi pour le béton normal, la masse volumique est de l'ordre de 2000 à 2600 kg.m⁻³.

20. Dans le cas des barrages "voûte", seule une partie des forces de pression s'ajoutent selon Ox , l'effort à supporter est donc moins important.



3.3 Écoulement à la sortie du barrage

21. Pendant dt , la hauteur de la retenue d'eau évolue de $dh < 0$, soit une variation de volume de $d\tau = -S_{re}dh$; à masse volumique fixée, ce volume doit se retrouver en sortie ; l'eau s'écoulant à la vitesse V , parcourt en dt une distance Vdt , soit un volume : $d\tau = SVdt$; la comparaison des deux expressions impose :

$$\frac{dh}{dt} = -V \frac{S}{S_{re}}$$

22. Pour l'écoulement irrotationnel et stationnaire d'un fluide incompressible et sans viscosité :

$$\frac{v^2}{2} + hg + \frac{p}{\rho} = cste$$

L'hypothèse de stationnarité est acceptable tant que le fluide s'écoule lentement dans le barrage, comme $S_{re} \gg S$, il est certain que $\left| \frac{dh}{dt} \right| \ll V$.

L'eau est un fluide très peu compressible ($X_T \simeq 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$).

En appliquant la relation à la situation étudiée pour un instant quelconque :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dh}{dt} \right)^2 + hg = \frac{1}{2} V^2 - H_1 g$$

En exprimant V en fonction de dh/dt , on obtient :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dh}{dt} \right)^2 \left[\frac{S_{re}}{S} - 1 \right] = (H_1 + h) g$$

Comme $S_{re} \gg S$, $(S_{re}/S) - 1 \simeq S_{re}/S$, ce qui donne :

$$\left(\frac{dh}{dt} \right)^2 = 2 \frac{S^2}{S_{re}^2} (H_1 + h) g$$

Comme la hauteur décroît au cours du temps, on retient la racine négative et finalement :

$$\boxed{\frac{dh}{dt} = -\frac{S}{S_{re}} \sqrt{2(H_1 + h)g}}$$

23. Comme $\psi'(t) = h'(t)$, on en déduit :

$$\frac{d\psi}{dt} = -\frac{S}{S_{re}} \sqrt{2g} \psi(t)^{1/2} \quad \text{donc} \quad \frac{d\psi}{\sqrt{\psi}} = -K dt$$

$$[2\psi^{1/2}]_{\psi(0)}^{\psi^*} = 2 \left(\sqrt{\psi^*} - \sqrt{\psi(0)} \right) = -K t^* \quad \text{donc} \quad \psi^* = \left((H_1 + H)^{1/2} - \frac{K t^*}{2} \right)^2$$

On détermine alors la hauteur h au cours du temps :

$$\boxed{h(t) = \left((H_1 + H)^{1/2} - \frac{K t}{2} \right)^2 - H_1}$$

Et finalement la vitesse :

$$\boxed{V = -\frac{S_{re}}{S} \frac{dh}{dt} = \frac{S_{re}}{S} K \left((H_1 + H)^{1/2} - \frac{K t}{2} \right)}$$

Mettre la turbine en profondeur permet d'augmenter fictivement la hauteur de la retenue d'eau sans que le barrage n'ait à supporter une plus forte pression.

24. Avec $H_1 = 0$, $h(t) = 0$ pour $\boxed{T_H = \frac{2\sqrt{H}}{K}}$.

Pour une vidange moitié : $h(T_{H/2}) = \frac{H}{2} = \left(\sqrt{H} - \frac{K T_{H/2}}{2} \right)^2$ donc :

$$\boxed{T_{H/2} = \frac{2\sqrt{H}}{K} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = T_H \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)}$$

Application numérique :

$$T_H = \frac{2\sqrt{H}}{K} = \frac{2 \times 10}{10^{-4} \sqrt{2} \sqrt{10}} = \sqrt{2} \times \sqrt{10} \times 10^4 \simeq \boxed{5 \times 10^4 \text{ s}} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{T_{H/2}}{T_H} = 0,3}$$

25. $P_{hydro} = SV(t) \times \rho_{eau} g h(t) = S_{re} K \left(\sqrt{H} - \frac{K t}{2} \right) \times \rho_{eau} g \times \left(\sqrt{H} - \frac{K t}{2} \right)^2$:

$$\boxed{P_{hydro}(t) = S_{re} K \rho_{eau} g \left(\sqrt{H} - \frac{K t}{2} \right)^3}$$

Au début de la vidange :

$$\boxed{P_{hydro}(0) = S_{re} K \rho_{eau} g H^{3/2} = 10^4 \times 10^{-4} \times \sqrt{20} \times 10^4 \times 10^3 \simeq 4,5 \times 10^7 \text{ W}}$$

26. Pour obtenir l'énergie, il faut intégrer l'expression de la puissance :

$$E_{hydro}(T) = \int_0^T S_{re} K \rho_{eau} g \left(\sqrt{H} - \frac{Kt}{2} \right)^3 dt = S_{re} K \rho_{eau} g \left[-\frac{1}{2K} \left(\sqrt{H} - \frac{Kt}{2} \right)^4 \right]_0^T$$

$$E_{hydro}(T) = \frac{S_{re} \rho_{eau} g}{2} \left[H^2 - \left(\sqrt{H} - \frac{KT}{2} \right)^4 \right]$$

★ Pour $T = T_H = \frac{2\sqrt{H}}{K}$: $E_{hydro}(T_H) = \frac{S_{re} \rho_{eau} g H^2}{2}$

Ce résultat est logique, il s'agit de l'énergie potentielle d'un volume HS_{re} d'eau dont le centre de gravité est situé initialement en $H/2$.

★ Pour $T = T_{H/2}$: $E_{hydro}(T_{H/2}) = \frac{3}{4} \frac{S_{re} \rho_{eau} g H^2}{2} = \frac{3}{4} E_{hydro}(T_H)$

Ce résultat est aussi prévisible, il s'agit de l'énergie potentielle d'un volume $HS_{re}/2$ d'eau dont le centre de gravité est situé initialement en $3H/4$.

On constate qu'en seulement 30% du temps total, on vide la moitié de l'eau du barrage et on récupère les 3/4 de l'énergie.

3.4 Étude de la turbine Pelton

27. Dans le référentiel lié à l'auget :

★ $u_s \rightarrow u_s + u_c$ et $u_j \rightarrow u_j - u_c$.

À altitude et pression constantes, la relation de Bernoulli se simplifie selon :

$$\frac{(u_j - u_c)^2}{2} = \frac{(u_s + u_c)^2}{2} \quad \text{donc} \quad u_j - u_c = -(u_s + u_c)$$

Le signe "-" venant des orientations opposées des vecteurs sur le schéma et finalement :

$$u_s = -u_j + 2u_c$$

28. Considérons le jet symbolisé sur le schéma, pendant dt :

★ augmentation d'une quantité de mouvement en sortie de $\rho_{eau} Q_j dt u_s$,

★ diminution d'une quantité de mouvement en entrée de $\rho_{eau} Q_j dt u_j$.

Le deuxième loi de Newton appliquée à ce jet donne :

$$\rho_{eau} Q_j dt u_s - \rho_{eau} Q_j dt u_j = F_{auget \rightarrow fluide} dt$$

De la troisième loi de Newton, on déduit finalement :

$$F_{fluide \rightarrow auget} = \rho_{eau} Q_j (u_j - u_s)$$

29. En multipliant la force par la vitesse de l'auget, on en déduit la puissance :

$$P_c = \rho_{eau} Q_j (u_j - (-u_j + 2u_c)) u_c = 2\rho_{eau} Q_j (u_j - u_c) u_c$$

u_j étant fixé par le débit du barrage, il s'agit plutôt d'étudier P_c en fonction de $u_c/u_j = x$, c'est à dire :

$$P_c = 2\rho_{eau} Q_j u_j^2 (1 - x)x$$

La fonction $x \rightarrow (1 - x)x$ est nulle pour $x = 0$ et $x = 1$ et maximale pour $x = 1/2$; dans cette situation $u_c = u_j/2$ et la puissance vaut :

$$P_c^{max} = 2\rho_{eau} Q_j \frac{u_j^2}{4} = \frac{\rho_{eau} Q_j u_j^2}{2}$$

Avec $u_c = u_j/2$ le rendement est de 1 car $u_s = 0$ et la totalité de l'énergie cinétique de translation est transformée en énergie cinétique de rotation.

4 Énergie éolienne

4.1 Estimation de l'énergie du vent

30. En utilisant l'équation des gaz parfaits :

$$P = \frac{\rho RT}{M} \Leftrightarrow \rho = \frac{PM}{RT} = \frac{10^5 \times 3 \times 10^{-2}}{8,31 \times 3 \times 10^2} \simeq \boxed{1 \text{ kg.m}^{-3}}$$

31. On utilise l'équation de Bernoulli en ordre de grandeur :

$$v^2 = \frac{2\Delta p}{\rho} \quad \text{donc} \quad v = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 \times 100}{1}} \simeq \boxed{14 \text{ m.s}^{-1}}$$

32. Considérons une masse d'air qui va traverser la section S pendant dt en se déplaçant à la vitesse v ; cette masse d'air est contenue dans un volume $Svdt$ et représente une énergie cinétique : $dE_c = \rho Svdtv^2/2$; le flux d'énergie cinétique par unité de surface a donc pour expression :

$$\boxed{\frac{1}{S} \frac{dE_c}{dt} = \frac{\rho v^3}{2}}$$

Avec une surface d'aire $S_e = 100 \text{ m}^2$, la puissance P_e de l'éolienne vaut :

$$P_e = \frac{\rho v^3 S}{2} = \frac{1 \times 14^3 \times 100}{2} = \frac{1,4 \times 1,4^2 \times 10^5}{2} \simeq \boxed{1,4 \times 10^5 \text{ W}}$$

Il faudrait de l'ordre de 500 000 éoliennes de 150 kW pour répondre à la demande électrique.

4.2 Extraction de l'énergie du vent par une éolienne

33. On considère l'air compris à l'instant t dans le tube de courant entre A_0 et A_2 ; pendant la durée dt , la partie centrale du système n'est pas modifiée (régime permanent), il faut :

★ ajouter un volume $A_2 u_2 dt$ qui sort du tube à la vitesse u_2 ,

★ retrancher un volume $A_0 u_0 dt$ qui entre dans le tube à la vitesse u_0 .

L'écoulement étant supposé incompressible, la masse volumique peut être supposée constante, de plus si $A_2 = A_0$, on peut négliger l'influence des forces de pression et en appliquant la deuxième loi de Newton au système considéré, on en déduit :

$$(A_2 u_2 dt \rho) u_2 - (A_0 u_0 dt \rho) u_0 = F_{\text{turbine} \rightarrow \text{air}} dt$$

Pour un régime stationnaire, le débit volumique est constant $Q_a = A_2 u_2 = A_0 u_0$:

$$\boxed{F_{\text{air} \rightarrow \text{turbine}} = -F_{\text{turbine} \rightarrow \text{air}} = Q_a \rho (u_0 - u_2)}$$

Ce qui donne pour la puissance :

$$\boxed{P_v = Q_a \rho (u_0 - u_2) u_1 = \rho (u_0 - u_2) A_1 u_1^2}$$

34. Relation de Bernoulli :

$$\star \text{ En amont : } \frac{u_0^2}{2} + \frac{P_0}{\rho} = \frac{u_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho} \text{ donc } P_1 = P_0 + \frac{\rho}{2} (u_0^2 - u_1^2)$$

$$\star \text{ En aval : } \frac{u_1^2}{2} + \frac{P_2}{\rho} = \frac{u_2^2}{2} + \frac{P_0}{\rho} \text{ donc } P_2 = P_0 + \frac{\rho}{2} (u_2^2 - u_1^2)$$

On en déduit alors la force comme différence des forces de pression :

$$F_x = (P_1 - P_2) A_1 = \frac{\rho A_1}{2} (u_0^2 - u_2^2)$$

et finalement la puissance :

$$\boxed{P_v = \frac{\rho A_1 u_1}{2} (u_0^2 - u_2^2)}$$

35. En égalant les deux puissances, on obtient : $\boxed{u_1 = \frac{u_0 + u_2}{2}}$; on peut alors exprimer la puissance :

$$\boxed{P_v = \frac{\rho A_1}{4} (u_0 + u_2) (u_0^2 - u_2^2)}$$

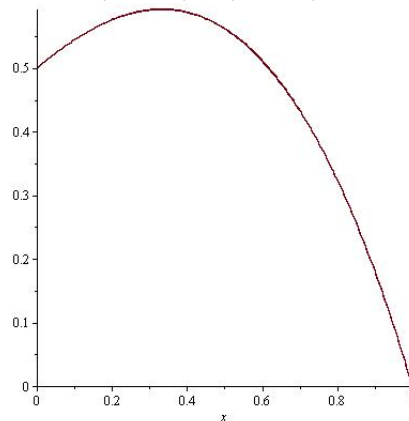
36. Justification : Cf. question 32.

$$\boxed{r = \frac{P_v}{P_0} = \frac{1}{2} (1 + x) (1 - x^2)}$$

La courbe ci-après représente le rendement en fonction de x .

la fonction passe par un maximum pour $x = 1/3$; en ce point le rendement vaut :

$$r_{max} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{8}{9} = \boxed{\frac{16}{27}}$$

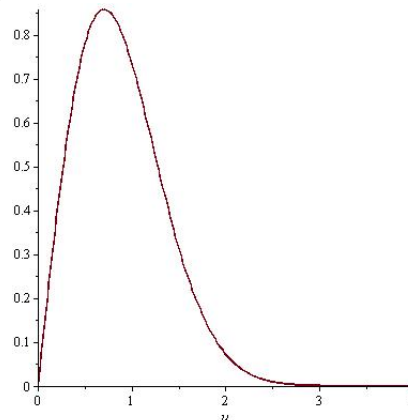


37. On cherche A_1 telle que :

$$1 \times 10^5 = r \times \frac{1}{2} \rho A_1 u_0^3 \quad \text{donc} \quad A_1 = \frac{2 \times 10^5}{0,6 \times 10^3} = \boxed{4 \times 10^2 \text{ m}^2}$$

En supposant $A_1 = \pi l^2$ avec l le rayon des pales, on obtient : $\boxed{l \simeq 10 \text{ m}}$ pour le rayon des pales.

38. Allure de la courbe : on représente $f(u)$ avec $c = 1$ pour simplifier :



En intégrant sur une longue durée, tous les vitesses seront représentées et, pour la puissance moyenne :

$$\langle P_v \rangle = \frac{r \rho A_1}{c^2} \int_0^\infty u^4 e^{-u^2/c^2} du = r \rho A_1 c^3 \int_0^\infty x^4 e^{-x^2} dx = r \rho A_1 c^3 \times \frac{3\sqrt{\pi}}{8} = r \rho A_1 \frac{8 \langle u_0 \rangle^3}{\pi^{3/2}} \times \frac{3\sqrt{\pi}}{8}$$

$$\langle P_v \rangle = \frac{3r \rho A_1 \langle u_0 \rangle^3}{\pi} \quad \text{et} \quad P_v(\langle u_0 \rangle) = \frac{r \rho A_1 \langle u_0 \rangle^3}{2} \quad \text{donc} \quad \boxed{\langle P_v \rangle = \frac{6}{\pi} P_v(\langle u_0 \rangle)}$$

5 L'énergie solaire

5.1 Étude d'une machine thermique

39. Cf. cours ; démonstration de la détente de Joule-Kelvin.

40. Pour un gaz parfait, l'enthalpie est fonction de la seule variable température :

$$\boxed{\Delta h = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} (T_2 - T_1)}$$

41. Pour la transformation adiabatique réversible d'un gaz parfait, on utilise la loi de Laplace :

$$P_B^{1-\gamma} T_B^\gamma = P_A^{1-\gamma} T_A^\gamma \quad \text{donc} \quad \boxed{T_B = T_A \left(\frac{P_B}{P_0} \right)^{(\gamma-1)/\gamma}}$$

On applique alors le premier principe tel que démontré à la question précédente :

$$\mathcal{P}_{AB} = \frac{\gamma R D_m}{\gamma - 1} (T_B - T_A) = \boxed{\frac{\gamma R D_m}{\gamma - 1} T_B \left(1 - \left(\frac{P_B}{P_0} \right)^{(1-\gamma)/\gamma} \right)}$$

La puissance mécanique pour une compression est nécessairement positive.

Pour la transformation entre B et C :

$$\boxed{\mathcal{P}_T = \frac{\gamma R D_m}{\gamma - 1} (T_C - T_B)}$$

On utilise à nouveau la loi de Laplace entre C et D :

$$P_D^{1-\gamma} T_D^\gamma = P_C^{1-\gamma} T_C^\gamma \quad \text{donc} \quad T_D = T_C \left(\frac{P_B}{P_0} \right)^{(1-\gamma)/\gamma}$$

Pour la transformation CD , avec $P_{CD} < 0$ la puissance fournie par la turbine :

$$\boxed{\mathcal{P}_{CD} = \frac{\gamma R D_m}{\gamma - 1} T_C \left(\left(\frac{P_B}{P_0} \right)^{(1-\gamma)/\gamma} - 1 \right)}$$

42. Ce qui conduit à un rendement :

$$\boxed{\eta = \frac{-\mathcal{P}_{CD} - \mathcal{P}_{AB}}{\mathcal{P}_T} = 1 - \left(\frac{P_B}{P_0} \right)^{(1-\gamma)/\gamma} = 1 - 7^{-2/7} = 0,43}$$

C'est à dire une puissance mécanique de l'ordre de $\boxed{4 \times 10^5 \text{ W}}$

6 Énergie des vagues

6.1 Potentiel houlomoteur

43. $e_p(z) = \rho_{eau} g z$. On obtient par intégration :

$$E_{pv} = \int_0^\lambda dx \int_0^{h(x)} dz e_p(z) = \int_0^\lambda \left(\int_0^{h(x)} \rho_{eau} g z \right) dx = \int_0^\lambda \rho_{eau} g \frac{h(x)^2}{2} dx$$

$$E_{pv} = \int_0^\lambda \rho_{eau} g \frac{a^2 \sin^2(kx)}{2} dx = \frac{\rho_{eau} g a^2}{4} \int_0^\lambda 1 - \cos(2kx) dx = \frac{\rho_{eau} g a^2}{4} \int_0^\lambda 1 dx = \boxed{\frac{\rho_{eau} g a^2 \lambda}{4}}$$

44. Comme $\dot{x}(t) = -a\omega e^{kz} \sin(\omega t - kx)$ et $\dot{z}(t) = a\omega e^{kz} \cos(\omega t - kx)$, on détermine l'énergie cinétique volumique :

$$e_{cz} = \frac{1}{2} \rho_{eau} (\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = \frac{\rho_{eau} a^2 \omega^2 e^{2kz}}{2}$$

On obtient l'énergie cinétique par intégration :

$$E_{cv} = \int_0^\lambda dx \int_{-\infty}^{h(x)} \frac{\rho_{eau} a^2 \omega^2 e^{2kz}}{2} dz = \frac{\rho_{eau} a^2 \omega^2}{4k} \int_0^\lambda e^{2kh(x)} dx$$

Comme $kh(x) \ll 1$, $e^{2kh(x)} \simeq 1 + 2kh(x)$ et l'intégrale sur une période du sinus étant nulle, on en déduit :

$$\boxed{E_{cv} = \frac{\rho_{eau} a^2 \omega^2 \lambda}{4k}}$$

45. En égalant les deux expressions on aboutit à $\omega^2 = gk$, ce qui donne pour la longueur d'onde :

$$4\pi^2 f^2 = \frac{g \times 2\pi}{\lambda} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\lambda = \frac{g}{2\pi f^2} = \frac{10}{2\pi \times 0,1^2} \simeq 150 \text{ m}}$$

46. Énergie mécanique : $E_M = E_{cv} + E_{pv} = 2E_{pv} = \frac{\rho_{eau} g a^2 \lambda}{2}$.

c_g/λ est homogène à l'inverse d'un temps, E_M est une énergie par unité de longueur, $\mathcal{P}_v$ a donc bien l'unité souhaitée.

$$\mathcal{P}_v = \frac{\rho_{eau} g^2 a^2}{4\omega} = \frac{\rho_{eau} g^2 a^2}{8\pi \times f} = \frac{10^3 \times 10^2}{8\pi \times 0,1} \simeq \frac{10^5}{2,5} \simeq \boxed{4 \times 10^4 \text{ W.m}^{-1}}$$

Il faudrait donc une longueur voisine de $\boxed{10^3 \text{ km}}$ pour répondre aux besoins électriques.

6.2 Récupération de l'énergie des vagues

47. Avec $x_p(t) = a \cos(\omega t)$ et $z_p(t) = a \sin(\omega t)$, on en déduit la force d'inertie d'entraînement :

$$\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_P = m\omega^2 [\cos(\omega t)\vec{u}_x + \sin(\omega t)\vec{u}_z]$$

Expression que l'on projette sur la base polaire :

$$\vec{F}_{ie} = m\omega^2 [\cos(\omega t)(\cos\alpha\vec{u}_\theta + \sin\alpha\vec{u}_r) + \sin(\omega t)(\sin\alpha\vec{u}_\theta - \cos\alpha\vec{u}_r)]$$

48. En projection sur la direction orthoradiale, le principe fondamental de la dynamique conduit à :

$$mL\ddot{\alpha} = -mg \sin\alpha - KL\dot{\alpha} + m\omega^2 (\cos(\omega t) \cos\alpha + \sin(\omega t) \sin\alpha)$$

$$\ddot{\alpha} + \frac{K}{m}\dot{\alpha} + \frac{g}{L}\sin\alpha = \frac{a}{L}\omega^2 (\cos(\omega t) \cos\alpha + \sin(\omega t) \sin\alpha)$$

49. Pour les petites angles et à l'ordre 1 en α , $\cos\alpha \simeq 1$ et $\sin\alpha \simeq \alpha$:

$$\ddot{\alpha} + \frac{K}{m}\dot{\alpha} + \frac{g}{L}\alpha = \frac{a}{L}\omega^2 (\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\alpha)$$

L'oscillation est due au terme $\vec{F}_{ie}$, α sera, en régime linéaire, proportionnel à l'amplitude a des vagues ; le terme en $a\alpha$ est donc en réalité un terme d'ordre 2 en α et on peut le négliger dans le cadre d'une analyse des petits mouvements ; l'équation se simplifie selon :

$$\ddot{\alpha} + \frac{K}{m}\dot{\alpha} + \frac{g}{L}\alpha = \frac{a}{L}\omega^2 \cos(\omega t)$$

50. La méthode des amplitudes complexes est applicable pour des équations linéaires à coefficients réels. La solution obtenue est celle du régime forcé, une fois le régime transitoire atténué.

L'amplitude complexe vérifie l'équation :

$$-\omega^2 \underline{A} + j\omega\beta \underline{A} + \omega_0^2 \underline{A} = \frac{a}{L}\omega^2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{A} = \frac{a}{L} \frac{\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\omega\beta}$$

On en déduit :

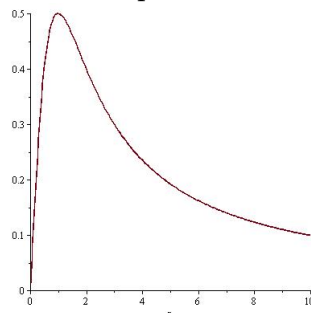
$$\alpha(t) = \frac{a}{L} \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\beta^2}} \cos(\omega t + \varphi)$$

L'expression précise du déphasage n'est pas utile pour la suite.

51. La puissance de la force de frottements, $P = -K\vec{v} \cdot \vec{v}$, permet de récupérer une puissance $Kv^2 = KL^2 \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2$; en intégrant sur une période, on obtient l'énergie récupérée :

$$W_{el} = \int_0^T KL^2 \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 dt = \frac{Ka^2\omega^6}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\beta^2} \int_0^T \sin^2(\omega t + \varphi) dt = \frac{TKa^2\omega^6}{2[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2K^2/m^2]}$$

$W_{el} = 0$ pour $K = 0$ et $K \rightarrow +\infty$; la courbe a pour allure :



En l'absence de dissipation, il n'y a pas d'énergie récupérée ; pour une dissipation trop forte, le pendule reste immobile ; il y a donc nécessairement une valeur optimale pour K .