

Corrigé de l'épreuve de Physique 1 CCP 2012 PSI

Francis BROUCHIER

15 mai 2012

PROBLÈME A : quelques phénomènes d'hystérésis en physique

Hystérésis en électronique : trigger de Schmidt

A.1 L'amplificateur opérationnel étant supposé idéal, aucun courant ne circule dans les entrées + et - . En régime linéaire $V_{+1} - V_- = 0$. Ici l'entrée - est à la masse $V_- = V_+ = 0$. En régime non linéaire pour saturer l'amplificateur opérationnel à $+V_{sat}$ il faut $V_+ > 0$.

A.2 Comme le courant dans l'entrée + est nul le courant traversant R et $2R$ est le même constituant un diviseur potentiométrique :

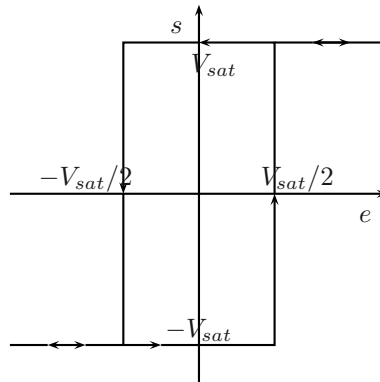
$$V_+ = e(t) + [s(t) - e(t)] \frac{R}{3R} = \frac{2}{3}e(t) + \frac{1}{3}s(t) \quad \boxed{V_+ = \frac{2}{3}e(t) + \frac{1}{3}s(t)}$$

A.3 $s(t) = -V_{sat}$ et passe à $+V_{sat}$:

$$V_+ = \frac{2}{3}e(t) - \frac{V_{sat}}{3} \quad V_+ > 0 \quad 2e(t) - V_{sat} > 0 \quad \boxed{V_1 = \frac{V_{sat}}{2}}$$

De la même façon $\boxed{V_2 = -V_{sat}/2}$.

A.4



A.5 Applications : D'après la formule de l'énoncé on obtient pour un nombre p donné l'entier décimal maximal en mettant tous les b_k à l'unité. Ce qui donne :

$$N_{max} = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{p-1} + 2^p$$

Multiplions cette expression par 2 et faisons la différence de la seconde moins la première :

$$2.N_{max} = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^p + 2^{p+1} \quad N_{max} \cdot (2 - 1) = 2^{p+1} - 1$$

On remarque que la quasi-totalité des termes intermédiaires se simplifie (c'est de cette façon que l'on calcule la somme des termes d'une série géométrique). Comme on part de 0 à p dans la formule il y a $p+1$ bits. Pour 13 bits on a donc $p = 12$ ce qui donne $N_{max} = 2^{12} - 1 = 8191$. Pour 14 bits on $p = 13$ soit $N_{max} = 2^{13} - 1 = 16383$. Le plus grand nombre décimal de 4 chiffres que l'on puisse écrire est 9999. Il est donc compris entre le nombre binaire de 13 bits et le nombre binaire de 14 bits. Il faudra donc 14 "trigger de Schmidt" pour représenter la nombre décimal de l'énoncé.

Le mot "trigger de Schmidt" ne figure pas dans le programme de physique de PSI 2° année (ni d'ailleurs dans celui de 1° année). Il doit donc s'agir d'un exemple de commutateur à hystérésis, qui lui figure au programme.

Hystérésis en optique : porte logique

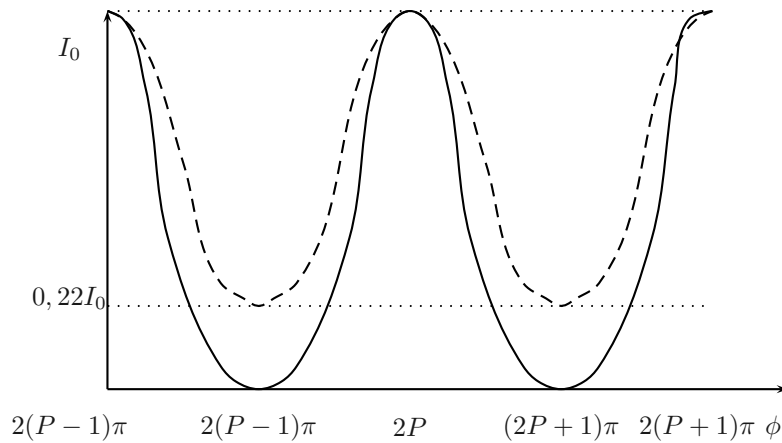
A.6 Le déphasage ϕ correspond à un aller-retour de la lumière dans la lame. Le trajet vaut $2.L$, parcouru à la célérité c_0/n_0 . Le temps de parcours est donc $2.L.n_0/c_0$.

$$\phi = \frac{2.L.n_0.\omega}{c_0}$$

A.7 D'après la formule de l'énoncé on voit que si $\cos \phi = 1$ alors $I_t = I_0$ qui est la valeur maximale possible pour I_t (il ne peut pas, en sortie, avoir plus d'énergie qu'à l'entrée). D'où :

$$\phi = 2.P.\pi$$

A.8 Si $\cos \phi = -1$ I_t est minimum et vaut $I_0.(1-R)^2/(1+R)^2$. Pour $R = 0,1$ $I_{min} = 0,22 I_0$ et pour $R = 0,9$ $I_{min} = 8,26.10^{-3} I_0$. Quelle que soit la valeur de R la dérivée de I_t en fonction de ϕ s'annule pour $\phi = (2P \pm 1)\pi$. La courbe a une certaine allure de sinusöide. On tracera les deux courbes sur le même graphique. Pour $R = 0,1$ on aura une courbe en pointillés, et pour $R = 0,9$ une courbe en traits pleins.



A.9 En combinant les formules données dans l'énoncé on trouve :

$$\phi = 2k \int_0^L n(x)dx = 2k \int_0^L n_0[1 + \alpha(x)]dx = 2kLn_0 + 2k\alpha n_0 \int_0^L I(x)dx \quad \boxed{\phi = 2kLn_0[1 + \alpha\langle I \rangle]}$$

A.10 Un peu de calcul pour ne pas perdre la main :

$$\alpha\langle I \rangle = \frac{\phi}{2kLn_0} - 1 \quad \langle I \rangle = \frac{\phi}{2kLn_0\alpha} - \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{2kLn_0\alpha}(\phi - 2kLn_0\alpha)$$

$$\text{posons } \phi_0 = 2kLn_0 \quad I_t = \xi.\langle I \rangle = \frac{\xi}{2kLn_0\alpha}(\phi - \phi_0) \quad \boxed{\gamma = \frac{\xi}{2kLn_0\alpha}} \quad \boxed{\phi_0 = 2kLn_0}$$

Le paramètre λ n'a pas été défini dans l'énoncé, il fallait sans doute lire ξ .

A.11 On a donc maintenant deux expressions de I_t soit deux expressions de I_t/I_0 . La bonne valeur est obtenue à l'intersection des deux courbes représentatives. Celle donnée dans l'énoncé est celle vue en **A.7**. La relation affine vue à la question précédente est représentée par une droite passant par le point $I_t = 0$ pour $\phi = \phi_0$ et de pente variable. En faisant tourner cette droite autour du point précédent on obtient 1 ou 3 points d'intersection en ne comptant pas les points de tangence.

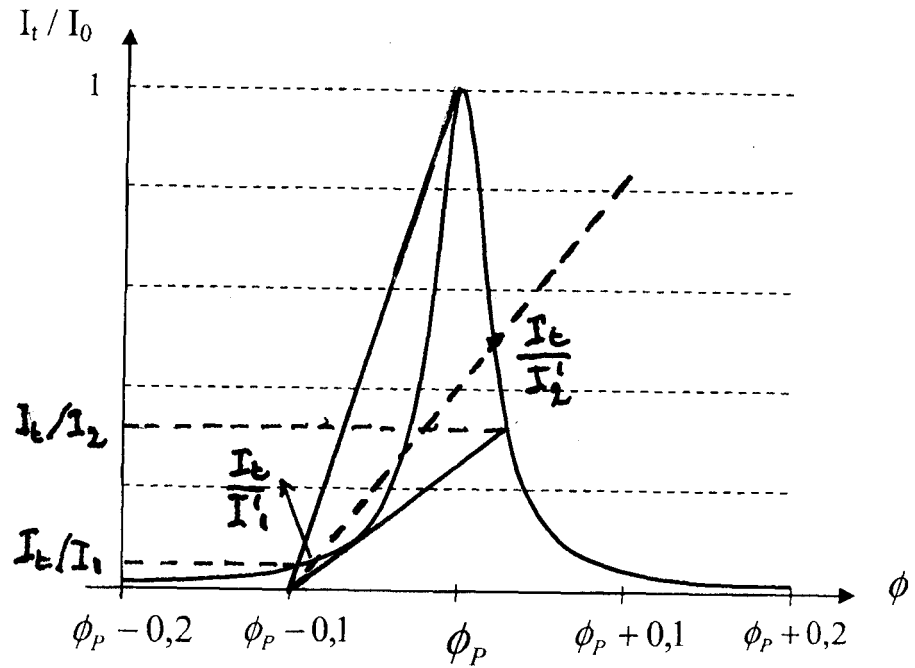


Figure 3 : courbe $I_t / I_0(\phi)$

En mesurant sur la courbe à l'aide d'une règle graduée (à ne pas oublier !) on trouve $I_t / I_1 \sim 3mm$ et $I_t / I_2 \sim 21mm$. En supposant que les I_t ont la même valeur on trouve $I_2 / I_1 \sim 7$.

A.12 Quand I_0 augmente en partant de 0 on rencontre le point de la courbe où I_t / I_1 a la plus faible valeur. Pour $I_0 = I_1$ on passe dans le domaine où il y a trois solutions. Une petite variation de I_0 provoque une variation brutale de I_t et on atteint presque le sommet de la courbe de la question précédente. On continue vers le deuxième point où se produit le basculement avec $I_0 = I_2$. I_t diminue brutalement. Alors, en diminuant I_0 , I_t diminue à nouveau sur la branche de droite de la courbe de la question précédente.

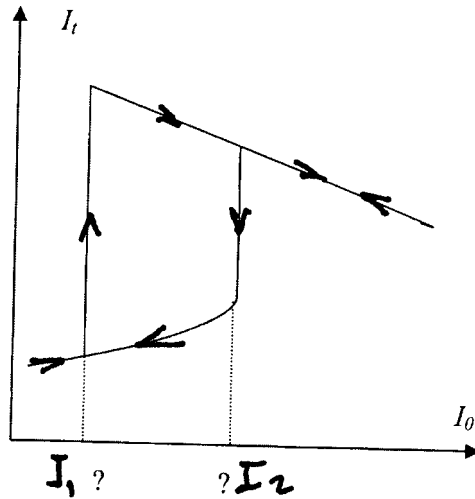
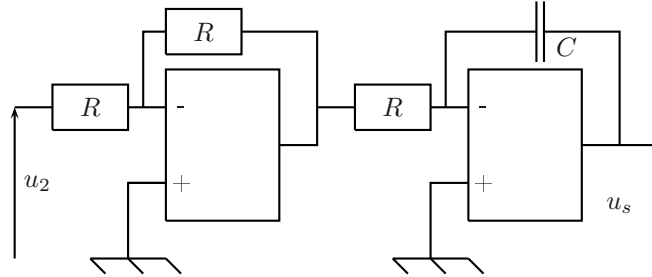


Figure 4 : I_t en fonction de I_0 .

A.13 On peut toujours imaginer une application en optronique (équivalent de l'électronique pour l'optique) pour faire des mémoires optiques et, peut-être un jour, des ordinateurs optiques.

Hystérésis en électromagnétisme : ferromagnétisme

A.14 Le montage demandé est un intégrateur qui, dans sa version la plus simple exige un amplificateur opérationnel, un résistor et un condensateur. Son seul inconvénient est d'introduire un signe moins dans l'intégration. Il semble que l'auteur de l'énoncé ne veuille pas de ce signe moins et propose un montage inverseur avec un autre amplificateur opérationnel et deux résistors. Nous allons donc proposer le montage demandé en indiquant ses limites et comment y remédier.



L'énoncé précise bien que l'intensité du courant i_2 est nulle, ce qui implique que l'impédance d'entrée du circuit suivant soit quasi infinie. Or l'impédance d'entrée du circuit inverseur vaut R ce qui est loin d'être infini. On aurait pu faire l'économie de deux résistors et utiliser le premier amplificateur opérationnel en montage suiveur dont l'impédance d'entrée respecte l'énoncé. Pour avoir le signe convenable, il suffit alors de permuter les bornes du bobinage. La constante τ demandée vaut $\tau = R.C$ (exercice classique du cours).

A.15 Encore une imprécision de notation : r ne peut pas être à la fois un rayon et une résistance. De même R n'est pas une résistance mais le rayon moyen R_m défini à la question précédente. Prenons comme contour le cercle de rayon R_m et appliquons le théorème d'Ampère : $\int_{(C)} H \cdot dl = N_1 \cdot i_1(t) = 2\pi \cdot R_m$ soit

$$H = \frac{N_1 \cdot i_1(t)}{2\pi \cdot R_m}$$

A.16 Le flux du champ magnétique à travers la seconde bobine est $\Phi_2 = N_2 \cdot B \cdot S$. La fém induite en l'absence de courant i_2 vaut $u_2 = -d\Phi_2/dt = -N_2 \cdot S \cdot dB/dt$. Ce qui donne $dB/dt = -u_2/N_2 \cdot S$ et $B = -1/N_2 \cdot S \int u_2 \cdot dt$. Avec $\int u_2 \cdot dt = \tau \cdot u_s$ il vient :

$$f(t) = u_s \quad B = -\frac{\tau}{N_2 \cdot S} u_s$$

La présence du signe moins montre que l'on pouvait économiser deux résistors et annuler vraiment i_2 .

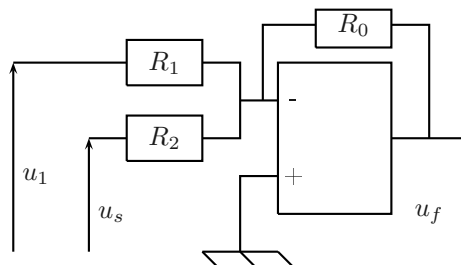
A.17 On utilise une tension d'entrée u_e fonction sinusoïdale du temps de période T de façon à décrire à chaque période le cycle d'hystérésis entre les valeurs : maximales I_{max} et minimales $-I_{max}$ correspondant à H_{max} et $-H_{max}$. Dans ces conditions $M(t) = B/\mu_0 - H(t)$ dans l'hypothèse de l'ARQS. En développant les calculs il vient :

$$M(t) = -\frac{\tau}{\mu_0 \cdot N \cdot S} \cdot u_s - \frac{N_1 \cdot u_1}{2\pi R_m \cdot r} \quad \text{soit en posant} \quad \alpha = \frac{\tau}{\mu_0 \cdot N_2 \cdot S} \quad \beta = \frac{N_1}{2\pi \cdot R_m \cdot r} \quad M(t) = -(\alpha u_s + \beta u_1)$$

Les paramètres α et β sont des grandeurs ayant une dimension. M étant en $A \cdot m^{-1}$ et les tensions en Volts, ces coefficients sont en $\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$. Pour faire une somme de tensions pondérées avec des amplificateurs opérationnels il faut que les coefficients soient sans dimensions. Pour les obtenir on met en facteur $(\alpha + \beta)$ et on obtient :

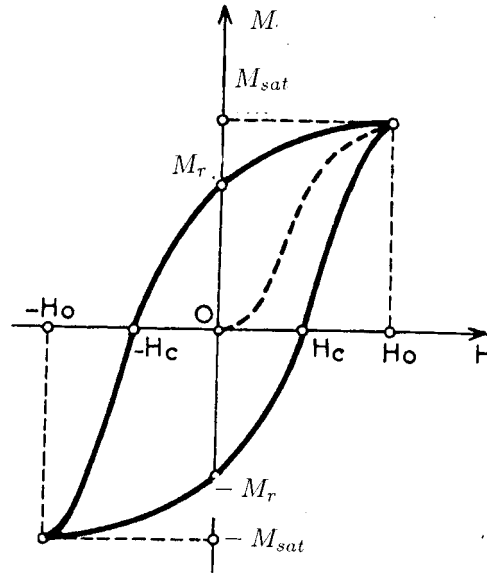
$$M(t) = (\alpha + \beta) \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} u_s + \frac{\beta}{\alpha + \beta} u_1 \right) \quad M(t) = (\alpha + \beta) (\alpha' u_s + \beta' u_1)$$

On pourra alors faire le schéma d'un additionneur pondéré à l'aide d'un amplificateur opérationnel.



La somme des courants dans R_1 et dans R_2 se retrouve dans R_0 soit $u_f = -R_0(u_1/R_1 + u_s/R_2)$. On peut fixer R_0 et calculer $R_1 = R_0/\alpha'$ et $R_2 = R_0/\beta'$.

A.18 Voici un exemple de courbe d'hystérésis d'un matériau ferromagnétique relativement "dur" pouvant permettre de fabriquer des aimants permanents.



A.19 $u_1(t)$ et $i_1(t)$ sont des valeurs instantanées, il eut été préférable de désigner la puissance instantanée par $p(t)$. On fera avec la notation de l'énoncé. Bien que cela ne soit pas précisé on peut penser que $u_1(t)$ est la tension aux bornes du primaire. Le tore ferromagnétique n'ayant pas de fuites magnétiques il se comporte comme un transformateur parfait et on peut écrire $u_1/u_2 = N_1/N_2$ ce qui permet de calculer u_1 en fonction de u_2 . Rappelons des résultats précédents :

$$H = \frac{N_1 \cdot i_1(t)}{2\pi \cdot R_m} \quad u_2 = -N_2 \cdot S \frac{dB}{dt} \quad u_1 = -N_1 \cdot S \frac{dB}{dt} \quad i_1(t) = \frac{2\pi R_m}{N_1} H$$

Ce qui donne finalement :

$$P = u_1 \cdot I_1 = -2\pi R_m \cdot S \cdot H \cdot \frac{dB}{dt}$$

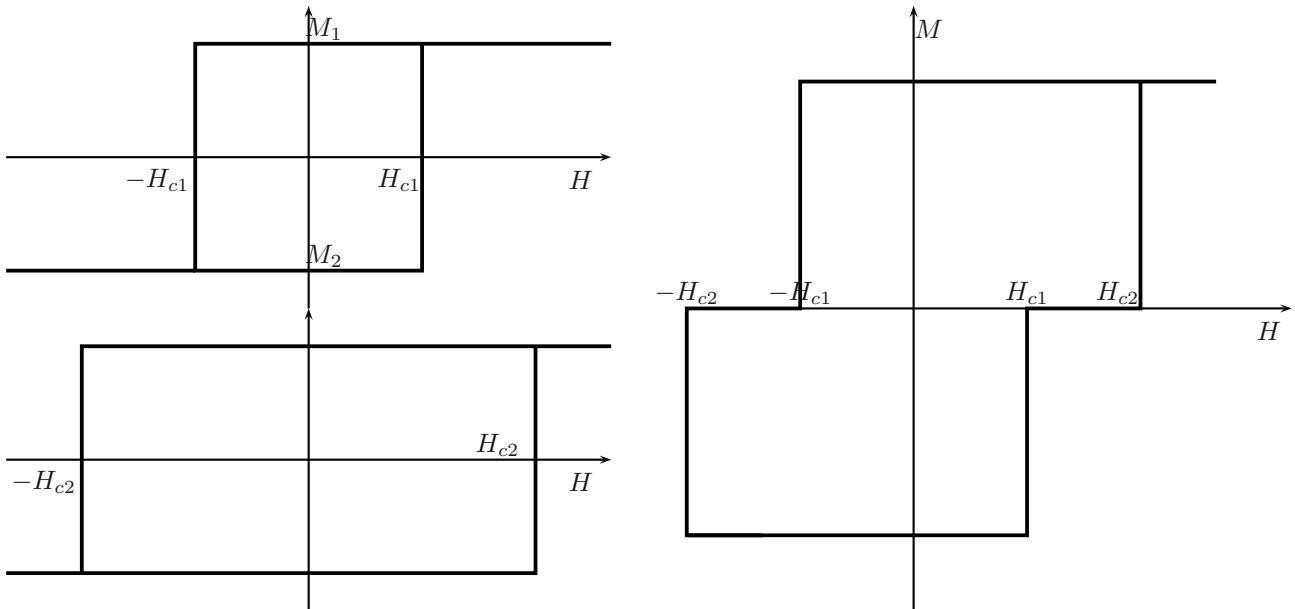
Pour le calcul de la puissance moyenne on peut ne pas tenir compte du signe - et la calculer sur une période du courant sinusoïdal :

$$P_{moy} = \frac{1}{T} 2\pi R_m \cdot S \int_0^T H \cdot \frac{dB}{dt} dt \quad P_{moy} = \frac{2\pi R_m \cdot S \mu_0}{T} \int_{(C)} H \cdot dM$$

ou (C) représente la courbe fermée du cycle d'hystérésis. On peut remarquer que l'approximation indiquée dans l'énoncé revient à négliger H devant M dans l'expression de $B = \mu_0(H + M)$. L'intégrale de la formule ci-dessus représente l'aire du cycle d'hystérésis.

A.20 Application : éléments de spintronique

Pour faire des graphiques plus simples l'énoncé propose de modéliser les cycles d'hystérésis par des rectangles. Cela suppose donc que l'aimantation rémanente est confondue avec l'aimantation à saturation. Pour simplifier encore plus on suppose que ces grandeurs sont les mêmes pour le fer doux et le fer dur. En revanche pour le fer doux le champ coercitif est plus faible que pour le fer dur. Pour simplifier on prendra $H_{c2} = 2 \cdot H_{c1}$. Les courbes obtenues seront en fait des segments de droite (à rapprocher des diagrammes asymptotiques pour les filtres).

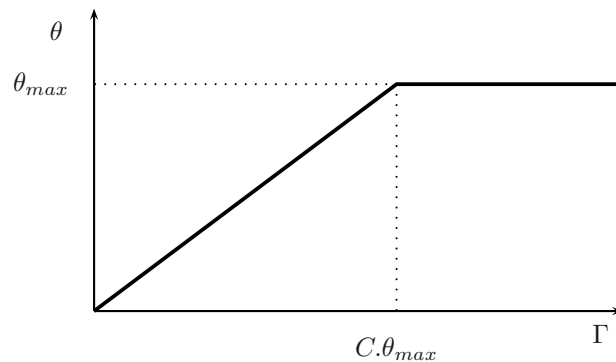


La figure 6 avec ses deux flèches en sens contraire pour M_1 et M_2 pouvait induire les candidats en erreur (l'auteur du corrigé s'y est laissé prendre et ce n'est qu'en constatant que ça ne marchait pas qu'il en est venu à faire la somme des courbes d'aimantation). En traçant les cycles d'hystérésis simplifiés du fer doux et du fer dur, on fait la somme point par point des aimantations pour un H donné et on peut ainsi expliquer les variations de la courbe globale. Le fer doux provoque les petits creux que l'on observe sur la courbe expérimentale.

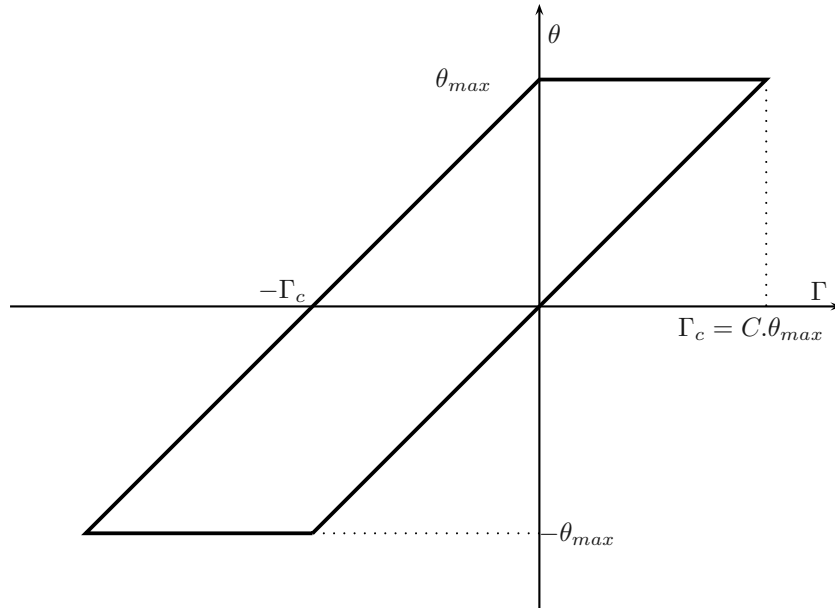
Hystérésis en mécanique : déformation plastique d'un matériau

A.21 $\Gamma = F.d$ Chaque force effectue le déplacement $d\theta.d/2$ le travail élémentaire pour les deux forces vaut donc $dW = 2.F.d\theta.d/2 = \Gamma.d\theta$

A.22 Dans la phase $\Gamma = C.\theta$ la déformation est élastique : l'angle θ est proportionnel au couple appliqué. La constante C est la constante de torsion du ruban. L'angle θ étant sans dimension C s'exprime en $N.m$



A.23 Modélisation du phénomène d'hystérésis



On a vu que pour faire tourner de l'angle élémentaire $d\theta$ il fallait fournir le travail $dW = \Gamma.d\theta$. De la sorte le travail total pour faire le tour du cycle vaut l'aire du cycle. Géométriquement on voit sur le graphique que celle-ci se compose de deux rectangles de dimensions Γ_c et θ_{max} , ce qui fait en tout :

$$W = 2.\Gamma_c.\theta_{max} = 2.C.\theta_{max}^2$$

Corrigé de l'épreuve de Physique 1 CCP 2012 PSI

Francis BROUCHIER

21 mai 2012

PROBLÈME B : quelques effets des champs magnétiques

Effet d'un champ magnétique sur une particule chargée

B.1

$$\vec{f} = q \cdot \vec{v} \wedge \vec{B} = q \cdot (v_x \cdot \vec{e}_x + v_y \cdot \vec{e}_y + v_z \cdot \vec{e}_z) \wedge (B_0 \cdot \vec{e}_z) = q \cdot (v_y \cdot B_0 \cdot \vec{e}_x - v_x \cdot B_0 \cdot \vec{e}_y + 0 \cdot \vec{e}_z) = m \cdot \left(\frac{dv_x}{dt} \vec{e}_x + \frac{dv_y}{dt} \vec{e}_y + \frac{dv_z}{dt} \vec{e}_z \right)$$

De la projection sur $\vec{e}_z$ on tire $dv_z/dt = 0$ soit $v_z = Cte$. A $t = 0$ $\vec{v} = v_0 \cdot \vec{e}_x$ d'où on tire $v_z = 0$ et $z = Cte = 0$. Le mouvement de la particule se fait dans le plan $[z = 0]$. Les deux autres équations sont $qv_y B_0 = m \cdot dv_x/dt$ et $-qv_x B_0 = m \cdot dv_y/dt$. On voit facilement que qB_0/m a les dimension de l'inverse d'un temps, un angle étant sans dimension ce terme peut donc être une pulsation.

B.2

$$\underline{V} = v_x + jv_y \quad \frac{dv_x}{dt} = \omega_c v_y \quad \frac{dv_y}{dt} = -\omega_c v_x \quad \frac{dv_x}{dt} + j \frac{dv_y}{dt} = -\omega_c (v_x + jv_y) \quad \boxed{\frac{dV}{dt} + j\omega_c V = 0}$$

La solution de cette équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficient constant est du type $\underline{V} = A \cdot \exp(-j\omega_c t)$ $t = 0$ $\underline{V} = v_0 + j \cdot 0$ $\boxed{\underline{V} = v_0 \cdot \exp(-j\omega_c t)}$

B.3

$$\underline{V} = \frac{d\underline{R}}{dt} \quad d\underline{R} = \underline{V} dt = v_0 \exp(-j\omega_c t) dt \quad \underline{R} = -\frac{v_0}{j\omega_c} \exp(-j\omega_c t) + Cte \quad t = 0 \quad \underline{R} = 0 \quad Cte = \frac{v_0}{j\omega_c}$$

Ce qui donne en développant l'exponentielle imaginaire :

$$\underline{R} = \frac{v_0}{j\omega_c} [1 - \exp(-j\omega_c t)] = \frac{v_0}{j\omega_c} [1 - \cos(\omega_c t) + j \sin(\omega_c t)] = \frac{v_0}{\omega_c} [\sin(\omega_c t) + j(\cos(\omega_c t) - 1)]$$

d'où les valeurs de

$$x = \frac{v_0}{\omega_c} \sin(\omega_c t) \quad y = \frac{v_0}{\omega_c} [\cos(\omega_c t) - 1] \quad \sin(\omega_c t) = \frac{\omega_c}{v_0} x \quad \cos(\omega_c t) = \frac{\omega_c}{v_0} \cdot y + 1$$

On élimine le temps pour avoir l'équation de la trajectoire en écrivant que $\sin^2 + \cos^2 = 1$:

$$\frac{\omega_c^2}{v_0^2} x^2 + \left(\frac{\omega_c}{v_0} y + 1 \right)^2 = 1 \quad x^2 + \left[y + \frac{v_0}{\omega_c} \right]^2 = \frac{v_0^2}{\omega_c^2} \quad [x - 0]^2 + \left[y - \left(-\frac{v_0}{\omega_c} \right) \right]^2 = \frac{v_0^2}{\omega_c^2}$$

On obtient finalement les valeurs demandées :

$$\boxed{x_c = 0} \quad \boxed{y_c = -\frac{v_0}{\omega_c}} \quad \boxed{\rho_L = \frac{v_0}{\omega_c}}$$

Remarque Il est dommage que l'on ait supprimé du programme de cinématique du point en 1^{re} année le trièdre de Serret-Frenet car la trajectoire demandait un minimum de calcul. En **B.1** on a montré facilement que la trajectoire est plane. Sur la trajectoire l'accélération tangentielle vaut dv/dt et l'accélération normale v^2/ρ où ρ est le rayon de courbure de la trajectoire.

La force $\vec{f} = m\vec{a}$ est perpendiculaire à $\vec{v}$ d'où $dv/dt = 0$ et $v = Cte = v_0$, $qvB_0 = v^2/\rho$ $\rho = mv_0/(qB_0) = v_0/\omega_c = \rho_L$. La trajectoire est une courbe plane de rayon de courbure constant, c'est donc un cercle (ou une portion de cercle).

Pourquoi faire simple quand on peut faire compliqué ?

B.4 Le gain d'énergie cinétique de la particule est égal au travail de la force électrique soit $\boxed{\Delta W = q(V_B - V_A)}$.

B.5 Application : spectromètre de masse.

Compte tenu de la géométrie du problème la trajectoire est un demi cercle de rayon ρ_L la distance demandée vaut donc $d = 2 \cdot \rho_L = 2mV/qB$. Pour une vitesse V donnée d dépend du rapport m/q si on suppose B constant. On ne peut pas trier les ions seulement suivant leur masse.

L'énergie cinétique des ions vaut $\frac{1}{2}mV^2 = qU$ on en déduit l'expression de la vitesse :

$$V = \sqrt{\frac{2qU}{m}} \quad d = \frac{2m}{qB} \sqrt{\frac{2qU}{m}} = \frac{2}{B} \sqrt{\frac{mU}{q}}$$

La charge de chaque type d'ion étant la même on trouve :

$$\frac{d_1}{d_2} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$$

Effet d'un champ magnétique sur un conducteur : effet d'induction

B.6 La barre CD est soumise à son poids mg dirigé vers le bas et à la force exercée par les ressorts $2k(l - l_0)$ dirigée vers le haut. A l'équilibre on a $mg = 2k(l - l_0)$ soit $l = l_0 + mg/2k$. Pour respecter l'énoncé on prendra l'origine à la position d'équilibre statique, ce qui revient à considérer que le poids de la barre est compensé par l'allongement initial des ressorts et que ces forces n'interviennent plus dans la suite du problème.

B.7 On note z le déplacement de la tige à partir de sa position d'équilibre vers les z croissants. La tige CD coupe les lignes de champ magnétique et crée un flux coupé. Le champ $\vec{B}$ étant perpendiculaire à la surface balayée dont la normale est de signe opposé à $\vec{B}$ on peut écrire $\Phi = -BLz$. La force électromotrice induite est alors :

$$e_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad e_{ind} = BL \frac{dz}{dt}$$

B.8 La barre étant orientée de C vers D, ainsi que le courant on a :

$$e_{ind} = R \cdot I \quad i(t) = \frac{BL}{R} \cdot \frac{dz}{dt}$$

La force de Laplace vaut $BLi(t)$. Avec la règle du bonhomme d'Ampère elle est dirigée vers le bas : $\vec{F}_L = -BLi(t)\vec{e}_z$.

B.9 Écrivons le principe fondamental de la dynamique pour la mouvement de la barre :

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -2kz - \frac{B^2 L^2}{R} \frac{dz}{dt} \quad \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{B^2 L^2}{Rm} \frac{dz}{dt} + \frac{2k}{m} z = 0$$

B.10 Avec les notations de l'énoncé l'équation différentielle devient :

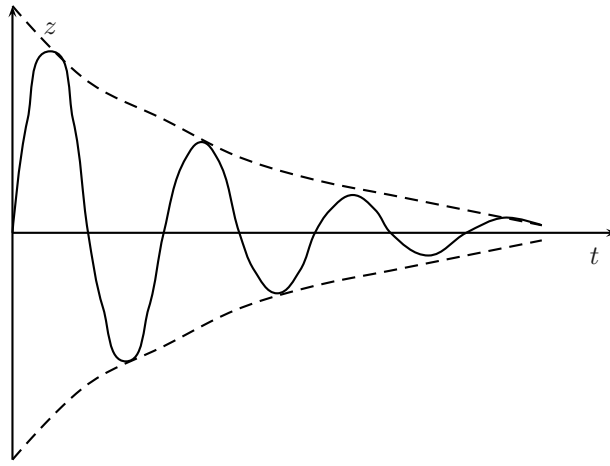
$$\frac{d^2 z}{dt^2} + 2\alpha \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = 0$$

c'est l'équation différentielle linéaire à coefficients constants d'un oscillateur amorti. Pour résoudre cette équation on calcule les racines de l'équation caractéristique : $r^2 + 2\alpha r + \omega_0^2 = 0$. On remarque avec satisfaction que le terme en r a un coefficient pair ce qui permet d'utiliser le discriminant réduit $\alpha^2 - \omega_0^2 = -\gamma^2$. Avec l'hypothèse de l'énoncé ce discriminant est négatif et les racines sont complexes : $r = -\alpha \pm j\gamma$

$$z = A \exp(r_1 t) + B \exp(r_2 t) \quad t = 0 \quad z = 0 \quad A + B = 0 \quad z = \exp(-\alpha t) [\exp(j\gamma t) - \exp(-j\gamma t)] = 2jA \exp(-\alpha t) \sin(\gamma t)$$

Avec la condition initiale $t = 0 \quad dz/dt = V$ on calcule dz/dt

$$\frac{dz}{dt} = 2jA \exp(-\alpha t) [-\alpha \sin(\gamma t) + \gamma \cos(\gamma t)] \quad t = 0 \quad \frac{dz}{dt} = V = 2jA\gamma \quad z = \frac{V}{\gamma} \exp(-\alpha t) \sin(\gamma t)$$



B.11 A l'instant initial l'énergie cinétique de la barre vaut $\frac{1}{2}mV^2$. A l'instant final la vitesse est nulle et la variation d'énergie cinétique est $\frac{1}{2}mV^2$, qui est égale au travail de la force de Laplace.

$\text{Travail de la force de Laplace} = \frac{1}{2}mV^2$

Ce travail a été transformé en chaleur dans la résistance :

$\text{Energie Joule dissipée} = \frac{1}{2}mV^2$

Effet d'un champ magnétique sur un matériau supraconducteur : effet Meissner

B.12 B/μ_0 a les dimensions de H soit $A.m^{-1}$. L'auteur du corrigé vient de découvrir l'existence d'une "densité volumique de courant électrique" qui figure explicitement au programme et qui n'est, en fait, que l'ancienne "densité de courant" permettant de calculer l'intensité du courant à travers une surface : $I = \int_S \vec{j} d\vec{S}$. On n'arrête pas le progrès !

De la sorte le vecteur $\vec{j}_L$ s'exprime en $A.m^{-2}$. Le rotationnel est à base de dérivées premières par rapport aux coordonnées d'espace, $\vec{rot}\vec{j}_L$ est donc en $A.m^{-3}$. Λ^2 a alors les dimensions de $A.m^{-1}/A.m^{-3} = m^2$, Λ s'exprime en $[m]$.

B.13 Bien que cela ne soit pas dit dans l'énoncé on peut supposer que le matériau supraconducteur a les propriétés magnétique du vide en régime indépendant du temps (comme pour les conducteurs ordinaires). On écrit la dernière équation de Maxwell dans ce cas : $\vec{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}_L$. Pour faire intervenir le rotationnel de $\vec{j}_L$ on prend le rotationnel des deux membres :

$$\vec{rot}(\vec{rot}\vec{B}) = \vec{grad}(\text{div}\vec{B}) - \Delta\vec{B} = \mu_0\vec{rot}\vec{j}_L = \frac{-1}{\Lambda^2}\vec{B}$$

$\vec{B}$ ne dépend que de z , sa divergence est nulle (3^e équation de Maxwell). En projection sur z le Laplacien vecteur se simplifie et on a :

$$\frac{d^2B}{dz^2} = \frac{1}{\Lambda^2}B \quad \text{soit} \quad \frac{d^2B(z)}{dz^2} - \frac{1}{\Lambda^2}B(z) = 0$$

B.14 Dans tous les milieux $\text{div}\vec{B} = 0$ le flux du champ magnétique est conservatif, il y a conservation de la composante normale de $\vec{B}$ au passage d'une surface : $B_{N1} = B_{N2}$. Ici le champ $\vec{B}$ est tangent à la surface de séparation, il faut donc s'intéresser à la composante tangentielle qui, elle, est donnée pour le vecteur $\vec{H}$; on a admis que $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$ d'où $B_{T2} - B_{T1} = \mu_0 j_s$ où j_s est le courant surfacique. Comme ici il est nul on écrit donc $B_{T2} = B_{T1}$

B.15 L'équation caractéristique de l'équation différentielle est :

$$r^2 - \frac{1}{\Lambda^2} = 0 \quad \left(r + \frac{1}{\Lambda}\right)\left(r - \frac{1}{\Lambda}\right) = 0 \quad B(z) = \alpha \cdot \exp\left(-\frac{z}{\Lambda}\right) + \beta \cdot \exp\left(\frac{z}{\Lambda}\right)$$

Écrivons maintenant les conditions aux limites et calculons les constantes d'intégration :

$$\alpha \exp\left(-\frac{l}{\Lambda}\right) + \beta \exp\left(\frac{l}{\Lambda}\right) = B_0 \quad \alpha \exp\left(\frac{l}{\Lambda}\right) + \beta \exp\left(-\frac{l}{\Lambda}\right) = B_0$$

On obtient un système de deux équations de premier degré à deux inconnues dont le résultat est :

$\alpha = \beta = \frac{B_0}{\exp\left(\frac{l}{\Lambda}\right) + \exp\left(-\frac{l}{\Lambda}\right)} = \frac{B_0}{2 \cosh\left(\frac{l}{\Lambda}\right)} = \frac{D}{2}$

Il vient finalement l'expression de $B(z)$ demandée par l'énoncé :

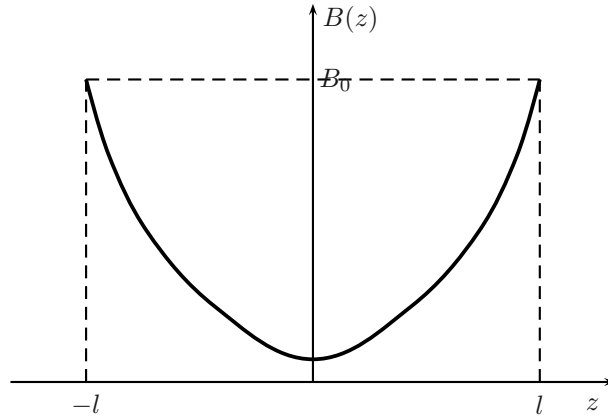
$$B(z) = D \cdot \cosh\left(\frac{z}{\Lambda}\right) \quad D = \frac{B_0}{\cosh\left(\frac{l}{\Lambda}\right)}$$

L'auteur prie le lecteur de l'excuser pour la notation $\cosh$ la seule disponible sous $\text{\TeX}$.

B.15 L'expression de $B(z)$ peut se mettre sous la forme :

$$B(z) = B_0 \cdot \frac{\cosh \frac{z}{\Lambda}}{\cosh \frac{l}{\Lambda}}$$

Si $l \gg \Lambda$ le dénominateur devient grand pour $z = 0$. Pour $z = l$ le numérateur devient égal au dénominateur et $B(l) = B_0$ ce qui respecte bien la condition aux limites. La courbe est symétrique par rapport à l'axe des $B(z)$.



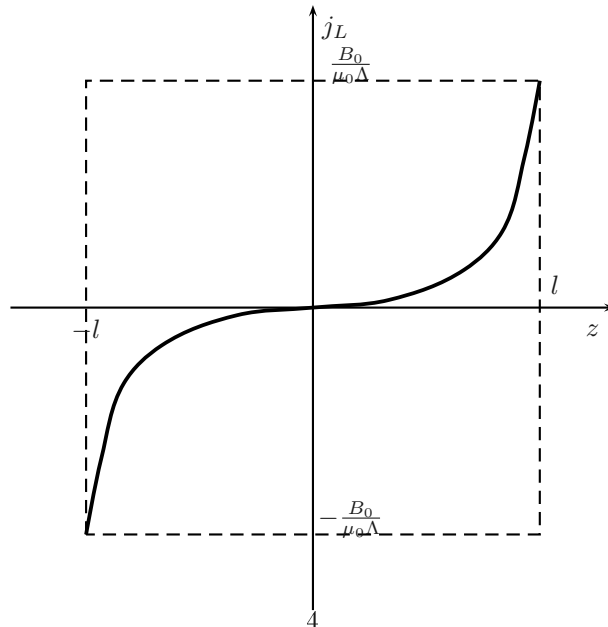
B.17 $\vec{j}_L$ n'a qu'une composante suivant $\vec{e}_y$ et ne dépend que de la variable z , son rotationnel est porté par $\vec{e}_x$ et vaut $-dj_L/dz$ d'où :

$$-\frac{dj_L}{dz} = -\frac{1}{\mu_0 \Lambda^2} D \cosh \frac{z}{\Lambda}$$

Le $\cosh$ est la dérivée du $\sinh$ d'où en intégrant :

$$j_L = \frac{D}{\mu_0 \Lambda} \sinh \frac{z}{\Lambda}$$

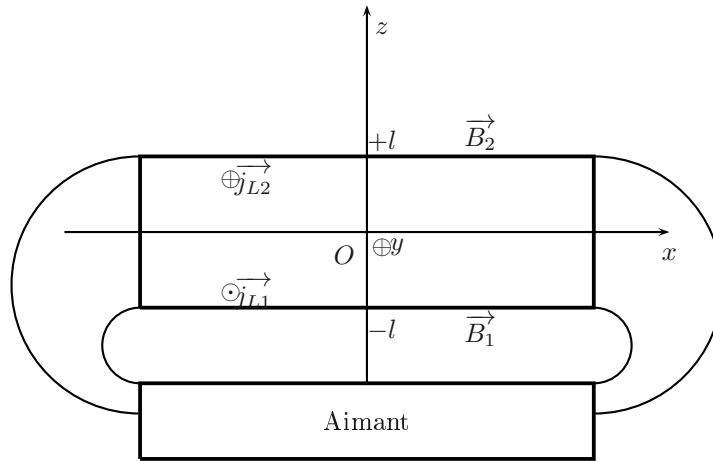
En $z = 0$ la valeur de j_L est nulle. Pour $z = l$ j_L est de l'ordre de $B_0/(\mu_0 \Lambda)$ et de signe opposé pour $z = -l$. Ces valeurs sont plus importantes au voisinage de la surface et on peut considérer que le courant est presque surfacique.



B.18 Application

La photographie de l'énoncé nous montre un cylindre à section carrée de côté que nous prendrons égal à $2.l$ et de longueur plus importante. L'aimant permanent parallélépipédique n'est pas le dispositif le plus approprié pour obtenir un champ magnétique uniforme et constant. Nous serons donc amené à utiliser les résultats précédents sous forme qualitative. Le long de la plus grande longueur de l'aimant et proche de celui-ci les lignes de champ lui sont presque parallèles, mais l'intensité du champ diminue quand on s'éloigne de l'aimant. La condition aux limites où B_0 a la même valeur sur les deux faces ne sera pas satisfaite. Le champ B_1 le plus proche sera supérieur au champ B_2 le plus éloigné. Ainsi nous pourrions admettre que la densité volumique de courant (puisqu'il faut l'appeler de la sorte) j_{L1} sera supérieure à j_{L2} . Nous désignerons par S la surface traversée par chacune des densités de courant au voisinage du bord du cylindre. Le courant électrique aura donc la valeur $I_1 = j_{L1}.S$ du côté de B_1 et $I_2 = j_{L2}.S$ du côté de B_2 avec $I_1 > I_2$ qualitativement. Chacun de ces courants parcourt des conducteurs de longueur $2.l$ (côtés du carré). Si on conserve le trièdre de référence $Oxyz$ de l'énoncé et si on admet que deux faces du cylindre sont parallèles au plan Oxz , l'expression générale de la force de Laplace peut s'écrire $\vec{F}_L = I.2.l.\vec{e}_y \wedge B_0\vec{e}_x$. Le signe de I dépend de la face que l'on choisit.

Pour simplifier le schéma nous prendrons un aimant permanent dont la plus grande longueur est portée par Ox et dont une des faces est perpendiculaire à l'axe Oz vertical sur terre (il porte le vecteur $\vec{g}$). Le petit cylindre aura deux faces horizontales et parallèles à l'aimant. L'origine des axes sera prise au centre du cylindre et le schéma sera fait en coupe verticale passant par cette origine.



La force $\vec{F}_{L1} = -2.l.I_1.\vec{e}_y \wedge (B_1\vec{e}_x) = 2.l.I_1.B_1.\vec{e}_z$, elle est donc dirigée vers le haut. De la même façon la force $\vec{F}_{L2}$ est dirigée vers le bas. Comme $F_{L1} > F_{L2}$ la résultante est dirigée vers le haut et peut compenser le poids du petit cylindre, d'où la lévitation.