

Mines PSI - Physique 2 - 2012 : Un houlogénérateur pendulaire

I.- Caractérisation de la houle

Notons que la lettre z est utilisée pour désigner la cote de la surface libre et la cote d'un point situé dans le fluide...ce qui risque d'entraîner des confusions dès le départ.... Il aurait fallu introduire une notation différente pour la cote de la surface libre, $h(y, t) = H + \xi(y, t)$ par exemple.

1 - A_1 :

signifie : $\eta \Delta v \ll \mu v \cdot \text{grad} v$ en ordre de grandeur $v \simeq a/T$ donc l'inégalité en ordre de grandeur s'écrit : $\eta(a/T)/\lambda^2 \ll \mu(a/T)^2/\lambda$ soit $\lambda \gg \frac{\eta T}{\mu a}$

A_2 :

signifie : $2\mu\Omega v \ll \mu v \cdot \text{grad} v$ donc l'inégalité en ordre de grandeur s'écrit : $2\mu\Omega a/T \ll \mu(a/T)^2/\lambda$ soit $\lambda \ll \frac{a}{2\Omega T}$

A_3 :

signifie : $v \cdot \text{grad} v \ll \partial v / \partial t$ donc l'inégalité en ordre de grandeur s'écrit : $(a/T)^2/\lambda \ll a/T^2$ soit $\lambda \gg a$

2 - Numériquement : $\Omega_T = 7,3 \times 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$ et $\mu = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$ est donné dans l'énoncé...

On en déduit un encadrement de λ : $5 \mu\text{m} < \lambda < 1375 \text{ m}$. Les approximations A_1 et A_2 sont bien justifiées, les longueurs d'ondes de houle étant de l'ordre de la dizaine de mètres...

3 - La condition d'existence du potentiel de vitesse est que le champ des vitesses soit irrotationnel, soit $\text{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$ en tout point du fluide.

Comme le fluide est incompressible, il s'écoule de façon incompressible et le champ des vitesses vérifie : $\text{div}(\vec{v}) = 0$ donc Φ vérifie :

$$\Delta\Phi = 0$$

4 - L'équation de Navier Stokes simplifiée est :

$$\mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}(P) + \mu \vec{g}$$

$$\mu \frac{\partial \overrightarrow{\text{grad}}(\Phi)}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}(P) + \mu \overrightarrow{\text{grad}}(-gz)$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\mu \frac{\partial \Phi}{\partial t} + P + \mu gz\right) = \vec{0}$$

Finalement, il vient : $\overrightarrow{\text{grad}}(\epsilon) = \vec{0}$ avec $\epsilon(t) = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{P}{\mu} + gz$, ϵ est indépendant de la position.

La quantité $\frac{P}{\mu} + gz$ est une énergie potentielle massique composé d'un terme lié à la pression, et un terme lié à la pesanteur.

5 -

$$\Delta\Phi = 0$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

$$e^{j(\omega t - ky)} \left[\frac{d^2 f}{dz^2} - k^2 f(z) \right] = 0$$

On constate que $f(z)$ vérifie une équation linéaire à coefficients constants dont la solution s'écrit : $f(z) = c_1 e^{kz} + c_2 e^{-kz}$. (ici, l'énoncé aurait dû imposer la solution exponentielle et pas hyperbolique, puisqu'elle est attendue, vue la question 7...)

6 - Première condition limite : $\frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=H} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \Big|_{z=H}$. Elle traduit le fait que la composante du champ de vitesse selon $\vec{e}_z$ est égale à la vitesse de déplacement vertical de la frontière du fluide.

Deuxième condition limite : $\frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{z=H} = -g\xi(y, t)$

Or on a montré précédemment que $\epsilon = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{P}{\mu} + gz$ est uniforme dans l'écoulement, cela signifie que ϵ est indépendant de y et z et ne dépend que de t .

En tout point de la surface $\epsilon = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{P_0}{\mu} + g(H + \xi(y, t))$; en certains points $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ et $\xi(y, t)$ s'annuleront simultanément, donc ϵ qui est uniforme est nécessairement égal à $\epsilon = \frac{P_0}{\mu} + gH$. D'où la condition cherchée....(PAS TRES CONVAINQUANT...)

La première condition entraîne :

$$k(c_1 e^{kH} - c_2 e^{-kH}) = j\omega a$$

et la deuxième entraîne :

$$j\omega(c_1 e^{kH} + c_2 e^{-kH}) = -ga$$

(j'établis deux relations...contrairement à ce que laisse entendre l'énoncé)

$$7 - \text{En } z=0, \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \text{ soit } k(c_1 e^{k \times 0} - c_2 e^{-k \times 0}) = 0, \text{ soit, en effet } c_1 = c_2.$$

$$\text{On en déduit : } c_1 = \frac{j\omega a}{2k \cdot sh(kH)} \text{ et } c_1 = \frac{-ga}{j\omega ch(kH)} \text{ soit :}$$

$$\boxed{\omega^2 = gk \cdot th(kH)}$$

On identifie $\Psi(kH) = th(kH)$ et la fonction tangente hyperbolique vérifie bien les relations proposées.

8 - Si $kH \ll 1$, soit en eau peu profonde, l'équation de dispersion s'écrit : $\omega^2 = gHk^2$, soit $v_\phi = \frac{\omega}{k} = \sqrt{gH}$, elle est indépendante de ω , le milieu n'est pas dispersif.

Si $kH \gg 1$, l'équation de dispersion s'écrit $\omega^2 = gk$ soit $v_\phi = \frac{g}{\omega}$, dépend de ω , le milieu est dispersif. (on peut aussi remarquer que la vitesse de propagation dépend de la longueur d'onde des vagues...)

Lorsque l'observateur observe les oscillations de la surface libre, il voit les ondes se déplacer à la même vitesse en eau peu profonde, quelque soit leur amplitude, alors qu'en eau profonde, la célérité dépend de l'amplitude des ondes.

9 - Pour $H \approx 100$ m, alors avec l'hypothèse H_1 le produit kH vaut 4 environ, alors que l'hypothèse H_2 donne un produit kH de l'ordre de 16. J'en déduis que c'est l'hypothèse H_2 qu'il faut retenir, puisque en aucun cas $kH \ll 1$. On vérifie alors l'approximation acoustique : $\lambda/a \approx 40$, elle est bien validée.

10 - Le potentiel des vitesses réel est : $\Phi = -\frac{a\omega}{k} e^{k(z-H)} \sin(\omega t - ky)$, on en déduit les composantes du champ des vitesses :

$$v_z = -a\omega e^{k(z-H)} \sin(\omega t - ky) \text{ et } v_y = a\omega e^{k(z-H)} \cos(\omega t - ky)$$

Or comme les déplacements sont supposés très petits, on peut considérer qu'au voisinage du point (y, z) ces vitesses ne varient pas en fonction de y et z , alors, en intégrant par rapport au temps, on accède à la trajectoire lagrangienne des particules de fluide :

$$\delta z(t) = a e^{k(z-H)} \cos(\omega t - ky) \text{ et } \delta y(t) = a e^{k(z-H)} \sin(\omega t - ky)$$

La trajectoire d'une particule est un cercle de rayon $a e^{k(z-H)}$ dont le rayon croît avec z , il vaut a en surface.

(ici, si le candidat n'a pas déjà fait l'exercice, je ne pense pas qu'il pense à cette solution...)

11 - La vitesse selon y en surface est $v_y(z=H) = a\omega$. La condition du déferlement est, comme il s'agit d'une houle en eau profonde telle que sa célérité est $v_\phi = \frac{g}{\omega}$:

$$a\omega > \frac{g}{\omega}$$

$$\omega > \frac{g}{a\omega}$$

$$\frac{2\pi}{T} > \frac{g}{a\omega}$$

$$2\pi > \frac{g}{\omega} T \cdot \frac{1}{a}$$

$$\pi > \frac{\lambda}{2a} = 1/\gamma$$

Finalement on établit la condition sur γ pour qu'il y ait déferlement :

$$\gamma > \frac{1}{\pi} = \gamma_c$$

Application numérique : pour $a = 1$ m et $T = 5$ s, on trouve $\gamma = 0,05$ qui est inférieur à $1/\pi = 0,32$, donc la vague ne déferle pas.

12 - Soit un élément de surface vertical d'aire $d\sigma$ de normale selon $\vec{e}_y$ situé à la cote z . La force qui s'exerce sur la surface est $P(y, z, t) d\sigma \vec{e}_y$, or d'après la constance de la grandeur ϵ établie à la question 4 – on établit que

$$P(y, z, t) = P_0 + \mu g(H - z) - \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

Il y a donc deux termes dans cette pression, le terme de pression hydrostatique, et l'autre, $-\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ du à la houle seulement.

D'où l'expression de la puissance mécanique proposée, puisqu'il est dit qu'elle est due à la houle.

On calcule alors :

$$\mathcal{P}_m = \iint_{\mathcal{S}} \mu \frac{\omega^3 a^2}{k} \cos^2(\omega t - ky) e^{2k(z-H)} l_x dz$$

$$\langle \mathcal{P}_m \rangle = \int_0^H \mu \frac{\omega^3 a^2}{k} \frac{1}{2} e^{2k(z-H)} l_x dz$$

$$\langle \mathcal{P}_m \rangle = \frac{\mu \omega^3 a^2}{2k} l_x \cdot \frac{1}{2k} [1 - e^{-2kH}]$$

En considérant $e^{-2k(H)} \ll 1$, et $k = \frac{\omega^2}{g}$, on obtient :

$$\langle \mathcal{P}_m \rangle = \frac{\mu \omega^3 a^2}{4k^2} l_x$$

$$\langle \mathcal{P}_m \rangle = \frac{\mu g^2 a^2}{4\omega} l_x$$

Numériquement, on trouve une puissance par unité de longueur selon $\vec{e}_x$ égale à 19000 W.m⁻¹.

II.- Étude du houlogénérateur

13 - La force d'inertie est la force d'inertie d'entraînement :

$$\vec{F}_{ie} = -m_p(\ddot{Y}\vec{e}_y + \ddot{Z}\vec{e}_z)$$

14 - Le théorème du moment cinétique (ou théorème du moment dynamique) scalaire par rapport à l'axe Gx s'énonce :

$$\frac{dL_x}{dt} = \mathcal{M}_x(\vec{P}) + \mathcal{M}_x(-m_p\ddot{Z}\vec{e}_z) + \mathcal{M}_x(-m_p\ddot{Y}\vec{e}_y) + \vec{e}_x \cdot (-\beta\dot{\alpha}\vec{e}_x)$$

$$m_p l^2 \ddot{\alpha} = -m_p g l \sin(\alpha) - m_p \ddot{Y} l \cos(\alpha) - m_p \ddot{Z} l \sin(\alpha) - \beta \dot{\alpha}$$

Soit :

$$\ddot{\alpha} + \frac{\dot{\alpha}\beta}{m_p l^2} + \left[\frac{g + \ddot{Z}}{l} \sin(\alpha) + \frac{\ddot{Y}}{l} \cos(\alpha) \right] = 0$$

On identifie donc : $\chi = \frac{\beta}{m_p l^2}$ et $s(\alpha) = \frac{g + \ddot{Z}}{l} \sin(\alpha) + \frac{\ddot{Y}}{l} \cos(\alpha)$

15 - L'énergie potentielle $\mathcal{E}'_p$ du pendule dans $\mathcal{R}'$ est définie par :

$$d\mathcal{E}'_p = -[(-m_p g \vec{e}_z) - m_p(\ddot{Y}\vec{e}_y + \ddot{Z}\vec{e}_z)] \cdot d\vec{GB}$$

L'énergie mécanique du pendule dans $\mathcal{R}'$ est :

$$E_m = \frac{1}{2} m_p l^2 \dot{\alpha}^2 + m_p g (-l \cos(\alpha)) + m_p \ddot{Z} (-l \cos(\alpha)) + m_p \ddot{Y} (l \sin(\alpha))$$

On retrouve bien la même équation en appliquant le théorème de l'énergie mécanique :

$$\frac{dE_m}{dt} = -\beta \dot{\alpha}^2$$

16 - Avec les approximations données dans l'énoncé l'équation différentielle en α devient :

$$\ddot{\alpha} + \frac{\dot{\alpha}\beta}{m_p l^2} + \frac{g}{l} \alpha = \frac{a\omega^2}{l} \cos(\omega t)$$

On reconnaît une équation différentielle linéaire à coefficients constants, du second ordre, et de second membre sinusoïdal, d'équation caractéristique :

$$r^2 + 2\frac{\beta}{2m_p l^2} r + \frac{g}{l} = 0$$

Le discriminant réduit est $\Delta' = \left(\frac{\beta}{2m_p l^2}\right)^2 - \frac{g}{l}$ numériquement : $\Delta' = -3.18 < 0$ donc la solution générale s'écrit :

$$\alpha_g(t) = e^{-\frac{\beta}{2m_p l^2} t} (A \cos(\Omega t + \phi_g))$$

Et la solution, somme de la solution générale et de la solution particulière :

$$\alpha(t) = e^{-\frac{\beta}{2m_p l^2} t} (A \cos(\Omega t + \phi_g)) + A_{max} \cos(\omega t + \phi_p)$$

avec $\Omega = \sqrt{-\Delta'}$ la pseudo pulsation.

On en déduit le temps caractéristique $\tau = \frac{2m_p l^2}{\beta} = 0,76s$ et la pseudo période : $T_t = \frac{2\pi}{\Omega} = 3,5s$.

Régime sinusoïdal forcé : Le dispositif se comporte comme un filtre passe-haut. Pour déterminer les maxima d'amplitude en fonction de la fréquence, on peut calculer le coefficient d'amortissement z , en identifiant l'équation différentielle à sa forme canonique :

$$\ddot{\alpha} + 2z\omega_0\dot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = \frac{a}{l}\omega^2\cos(\omega t)$$

Le calcul numérique de z donne $z = 0,6$ qui est inférieur à $z_c = 1/\sqrt{2}$, l'oscillateur est donc très faiblement amorti, et il y a un phénomène de résonance, qui se produit pour $\omega_r = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-2z^2}}$.

Le calcul de l'amplitude maximale donne alors $A_{max} = 52$ cm...obtenue pour $\omega_r = 4$ rad.s⁻¹.

17 - Les deux premières courbes font apparaître un bref régime transitoire, suivi d'un régime sinusoïdal assez régulier de période 5 s qui correspond à la période de la houle.

Le troisième cas fait apparaître une non linéarité puisqu'en régime périodique, l'angle ne varie pas sinusoïdalement.

On remarque aussi que la constante de temps augmente avec l .

18 - La puissance moyenne transmise par le houlogénérateur est $\langle \mathcal{P}_l \rangle = \langle \beta \dot{\alpha}^2 \rangle$.

À l'aide de la simulation numérique, on connaît $\alpha(t)$, on calcule alors $\dot{\alpha}$, puis $\dot{\alpha}^2$, il suffit alors de calculer la valeur moyenne de $\dot{\alpha}^2$ (éventuellement la transformée de Fourier dont le terme de fréquence nulle est égal à la valeur moyenne...)

On observe que la courbe passe par un maximum en $l \approx 8$. Pour l trop faible ou trop grand, le transfert d'énergie ne se fait pas ...

III.- Problème de la conversion électromécanique

19 - La loi de Faraday relie la force électromotrice induite dans la bobine $e(t)$ au flux du champ $\vec{B}_0$ à travers la bobine :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Le flux est : $\Phi(t) = NbhB_0\cos(\Omega t)$, donc la force électromotrice est :

$$e = NbhB_0\Omega.\sin(\Omega t)$$

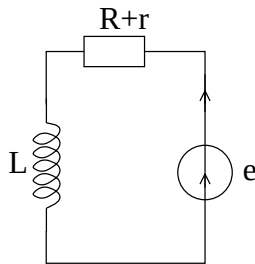
Par ailleurs le moment des forces de Laplace est $\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}_0$

avec $\vec{\mathcal{M}}$ le moment magnétique du rotor : $\vec{\mathcal{M}} = Nihb\vec{u}$

Soit :

$$\vec{\Gamma}_L = -NihbB_0\sin(\Omega t)\vec{e}_x$$

20 -



La loi des mailles s'écrit, avec $R' = R + r$:

$$L\frac{di}{dt} + R'i = e = NbhB_0\Omega.\cos(\Omega t - \pi/2)$$

L'auteur du sujet appelle "régime transitoire" la solution générale de l'équation différentielle.

Le temps caractéristique de la solution générale est $\tau = \frac{L}{R'}$

Solution sinusoïdale forcée : $i_1 = I_1\cos(\Omega t + \phi)$

Pour établir les expressions de I_1 et ϕ , on peut commencer par établir l'amplitude complexe de $i_1(t)$.

$$I_1 = \frac{-j\Omega NbhB_0}{R' + jL\Omega}$$

On identifie alors : $I_1 = \frac{\Omega NbhB_0}{\sqrt{R'^2 + (L\Omega)^2}}$ et $\phi = -\pi/2 - \arctan(\frac{L\Omega}{R'})$

$$\text{Alors } \cos(\phi) = \frac{-L\Omega}{\sqrt{R'^2 + (L\Omega)^2}} \text{ et } \sin(\phi) = \frac{-R'}{\sqrt{R'^2 + (L\Omega)^2}}$$

21 -

$$\vec{\Gamma}_L = -NbhB_0I_1\cos(\Omega t + \phi)\sin(\Omega t)\vec{e}_x$$

$$\vec{\Gamma}_L = -NhbB_0 I_1 (\cos(\Omega t) \cos(\phi) - \sin(\Omega t) \sin(\phi)) \sin(\Omega t) \vec{e}_x$$

Et en valeur moyenne :

$$\langle \vec{\Gamma}_L \rangle = \frac{NhbB_0 I_1}{2} \sin(\phi) \vec{e}_x$$

Et en remplaçant I_1 et $\sin(\phi)$ par leurs valeurs :

$$\langle \vec{\Gamma}_L \rangle = \frac{NhbB_0}{2} \frac{\Omega NhbB_0}{\sqrt{R'^2 + (L\Omega)^2}} \frac{-R'}{\sqrt{R'^2 + (L\Omega)^2}} \vec{e}_x$$

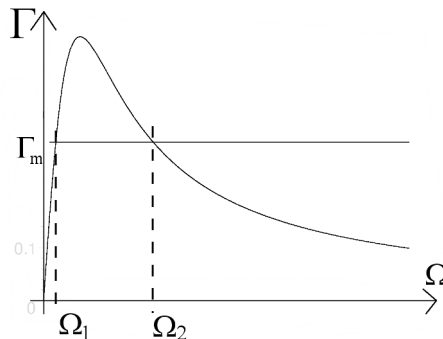
$$\langle \vec{\Gamma}_L \rangle = -R'\Omega \frac{(NhbB_0)^2}{2(R'^2 + (L\Omega)^2)} \vec{e}_x$$

Le signe négatif de Γ_L vient du fait que le couple de Laplace est résistant, puisque le rotor est entraîné, il reçoit un travail mécanique, et fournit de l'énergie électrique au circuit.

22 - En régime de rotation permanente le théorème du moment dynamique s'écrit :

$$0 = \Gamma_m + \langle \Gamma_L \rangle$$

$$\Gamma_m = - \langle \Gamma_L \rangle$$



Pour une valeur donnée de Γ_m , il y a deux valeurs possibles de Ω . Pour Ω_1 , l'état de fonctionnement est stable, puisqu'une augmentation de Ω entraîne l'apparition d'un couple qui freine le rotor. Par contre, pour Ω_2 , l'état est instable.

Il apparaît une valeur critique qui correspond à la valeur maximale de Γ , soit Γ_c obtenue pour Ω_c .

$$\text{On établit : } \Omega_c = \frac{R'}{L} \text{ et } \Gamma_c = -\frac{(NhbB_0)^2}{4L}$$

Si ces valeurs critiques sont dépassées, le matériel risque d'être détérioré, car l'équilibre ne peut être atteint le rotor tournant de plus en plus vite.

23 - Si le champ magnétique tournant tourne à la même vitesse que le rotor, il n'y a pas de phénomène d'induction, donc pas de courant dans la bobine. Il y a une erreur d'énoncé, la fin n'a pas de sens. Voulait-on étudier une machine asynchrone ? En quoi une machine asynchrone supprime-t-elle le problème des valeurs critiques ?