

Première épreuve de Physique

Filière MP

Durée de l'épreuve : 3 heures

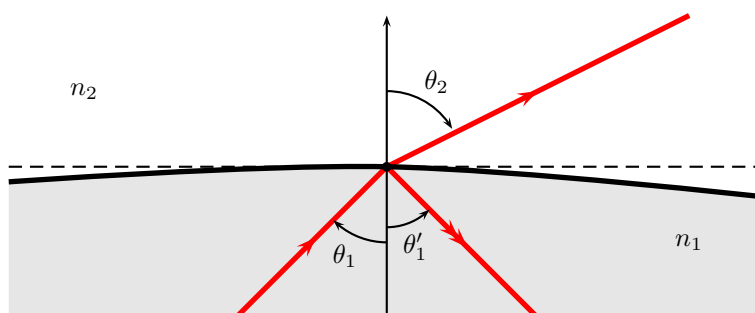
Solution proposée

Propagation de la lumière

Le problème comporte une étude classique (optique géométrique et diffraction, équations de propagation) des ondes lumineuses et de leur propagation dans le vide ou dans des milieux transparents. La suite du sujet est consacrée à l'étude d'une version classique (*i.e.* non quantique) de l'équation de Klein-Gordon ; celle-ci a été introduite en 1926 par ses auteurs pour proposer une version quantique de la relation entre énergie et quantité de mouvement d'une particule massive, sans spin. Le sujet (pratiquement commun aux filières MP et PC) décrit quelques conséquences des modifications des équations de Maxwell nécessaires pour obtenir l'équation de Klein-Gordon, en lieu et place de l'équation de D'Alembert.

I : Propagation géométrique de la lumière

1. Lorsqu'un rayon lumineux aborde la surface de séparation (dioptre) entre deux milieux transparents d'indices n_1 et n_2 , il donne lieu à deux rayons, réfracté et réfléchi. Ces deux rayons se propagent tous deux dans le plan d'incidence, plan défini par le rayon incident et la normale, au point d'incidence, au dioptre (*cf.* schéma).



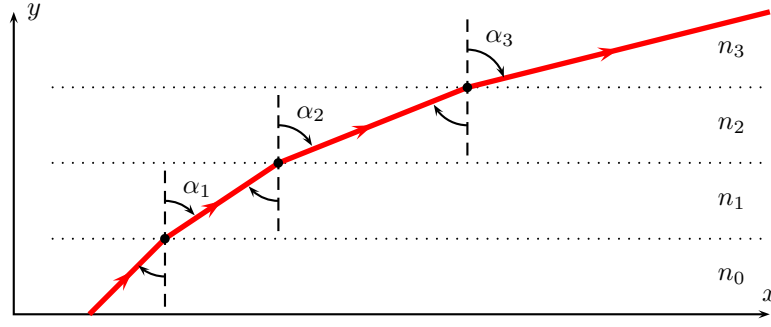
On peut dès lors définir dans ce plan les angles formés par le rayon incident (θ_1), le rayon réfléchi (θ'_1) et le rayon réfracté (θ_2) avec la normale au dioptre. Ces angles sont orientés (*cf.* figure) et définis respectivement pour les deux premiers dans le milieu d'indice n_2 , pour le dernier dans le milieu d'indice n_1 .

La seconde loi de Descartes précise les relations entre ces angles : $\theta'_1 = -\theta_1$ pour le rayon réfléchi (qui existe toujours, sauf cas très particulier d'incidence et de polarisation) et $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ pour le rayon réfracté (qui n'existe pas dans le seul cas où cette équation n'a pas de solution réelle pour θ_2 ; on parle alors de réflexion totale, *cf.* ci-après).

Ces lois ont été énoncées par le français RENÉ DESCARTES (dans l'ouvrage *La Dioptrique*) en 1637. Toutefois, on devrait leur donner le nom du néerlandais WILLEBROD SNELL VAN ROYEN qui les a vraisemblablement énoncé (mais non publié) en premier, entre 1611 et 1622. Ces lois avaient en fait été énoncées (et publiées sous forme de manuscrit) pour la première fois en 984 par le persan ABU SAD IBN SAHL, à Bagdad. On peut donc admettre ici deux réponses, le XVII^e siècle ou le XV^e siècle. . .

2. La relation $\sin i_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin i_1$ n'a de solution (et il n'existe un rayon réfracté) que si $\sin i_2 < 1$, c'est-à-dire si $i_1 < \alpha_{\text{lim}}$ où $\sin \alpha_{\text{lim}} = \frac{n_2}{n_1}$; cette limite n'a bien sûr de sens que si $n_2 < n_1$ (dans le cas contraire, on n'observe pas de phénomène de réflexion totale).

3. Le plan d'incidence du premier rayon est le plan (Oxy) ; il se conserve donc de réfraction en réfraction, la normale aux dioptres successifs étant toujours confondue avec $\hat{e}_y$. Le rayon est donc une courbe plane du plan (Oxy) . L'angle d'incidence sur le dioptre séparant les indices n_i et n_j est $\theta_i = \frac{\pi}{2} - \alpha_i$ d'où la loi de Descartes dans ce cas, $n_i \cos \alpha_i = n_j \cos \alpha_j$. Comme n_i est une fonction décroissante de i , α_i est donc une fonction croissante de i et le rayon s'incurve toujours en direction de l'axe (Ox) , *cf.* figure.



4. On généralise immédiatement le résultat précédent en $n(y) \cos \alpha(y) = C_0$ dans le cas d'une trajectoire dans un milieu continu. Il suffit de remarquer que $\cos \alpha(y) = \frac{dx}{ds}$ pour en déduire $C_0 = n(y) \frac{dx}{ds}$.

5. Cette équation s'écrit aussi $C_0^2 = n^2(y) \frac{dx^2}{dx^2 + dy^2}$ qu'on écrira plutôt $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{n^2(y)}{C_0^2}$ ou, par dérivation relativement à x , $2 \frac{dy}{dx^2} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{C_0^2} \frac{d}{dy} (n^2(y)) \frac{dy}{dx}$. En dehors des points où le rayon devient parallèle à l'axe (Ox),

$\frac{dy}{dx} \neq 0$ et on trouve bien l'équation différentielle demandée, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{d}{dy} \left(-\frac{n^2(y)}{\beta} \right)$ à condition de poser

$\beta = 2C_0^2$. On admettra que cette équation peut être, par prolongement dérivable du rayon lumineux, étendue aux points où $\frac{dy}{dx} = 0$.

Dans le cas du mouvement d'un point matériel le long d'un axe (Oy) au cours du temps, sous l'action d'une force conservative dérivant de l'énergie potentielle $E_p(y)$, le principe fondamental de la dynamique s'écrit

$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{d}{dy} \left(\frac{E_p(y)}{m} \right)$, la masse m jouant le rôle de la constante β et la trajectoire $y(x)$ du rayon lumineux étant représentée par la loi horaire $y(t)$. Le rayon lumineux est bien, sur le schéma ci-dessus, incurvé vers les zones d'indice maximal, donc d'énergie potentielle minimale.

6. Reportant n^2 dans l'équation du rayon lumineux, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{k}{C_0^2} y$. Si $k < 0$ et la trajectoire est **sinusoïdale**,

avec $y(x) = y_0 \sin \left(\sqrt{-k} \frac{x}{C_0} \right)$: c'est le cas d'une **fibre optique**, le rayon restant confiné à distance finie

de l'axe (Ox) de la fibre. Avec $k > 0$, la trajectoire est **hyperbolique** avec $y(x) = y_0 \text{sh} \left(\sqrt{k} \frac{x}{C_0} \right)$: c'est le

cas d'un **mirage**, le rayon lumineux s'éloignant de la trajectoire rectiligne qu'on observerait dans un milieu homogène.

II : Nature ondulatoire de la lumière

II.A – Propagation dans le vide

7. C'est une question de cours, on cite par exemple d'abord les équations de structure $\text{div } \vec{B} = 0$ et

$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ puis les équations aux sources $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ et $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$; dans le vide, ces deux

dernières deviennent $\text{div } \vec{E} = 0$ et $\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Le vecteur de Poynting est, par définition $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$

et la densité volumique d'énergie électromagnétique $u_{em} = \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}$.

8. L'équation locale de Poynting s'écrit dans le cas général $\text{div } \vec{\Pi} + \frac{\partial u_{em}}{\partial t} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$ donc, dans le vide où

$\vec{j} = \vec{0}$, elle prend la forme $\text{div } \vec{\Pi} + \frac{\partial u_{em}}{\partial t} = 0$. Elle est analogue de l'équation de conservation de la charge

électrique $\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ et de l'équation de bilan thermique local $\text{div } \vec{j}_{th} + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = p_\ell$, reliant la densité

volumique de courant thermique $\vec{j}_{th}$, la capacité thermique massique c et la masse volumique ρ (donc l'énergie interne massique ρcT) et la densité volumique d'apports de puissance mécanique ou thermique p_ℓ . Cette équation traduit donc la conservation de l'énergie électromagnétique car la puissance rayonnée à travers une surface

orientée S est le flux du vecteur de Poynting, $\mathcal{P}_{rad} = \int \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}$, l' énergie électromagnétique stockée dans un

volume fini est l'intégrale $W_{em} = \int u_{em} d\tau$, tandis que la puissance transférée par le champ électromagnétique

aux particules chargées s'écrit $\mathcal{P}_j = \int \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau$ (ce terme est nul dans le vide). Ainsi, le bilan énergétique

électromagnétique d'un volume fermé *vide* prend la forme $-\frac{dW_{em}}{dt} = \mathcal{P}_{rad}$: la diminution de l'énergie d'un volume donné est la puissance rayonnée hors de ce volume.

9. Puisque $\text{div } \vec{B} = 0$, il existe au moins un vecteur $\vec{A}$ tel que $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$. On en déduit $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \text{rot } \vec{A}}{\partial t}$ qu'on peut recopier $\text{rot } \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0}$; il existe donc au moins un scalaire V tel que ce $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\text{grad } V$

ou $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } V$. On en déduit $\vec{\Psi} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad } V + \imath c \text{rot } \vec{A}$. Les deux équations aux divergences

imposent $\text{div } \vec{\Psi} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ tandis que les deux équations aux rotationnels imposent $\text{rot } \vec{\Psi} = \frac{\imath}{c} \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial t} + \imath \mu_0 c \vec{j}$. Dans

le vide, ces équations se ramènent à $\text{div } \vec{\Psi} = 0$ et $\text{rot } \vec{\Psi} = \frac{\imath}{c} \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial t}$.

10. On obtient immédiatement $\vec{\Psi}^* \cdot \vec{\Psi} = \vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2$ donc, compte tenu que $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$, $\vec{\Psi}^* \cdot \vec{\Psi} = \frac{2u_{em}}{\varepsilon_0}$. De

même, $\vec{\Psi}^* \wedge \vec{\Psi} = 2\imath c \vec{E} \wedge \vec{B}$ donc $\vec{\Psi}^* \wedge \vec{\Psi} = 2\imath \mu_0 c \vec{\Pi}$.

11. Compte tenu de $\text{div } \vec{\Psi} = 0$, le double rotationnel du vecteur de Riemann-Silberstein est $\text{rot } \text{rot } \vec{\Psi} = -\Delta \vec{\Psi}$; on a aussi $\text{rot } \text{rot } \vec{\Psi} = \frac{\imath}{c} \frac{\partial \text{rot } \vec{\Psi}}{\partial t}$ soit enfin $-\Delta \vec{\Psi} = \frac{\imath^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\Psi}}{\partial t^2}$ qui est l' équation de D'Alembert, écrite sous sa

forme complexe $\Delta \vec{\Psi} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\Psi}}{\partial t^2}$ ou bien dont on peut déduire les parties réelle $\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ et imaginaire

$\Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$ (à un facteur multiplicatif $1/c$ près). Reportant la structure d'onde plane $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{\imath(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$

dans l'équation de D'Alembert avec $\frac{\partial}{\partial t} = \imath \omega$ et $\vec{\nabla} = -\imath \vec{k}$, on trouve l'équation de dispersion des ondes planes dans le vide $\omega = c \|\vec{k}\|$ qui, après multiplication par la constante de Planck réduite $\hbar$, s'écrit $E_\gamma = c \|\vec{p}_\gamma\|$.

12. On calcule d'abord, toujours en notations complexes, $\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}$ (par application de l'équation de Maxwell-

Faraday) soit $\vec{B} = \frac{E_0}{c} e^{\imath(\omega t - k z)} \hat{e}_y$; on en déduit ensuite $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{2\mu_0} \right)$ en se limitant aux valeurs

moyennes temporelles, soit aussi $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \hat{e}_x$. De la même manière, l'énergie électromagnétique volumique

moyenne s'écrit $\langle u_{em} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E} \cdot \vec{E}^* + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B} \cdot \vec{B}^* \right)$ ou, après simplifications, $\langle u_{em} \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}$.

L'énergie contenue dans un cylindre élémentaire est $\delta^2 W_{cy1} = \langle u_{em} \rangle dS d\ell$ tandis que celle qui traverse l'élé-

ment de surface dS par unité de temps est le flux du vecteur de Poynting moyen, $\delta^2 W_{tr} = \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot \hat{e}_x dS dt$. Si

on identifie ces deux termes avec $d\ell = v_E dt$, et compte tenu de $\varepsilon_0 \mu_0 c^2$, on trouve $v_E = c$, conformément à l'interprétation générale de la vitesse (de groupe) de l'équation de D'Alembert.

II.B – Propagation dans un diélectrique

13. Il suffit de remplacer ε_0 pour obtenir la nouvelle équation de propagation $\Delta \vec{\Psi} = \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\Psi}}{\partial t^2}$; la relation de dispersion devient $\omega = \frac{c}{n} \|\vec{k}\|$ et la vitesse de phase $\omega / \|\vec{k}\|$ devient donc $v_\varphi = \frac{c}{n}$.

14. Rappelons ici le principe de Huygens et Fresnel, dans le cadre duquel nous répondrons à cette question. Pour le calcul de l'onde diffractée dans la direction θ , on peut considérer que tous les points P de la pupille (Oxy) sont des sources d'ondes cohérentes entre elle, chaque onde étant proportionnelle à l'amplitude complexe de l'onde incidente en P et à l'élément de surface $dS = dxdy$. Enfin, ces ondes sont décrites dans l'approximation scalaire.

On peut d'abord calculer l'amplitude de l'onde (plane) incidente sous la forme $\underline{A}_{\text{inc}} = \underline{A}_0 e^{-i \frac{n_1 \omega}{c} \hat{u}_1 \cdot \vec{r}}$ puisque le vecteur d'onde dans le milieu d'indice n_1 a pour norme $k_1 = \frac{n_1 \omega}{c}$ et pour direction $\hat{u}_1 = \cos \alpha \hat{e}_z + \sin \alpha \hat{e}_x$; on peut donc écrire, en $P(x, y, z = 0)$ l'amplitude $\underline{A}_{\text{inc}}(x) = \underline{A}_0 e^{-i \frac{n_1 \omega}{c} \sin \alpha x}$. L'onde diffractée depuis un élément de surface a donc une amplitude $d\underline{A}(P) = \kappa \underline{A}_{\text{inc}}(x) dxdy$, où on ne cherchera pas à expliciter la constante κ . Cette onde aura pour amplitude, au point M d'observation, $d\underline{A}(M) = d\underline{A}(P) e^{-i \frac{\omega}{c} (PM)}$ où le chemin optique (PM) peut s'exprimer à partir du chemin optique de référence (OM) selon $(PM) = (OM) - \delta$ avec pour différence de marche $\delta = n_2 \sin \theta x$.

Finalement, $d\underline{A}(M) = \kappa \underline{A}_0 e^{-i \frac{\omega}{c} (OM)} e^{i u x} dxdy$ où on a posé $u = \frac{\omega}{c} [n_2 \sin \theta - n_1 \sin \alpha]$. L'intégrale sur y est immédiate et fournit seulement la largeur de la pupille; celle sur x est classique, $\int_{-L/2}^{L/2} e^{i u x} dx = L \text{sinc} \left(\frac{ux}{2} \right)$. On obtient

enfin l'intensité sous la forme $I(\theta) = |\underline{A}(M)|^2$ qu'on écrit enfin $I(\theta) = I_0 \text{sinc}^2 \left(\frac{\omega L}{2C} [n_1 \sin \alpha - n_2 \sin \theta] \right)$, le

maximum étant obtenu dans la direction de la loi de Descartes, $I = I_0$ si $n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \theta$.

II.C – Propagation de l'onde lumineuse avec une masse de photon non nulle

15. Écrivant $\delta = \frac{c}{\omega} \frac{\hbar \omega}{mc^2}$, on reconnaît dans $\hbar \omega$ et mc^2 deux grandeurs énergétiques donc $\delta = \frac{c}{\omega}$ est l'inverse d'un vecteur d'onde : c'est une distance.

16. Avec $E_\gamma = \hbar \omega$ et $p_\gamma = \hbar k$ on trouve $\frac{\omega^2}{c^2} = \vec{k}^2 + \frac{1}{\delta^2}$. Comme on a vu que $\frac{\partial}{\partial t} = i\omega$ et $\vec{\nabla} = -i\vec{k}$, on peut

encore écrire l'équation de Klein–Gordon $\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{1}{\delta^2} \vec{E}$.

17. Les équations aux sources deviennent $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho + f}{\varepsilon_0}$, $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \vec{F} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Dans le vide, il

vient donc $\text{div } \vec{E} = \frac{f}{\varepsilon_0}$, $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{F} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Puisqu'on conserve l'écriture en fonction des potentiels,

les équations de structure ne sont pas modifiées, $\text{div } \vec{B} = 0$ et $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$: l'hypothèse H2 n'est donc pas contredite. Écrivant alors le double rotationnel de $\vec{E}$ sous la forme $\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \vec{\text{grad}} f - \Delta \vec{E}$ d'une part, et $\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \vec{F} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$ d'autre part, on obtient en imposant l'équation de Klein–Gordon

$\vec{E} = \frac{\delta^2}{\varepsilon_0} \vec{\text{grad}} f + \delta^2 \mu_0 \frac{\partial \vec{F}}{\partial t}$. De même pour le champ magnétique, $\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{B} = -\Delta \vec{B}$ d'une part, $\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{B} =$

$\mu_0 \vec{\text{rot}} \vec{F} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$ d'autre part donc, toujours en imposant l'équation de Klein–Gordon, $\vec{B} = -\mu_0 \delta^2 \vec{\text{rot}} \vec{F}$. On

en déduit que les potentiels $\vec{A} = \sigma_1 \vec{F}$ et $V = \frac{1}{\sigma_2} f$ conviennent si on choisit $\sigma_1 = -\delta^2 \mu_0$ et $\sigma_2 = -\frac{\varepsilon_0}{\delta^2}$.

18. L'équation de Maxwell–Ampère modifiée impose ici $\text{div } \vec{\text{rot}} \vec{B} = 0$ donc $\mu_0 \text{div } \vec{F} + \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \text{div } \vec{E}$ soit, avec $\text{div } \vec{E} = \frac{f}{\varepsilon_0}$, $-\frac{1}{\delta} \text{div } \vec{A} - \delta \frac{1}{c^2} \frac{dV}{dt} = 0$ qui prend bien la forme de la jauge de Lorenz proposée par l'énoncé,

qu'on écrit $\chi \text{div } \vec{A} = \frac{\partial V}{\partial t}$ avec $\chi = -c^2$.

19. On déduit directement de ce qui précède $\text{div } \vec{\Psi} = \frac{f}{\varepsilon_0}$ et $\vec{\text{rot}} \vec{\Psi} = \frac{i}{c} \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial t} + i\mu_0 c \vec{F}$. On calcule encore

une fois un double rotationnel, $\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{\Psi} = \vec{\text{grad}} \frac{f}{\varepsilon_0} - \Delta \vec{\Psi}$ d'une part, $\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{\Psi} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\Psi}}{\partial t^2} + i\mu_0 c \vec{\text{rot}} \vec{F} - \mu_0 \frac{\partial \vec{F}}{\partial t}$;

on a donc $\Delta \vec{\Psi} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\Psi}}{\partial t^2} = \vec{\text{grad}} \frac{f}{\varepsilon_0} - i\mu_0 c \vec{\text{rot}} \vec{F} + \mu_0 \frac{\partial \vec{F}}{\partial t}$ qui s'écrit $\Delta \vec{\Psi} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\Psi}}{\partial t^2} = \frac{1}{\delta^2} \vec{\Psi}$: c'est l'équation de

Klein–Gordon. Celle-ci étant linéaire et le vecteur $\vec{\Psi}$ en étant solution, $\text{div } \vec{\Psi}$, $\vec{\text{rot}} \vec{\Psi}$ et $\frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial t}$ et leur combinaison linéaire $\vec{\text{rot}} \vec{\Psi} - \frac{i}{c} \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial t}$ sont encore des solutions de l'équation de Klein–Gordon; il en va enfin de même de f/ε_0

et $\mu_0 c$, donc encore des potentiels : $\Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{1}{\delta^2} V$ et $\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \frac{1}{\delta^2} \vec{A}$.

20. On sait depuis la question **16** que $\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \frac{1}{\delta^2}$, qui prend aussi la forme $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$ avec $\omega_p = \frac{c}{\delta}$ qu'on peut aussi écrire $\hbar \omega_p = m_\gamma c^2$.

21. On a ici $\vec{A}_\parallel = A_\parallel \vec{e}_z$ et $\vec{A}_0$ est un vecteur du plan (Oxy). On trouve alors $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$ sous la forme complexe $\vec{B} = -ik \hat{e}_z \wedge \vec{A}$ donc $\vec{B}_0 = -ik \hat{e}_z \wedge \vec{A}_\perp$: le champ est transverse magnétique (TM). On détermine aussi la condition de jauge $\omega \underline{V} = -ic^2 k \hat{e}_z \cdot \vec{A}$ donc aussi $V_0 = \frac{kc^2}{\omega} A_\parallel$. Enfin, on détermine $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ sous forme complexe ; il vient $\vec{E}_0 = \vec{E}_\perp + \vec{E}_\parallel$ avec, comme dans le modèle « usuel » (sans masse du photon) une composante transverse électrique $\vec{E}_\perp = -i\omega \vec{A}_\perp$ mais on doit lui ajouter une composante non transverse

du champ électrique sous la forme $\vec{E}_\parallel = i\omega A_\parallel \left[1 - \frac{c^2 k^2}{\omega^2}\right]$ soit $\vec{E}_\parallel = i \frac{\omega_p^2}{\omega} A_\parallel$. On remarque bien que dans le modèle à masse nulle, $\omega_p \rightarrow 0$ et cette composante longitudinale du champ électrique disparaît.

22. Il ne peut y avoir d'onde progressive que si $k^2 > 0$ donc si $\omega > \omega_p$; dans ce cas, la vitesse de phase $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$ s'écrit $v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$; il y a propagation avec dispersion puisque v_φ dépend de ω et la propagation se fera avec étalement du paquet d'onde.

23. Un photon est un paquet d'ondes qui se propage à la vitesse de groupe $v_g = \frac{d\omega}{dk}$; en dérivant la relation de Klein-Gordon on obtient $c^2 = v_\varphi v_g$ donc $v_g = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$ ou, toujours dans les conditions d'approximation proposées, $v_g \simeq c \left(1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2}\right)$. La durée de parcours sur une distance D est alors $t = \frac{D}{v_g}$ donc, au même ordre d'approximation, $t = \frac{D}{c} \left(1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega^2}\right)$. On en conclut que l'écart des durées pour deux fréquences différentes est

$$\Delta t = \frac{D\omega_p^2}{2c} \Delta(1/\omega^2) \text{ où } \omega_p = \frac{m_\gamma c^2}{\hbar} \text{ donc } m_\gamma = \frac{\hbar}{c^2} \sqrt{\frac{2c\Delta t}{D \left| \frac{1}{\omega_r^2} - \frac{1}{\omega_b^2} \right|}}. \text{ De } \Delta t \leq 10^{-3} \text{ s, on tire } m_\gamma \leq 8 \cdot 10^{-43} \text{ kg}$$

(soit $m_\gamma c^2 < 5 \cdot 10^{-7} \text{ eV}$).

24. En régime statique, $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = \frac{\delta^2}{\varepsilon_0} \overrightarrow{\text{grad}} f$ et $\text{div } \vec{E} = \frac{f}{\varepsilon_0}$ dans le vide qui entoure la charge Q . Cette équation peut être recopiée sous la forme $\Delta f = f/\delta^2$ ou $\Delta V = \frac{1}{\delta^2} V$. Compte tenu des symétries du problème,

$V = V(r)$ donc $\Delta V = \frac{1}{r} \frac{d}{dr^2} [rV(r)]$ ce qui permet d'écrire $\frac{d}{dr^2} [rV(r)] = \frac{1}{\delta^2} [rV(r)]$, équation donc la solution générale est $rV(r) = K_+ e^{r/\delta} + K_- e^{-r/\delta}$. Le caractère borné du potentiel créé à grande distance impose $K_+ = 0$

donc $V(r) = \frac{K_-}{r} e^{-r/\delta}$ dont on déduit $\vec{E} = \frac{K_-}{r^2} e^{-r/\delta} \left[1 + \frac{r}{\delta}\right] \vec{e}_r$. On peut alors appliquer le théorème de

Gauss (modifié) à une sphère de centre O et de rayon $r \rightarrow 0$; ce théorème s'écrit en général $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int [\rho + f] d\tau$ donc, dans le cas d'une sphère entourant seulement le point O , $\lim_{r \rightarrow 0} 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$ puisque, V et f étant

bornées, l'intégrale $\int f(r) d\tau$ tend vers 0 si $r \rightarrow 0$. Finalement, $4\pi K_- = \frac{Q}{\varepsilon_0}$ donc $V(r) = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0} e^{-r/\delta}$: la

portée de cette interaction est limitée par le terme exponentiel qui décroît avec une distance caractéristique ou portée δ : au lieu d'une portée infinie, l'existence d'un photon massif impose une interaction limitée à la distance δ et on peut donc ici aussi majorer la valeur de m_γ si on évalue la portée de l'interaction électrostatique.