

PHYSIQUE DANS L'ATMOSPHERE

I. – Formation d'un brouillard

- 1 – La pression de vapeur saturante P_{sat} est la pression de vapeur en équilibre avec le liquide, lorsque l'interface entre le liquide et la vapeur est plane.

Cette grandeur dépend de la température car l'équilibre entre liquide et vapeur, $liq \rightleftharpoons vap$, de constante d'équilibre $K(T) = \frac{P_{sat}}{P^\circ}$, est endothermique (la vaporisation nécessite de l'énergie). On peut en déduire d'ailleurs que la pression de vapeur saturante **augmente** quand la température **augmente**, comme l'exige la loi de Van't Hoff.

On peut aussi invoquer la variance, ici $v = c + 2 - \varphi = 1$, qui montre que pression d'équilibre et température sont liées, $P_{sat} = f(T)$, mais ne permet pas de dire que $\frac{dP_{sat}}{dT} \neq 0$.

- 2 – Si m_v et m_s sont les masses de vapeur d'eau et d'air sec respectivement, dans un volume d'air V donné, alors $\Pi_{sat} = \frac{m_v}{m_s}$, $P_0 = P_v + P_s$, $P_v = \frac{m_v}{M_v} \frac{RT}{V}$ et $P_s = \frac{m_s}{M_s} \frac{RT}{V}$.

On en déduit $\Pi_{sat} = r_M \frac{P_{sat}}{P_s} = r_M \frac{P_{sat}}{P_0 - P_{sat}}$ et donc :

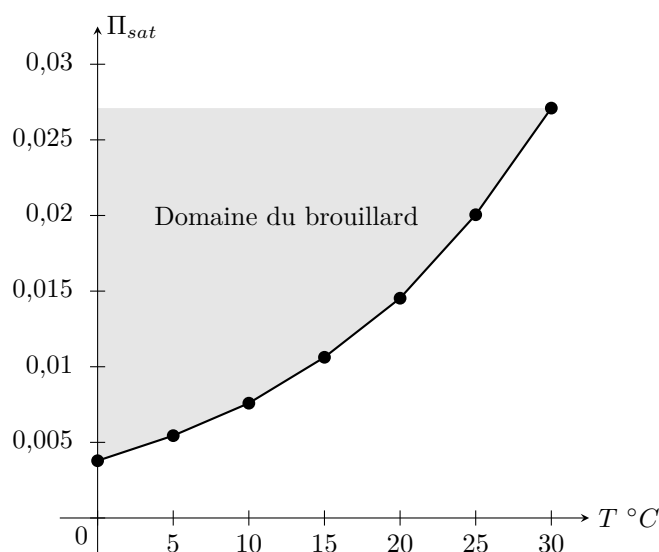
$$\Pi_{sat} = r_M \frac{r_P}{1 - r_P}.$$

Dans le cas où $r_P \ll 1$, il vient :

$$\Pi_{sat} \simeq r_M r_P.$$

Il y a une erreur d'énoncé. On proposait $\Pi_{sat} \simeq r_M / r_P$!

- 3 – Le domaine du brouillard correspond aux points de coordonnées (T, Π) avec $\Pi > \Pi_{sat}$.



- 4 – La conservation de la masse d'eau et d'air sec impose :

$$m_s = m_{s1} + m_{s2}$$

$$m_v = m_{v1} + m_{v2}$$

On en déduit $\Pi = \frac{m_v}{m_s} = \frac{m_{v1} + m_{v2}}{m_{s1} + m_{s2}}$ d'où $\Pi = \frac{m_{s1}\Pi_1 + m_{s2}\Pi_2}{m_{s1} + m_{s2}}$.

- 5 – Il s'agit d'une transformation **adiabatique** et **isobare** d'un système **fermé**, sans aucun travail apporté **hormis les travaux des forces de pression**. On en déduit que l'enthalpie est constante.

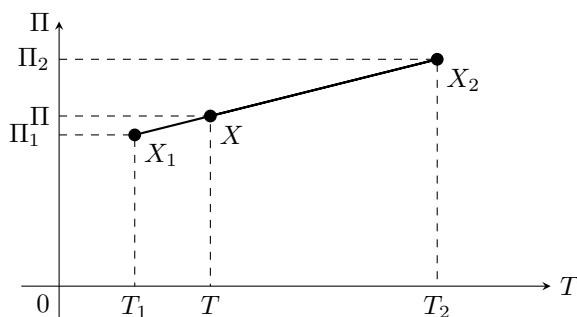
L'enthalpie ne dépend que de la température pour un gaz parfait (il n'y a pas de condensation). On peut donc écrire :

$$\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 = m_1 c_p (T - T_1) + m_2 c_p (T - T_2) = 0$$

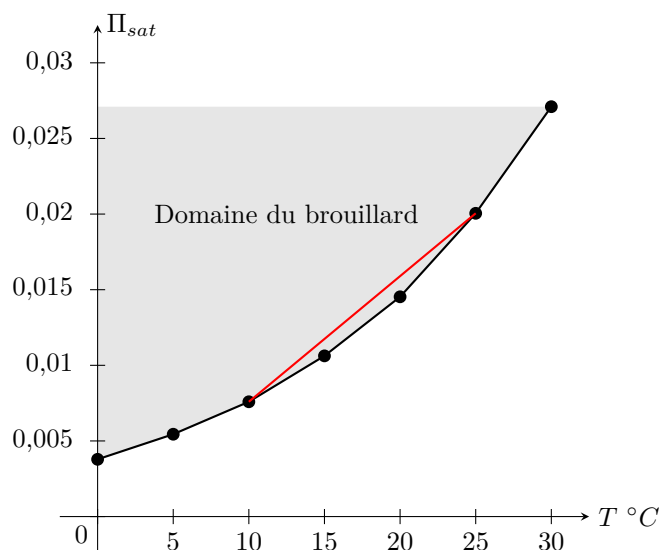
Comme les humidités spécifiques sont faibles devant 1, les masses d'air humide sont très voisines des masses d'air sec. On obtient donc :

$$T = \frac{m_{s1}T_1 + m_{s2}T_2}{m_{s1} + m_{s2}}$$

- 6 – Les relations fournissant l'humidité spécifique et la températures finales sont linéaires (c'est la relation du barycentre) et identiques. On en déduit :



- 7 – La courbe de la question 3 est **convexe**, la corde est donc **au-dessus** de la courbe. Le point d'équilibre, placé sur le segment (rouge) qui joint les deux points des états initiaux, est situé dans le domaine du brouillard.



- 8 – S'il n'y avait pas de condensation, la température serait donnée par la relation de la question 5, soit ici $T = \frac{T_1 + T_2}{2}$. La condensation provoque une augmentation de cette température, selon la conservation de l'enthalpie :

$$\Delta H = m_{s1}c_p(T_f - T_1) + m_{s2}c_p(T_f - T_2) - \mu\Lambda = 0$$

$$\text{d'où } T_f = \frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{\mu\Lambda}{m_s c_p} = T + \frac{\mu\Lambda}{m_s c_p}.$$

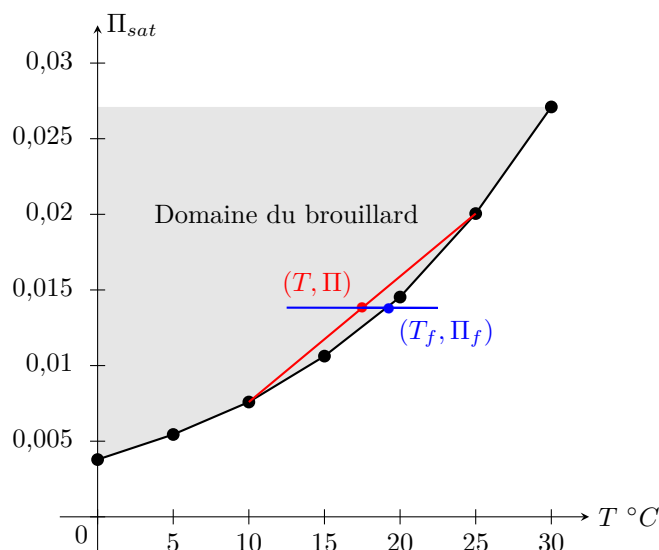
L'humidité spécifique est donnée par $\Pi_f = \frac{m_{v1} + m_{v2} - \mu}{m_{s1} + m_{s2}} = \Pi - \frac{\mu}{2m_s}$. On en déduit :

$$\Pi_f(T_f) = \Pi - \frac{c_p}{2\Lambda}(T_f - T).$$

- 9 – Le point de coordonnées (T_f, Π_f) est situé sur la courbe de saturation $\Pi_f = \Pi_{sat}(T_f)$. Par ailleurs, l'écart à la moyenne (T, Π) est linéaire (relation de la question 8) :

$$\frac{\Pi_f - \Pi}{T_f - T} = -0,00038 \text{ K}^{-1}.$$

Graphiquement, on peut interpoler le point d'équilibre final (courbe bleue) :



La question est à mon avis mal posée. L'état final (T_f, Π_f) est différent de la moyenne (T, Π) à cause de la convexité de la courbe $\Pi_{sat}(T)$. L'interpolation linéaire proposée mènerait à l'égalité, et ne prévoirait donc pas de condensation.

II. – Formation d'un nuage

II.A. – Modèle d'atmosphère isentropique

- 10 – La loi locale de l'équilibre hydrostatique, projetée sur l'axe z ascendant, est :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g$$

où ρ est la masse volumique du fluide.

Ici, $\rho = \frac{MP}{RT}$, d'où $\frac{dP}{dz} = -\frac{MPg}{RT}$ c'est-à-dire :

$$\frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT} dz$$

qui, après intégration et utilisation des conditions aux limites $P(z_0) = P_0$, aboutit à :

$$P(z) = P_0 \exp \left(-\frac{Mg}{R} \int_{z_0}^z \frac{dz'}{T(z')} \right).$$

La constante α s'exprime donc par :

$$\alpha = -\frac{Mg}{R}.$$

11 – Selon la loi de Laplace et la loi des gaz parfaits, on peut écrire :

$$P^{1-\Gamma} T^\Gamma = cte.$$

La différentielle logarithmique de cette relation s'écrit :

$$(1 - \Gamma) \frac{dP}{P} + \Gamma \frac{dT}{T} = 0.$$

À partir de cette dernière relation et de la relation de la question précédente, on trouve :

$$\frac{dT}{T} = \frac{1 - \Gamma}{\Gamma} \frac{Mg}{RT} dz$$

d'où :

$$\delta = \frac{dT}{dz} = \frac{1 - \Gamma}{\Gamma} \frac{Mg}{R}.$$

Comme $C_{p,m} = \frac{\Gamma R}{\Gamma - 1}$, il vient :

$$\delta = -\frac{Mg}{C_{p,m}}.$$

12 – Par intégration de la relation précédente, on trouve :

$$T(z) = T(z_0) + \delta(z - z_0).$$

On en déduit :

$$\int_{z_0}^z \frac{dz'}{T(z')} = \int_{z_0}^z \frac{dz'}{T(z_0) + \delta(z - z_0)} = \frac{1}{\delta} \ln \left(\frac{T(z)}{T(z_0)} \right)$$

puis,

$$P(z) = P_0 \left(\frac{T(z)}{T(z_0)} \right)^{\alpha/\delta}.$$

On en déduit $\beta = \frac{\alpha}{\delta}$, soit :

$$\beta = 1 - \frac{1}{\Gamma} > 0.$$

La pression est une fonction croissante de la température, et une fonction décroissante de l'altitude.

II.B. – Possibilité de formation d'un nuage

13 – Le volume massique de la vapeur d'eau (1,4 m³) est très grand devant le volume massique de l'eau liquide (1 L). Dans ce cas, la formule de Clapeyron peut s'approcher par :

$$\Lambda \simeq T v_v \frac{dP_{sat}}{dT}.$$

La vapeur étant assimilée à un gaz parfait, $v_v = \frac{RT}{M_v P_{sat}}$ et on obtient :

$$\Lambda = \frac{RT^2}{M_v P_{sat}} \frac{dP_{sat}}{dT}$$

que l'on peut écrire sous la forme :

$$\frac{dP_{sat}}{dT} = \frac{\Lambda M_v}{R} \frac{P_{sat}}{T^2}.$$

On identifie la constante η :

$$\eta = \frac{\Lambda M_v}{R}.$$

Après séparation des variables, on intègre la relation $\frac{dP_{sat}}{P_{sat}} = \eta \frac{dT}{T^2}$ pour obtenir :

$$P_{sat}(T) = P_{sat}(T_0) \exp \left[\eta \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \right].$$

14 – La pression partielle de vapeur, P_v , s'écrit, tant qu'il n'y a pas de condensation, $P_v(T) = y P(T)$ où y est constant.

- Si $P_v(T_0) > P_{sat}(T_0)$, il y a condensation.
- Si $P_v(T_0) < P_{sat}(T_0)$, il n'y a pas condensation.

Montrons alors qu'il suffit d'abaisser la température pour qu'il y ait condensation :

- $\frac{dP_v}{P_v} = \frac{\Gamma}{\Gamma - 1} \frac{dT}{T} = 3,5 \frac{dT}{T}$ si l'on prend $\Gamma = 1,4$;
- $\frac{dP_{sat}}{P_{sat}} = \frac{5410}{T} \frac{dT}{T}$, T en kelvin.

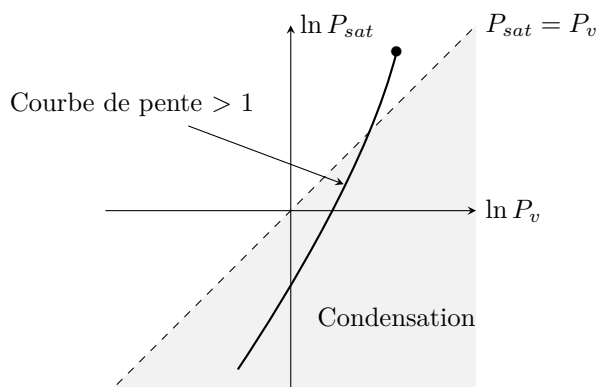
Le rapport des variations des pressions est :

$$\frac{d \ln P_{sat}}{d \ln P_v} = \frac{1550}{T} > 1$$

si $T < 1550$ K, ce qui est le cas dans l'atmosphère.

On en déduit que la pression de vapeur saturante chute plus rapidement que la pression partielle de vapeur d'eau quand la température diminue. Il est donc possible d'atteindre une température où la vapeur se condense, pourvu que la température soit assez basse.

Graphiquement, la courbe $\ln P_{sat}(\ln P_v)$ possède une pente supérieure à 1. Dans ce cas, lorsque les pressions diminuent, la courbe atteint le domaine de condensation $P_{sat} < P_v$.



III.– De l'électricité dans l'air

15 – La relation demandée constitue le théorème de Coulomb :

$$E_r = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Le signe $-$ est dû à la définition de E_r , $\vec{E} = -E_r \vec{u}_r$.

Application numérique :

$$\sigma = -1,15 \cdot 10^{-9} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$$

16 – On en déduit la charge de la Terre :

$$Q_T = 4\pi R_T^2 \sigma$$

Application numérique :

$$Q_T = -5,92 \cdot 10^5 \text{ C}$$

Le rapport des forces électrostatiques et des forces gravitationnelles est donné par :

$$\frac{f_e}{f_g} = \frac{Q_T^2}{4\pi\epsilon_0 G m_T m_L}.$$

Application numérique :

$$\frac{f_e}{f_g} = 1,08 \cdot 10^{-16}$$

On en conclut que la charge électrique de ces astres (encore faut-il que la charge de la Lune soit non nulle) ne joue pas de rôle dans le mouvement relatif de la Terre et de la Lune. Il faut souligner que la charge Q_T est compensée par une charge opposée dans la haute atmosphère. La charge globale de la Terre est certainement plus faible que Q_T !

17 – Il s'agit d'écrire la loi d'Ohm locale, $\vec{j} = \gamma \vec{E}$. On en déduit l'intensité I circulant entre le sol et la haute atmosphère :

$$I = \oint_{\text{sphère}} \vec{j} \cdot d\vec{S} = -4\pi R_T^2 \gamma E_r.$$

Application numérique :

$$|I| = 198 \text{ A}$$

18 – Si le champ électrique était uniforme dans toute l'épaisseur de l'atmosphère, on devrait avoir :

$$E_r = \frac{U_0}{h} = 4 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

qui est une valeur très éloignée de la valeur au niveau du sol. L'hypothèse de l'uniformité doit être remise en cause.

19 – La relation entre la charge, la capacité et la différence de potentiel U_c est :

$$U_c = \frac{Q_T}{C}$$

La relation donnant l'intensité I découle des relations des questions 15, 16 et 17 :

$$I = \gamma \frac{Q_T}{\epsilon_0}$$

Si R est la résistance de fuite du condensateur, on peut construire une constante de temps τ sous la forme :

$$\tau = RC = \frac{U_c}{I} \frac{Q_T}{U_c} = \frac{Q_T}{I}$$

soit :

$$\tau = \frac{\epsilon_0}{\gamma}$$

Application numérique :

$$\tau = 2950 \text{ s}$$

soit $\tau = 49 \text{ mn } 10 \text{ s.}$

Sans mécanisme de charge, la charge terrestre s'évanouirait au bout de quelques heures. Un mécanisme de charge est l'ensemble des orages existant en permanence autour de la Terre.

IV. – Mesures dans l'atmosphère

- 20** – Les particules diffusent la lumière du laser d'autant plus fortement que leur taille est voisine de la longueur d'onde du rayonnement. Ainsi, les particules dont on peut mesurer la concentration par cette méthode ont une taille de l'ordre de la moitié d'un micromètre.

On peut justifier cette affirmation à partir du phénomène de diffraction. La diffraction par une fente devient importante lorsque la largeur de la fente atteint quelques fois au plus la longueur d'onde de la lumière utilisée.

On peut écrire ici, si d est la taille des particules :

$$d_{max} \lesssim 1 \mu\text{m}$$

- 21** – Par définition, $T_0(x, \lambda) = \frac{I(x, \lambda)}{I_0}$. Il vient :

$$T_0(x, \lambda) = \exp \left[- \int_0^x \alpha(x', \lambda) dx' \right].$$

Pour le trajet aller-retour, la distance parcourue est $2x$, sur le même trajet, d'où :

$$T_1 = T_0^2.$$

Dans cette question, il faut concevoir le faisceau de rayons parallèles (faisceau droit). Le rôle des coefficients de transmission en énergie est de traduire l'effet de la diffusion et de l'absorption de la lumière par les particules **sur le trajet du faisceau**, sans tenir compte du coefficient de rétrodiffusion en x , ni de la divergence du faisceau. Je pense que l'on aurait dû poser cette question avant l'explication détaillée du modèle.

- 22** – La surface d'aire $A_l(x)$ est un disque de rayon $r_l = x \tan \frac{\Psi_l}{2}$ d'où :

$$A_l(x) = \pi x^2 \tan^2 \frac{\Psi_l}{2} \simeq \pi x^2 \frac{\Psi_l^2}{4}.$$

Cette aire reçoit l'énergie $\mathcal{E}_l T_0(x, \lambda)$ pendant la durée τ_l . La puissance surfacique s'exprime donc par $\mathcal{P}_s(x) = \frac{\mathcal{E}_l T_0(x, \lambda)}{A_l(x) \tau_l}$ soit :

$$\mathcal{P}_s(x) = \frac{\mathcal{E}_l T_0(x, \lambda)}{\tau_l \pi x^2 \tan^2 \frac{\Psi_l}{2}} \simeq \frac{4 \mathcal{E}_l T_0(x, \lambda)}{\tau_l \pi x^2 \Psi_l^2}.$$

23 – La distance parcourue durant τ_l est :

$$\Delta_l = c \tau_l.$$

Application numérique :

$$\Delta_l = 2,1 \text{ m}$$

On peut ainsi explorer de manière fine ($\Delta_l \ll 10 \text{ km}$) la composition de l'atmosphère en particules.

La durée de l'impulsion est très faible devant la durée t de l'aller-retour, ce qui se traduit par :

$$t = \frac{2x}{c}.$$

24 – La puissance surfacique émise par la particule est, à la distance x : $\frac{\mathcal{P}_{dif} T_0(x, \lambda)}{4\pi x^2}$. La puissance reçue par la surface $A_T(0)$ du télescope est donc :

$$\mathcal{P}_{rec} = A_T(0) \frac{\mathcal{P}_{dif} T_0(x, \lambda)}{4\pi x^2}.$$

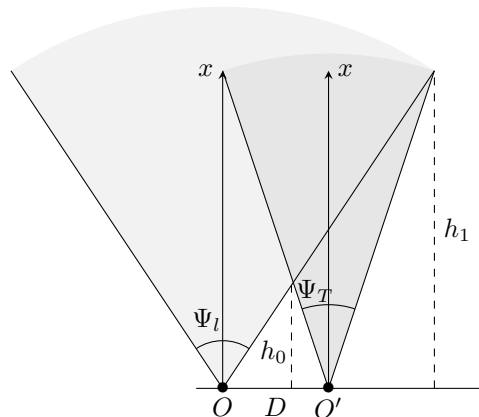
25 – La largeur angulaire Ψ_T est imposée par le phénomène de diffraction de la surface réceptrice de largeur d , que ce soit à l'émission ou à la réception, d'où :

$$\Psi_T = \beta \frac{\lambda}{d}$$

Application numérique :

$$\Psi_T = 2,27 \cdot 10^{-7} \text{ rad}$$

26 – Le schéma des faisceaux est le suivant :



D'après le schéma, $D = h_0 \tan \frac{\Psi_l}{2} + h_0 \tan \frac{\Psi_T}{2}$, d'où :

$$h_0 = \frac{D}{\tan \frac{\Psi_l}{2} + \tan \frac{\Psi_T}{2}} \simeq \frac{2D}{\Psi_l + \Psi_T}.$$

D'autre part, $D = h_1 \tan \frac{\Psi_l}{2} - h_1 \tan \frac{\Psi_T}{2}$, d'où :

$$h_1 = \frac{D}{\tan \frac{\Psi_l}{2} - \tan \frac{\Psi_T}{2}} \simeq \frac{2D}{\Psi_l - \Psi_T}.$$

Pour $h_1 = 10$ km, $D_{max} = h_1 \tan \frac{\Psi_l}{2} - h_1 \tan \frac{\Psi_T}{2}$:

Application numérique :

$$D_{max} = 4,00 \text{ m}$$

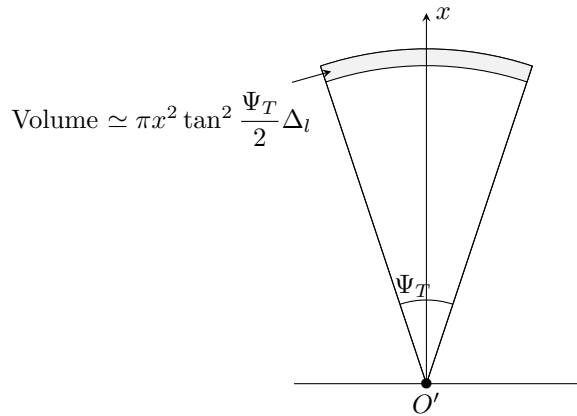
27 – On utilise la relation de la question 24 :

$$\mathcal{P}_{rec} = A_T(0) \frac{\mathcal{P}_{dif} T_0(x, \lambda)}{4\pi x^2}$$

D'après le texte qui suit cette question, il faut multiplier le résultat par $\frac{3}{2}$.

Il reste à exprimer la puissance diffusée $\mathcal{P}_{dif}$. D'après le texte explicatif, cette puissance diffusée par les particules à la distance x (à Δ_l près) est donnée par :

$$\mathcal{P}_{dif} = \underbrace{N(x) \pi x^2 \tan^2 \frac{\Psi_T}{2} \Delta_l}_{\text{nombre de particules diffusantes}} \sigma(\lambda) \mathcal{P}_s$$



soit :

$$\mathcal{P}_{dif} = N(x) \pi x^2 \tan^2 \frac{\Psi_T}{2} \Delta_l \sigma(\lambda) \frac{\mathcal{E}_l T_0(x, \lambda)}{\tau_l \pi x^2 \tan^2 \frac{\Psi_l}{2}} = N(x) \frac{\tan^2 \frac{\Psi_T}{2}}{\tan^2 \frac{\Psi_l}{2}} \Delta_l \sigma(\lambda) \frac{\mathcal{E}_l T_0(x, \lambda)}{\tau_l}.$$

Finalement, en utilisant $T_0^2 = T_1$,

$$\mathcal{P}(x, \lambda) = \frac{\mathcal{E}_l}{\tau_l} \frac{A_T(0)}{4\pi x^2} \frac{\tan^2 \frac{\Psi_T}{2}}{\tan^2 \frac{\Psi_l}{2}} \frac{3N(x)\sigma(\lambda)}{2} \Delta_l.$$

On identifie ainsi :

$$A_{T,l} = A_T(0) \frac{\tan^2 \frac{\Psi_T}{2}}{\tan^2 \frac{\Psi_l}{2}} \simeq A_T(0) \left(\frac{\Psi_T}{\Psi_l} \right)^2.$$

28 – La résolution spatiale est la distance parcourue par la lumière pendant la durée τ_d , soit :

$$\Delta_d = c\tau_d.$$

Application numérique :

$$\Delta_d = 48,0 \text{ m}$$

29 – La puissance reçue est nulle en dehors de la durée de l'impulsion τ_l et il n'y a qu'une seule impulsion durant τ_d (20 Hz correspond à un intervalle de temps de 50 ms entre deux impulsions) d'où :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_l \frac{A_T(0)}{4\pi x^2} \frac{\tan^2 \frac{\Psi_T}{2}}{\tan^2 \frac{\Psi_l}{2}} \frac{3N(x)\sigma(\lambda)}{2} \Delta_l.$$

Application numérique :

$$\mathcal{E}_b = 3,39 \cdot 10^{-22} \text{ J}$$

Application numérique :

$$\mathcal{E}_h = 5,11 \cdot 10^{-29} \text{ J}$$

En terme de photons, cela correspond respectivement à $n_b = 9,1 \cdot 10^{-4}$ photons et $n_h = 1,37 \cdot 10^{-10}$ photons!

Il faut donc acquérir l'énergie de très nombreuses impulsions pour avoir la chance de capturer un photon.

30 – Durant 364 mn, on envoie $364 \times 60 \times 20 = 436\,800$ impulsions. On obtient alors :

$$N_b = 397 \text{ photons et } N_h = 5,98 \cdot 10^{-5} \text{ photons.}$$

L'incertitude relative est $\frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ d'où :

$$N_b = 397 \pm 20 \text{ photons} = 397 \text{ photons} \pm 5\%.$$

Ces valeurs ne permettent pas de faire des mesures à 80 km !

31 – Le fait de faire des mesures en utilisant plusieurs longueurs d'onde permet d'identifier les particules diffusantes selon leur spectre. Ainsi, on peut séparer les contributions des différentes particules en suspension dans l'atmosphère et mesurer la concentration de chacune d'entre elles.