

1^{ère} partie :

Camera de contrôle des plaques d'immatriculation

A Dimensionnement des caméras

A1) Cette opération n'est possible que si $PC > 4f'$.

La réalisation de l'image réelle d'un objet réel s'appelle une projection.

A2) La lentille réalise la conjugaison $P \xrightarrow{L} C$, d'après la relation de Descartes,

$$\frac{1}{OC} - \frac{1}{OP} = \frac{1}{f'} \rightarrow \overline{OC} = \frac{OP \cdot f'}{OP + f'} \text{ et } \overline{OC} = \frac{-L \cdot f'}{-L + f'} \text{ ou } \boxed{\overline{OC} = \frac{L \cdot f'}{L - f'}}$$

Lors d'une projection, $\overline{OC} > 0$ et $\overline{OP} < 0 \rightarrow \frac{1}{\overline{OC}} > 0$ et $-\frac{1}{\overline{OP}} > 0 \rightarrow \frac{1}{f'} > 0$ et $\boxed{f' > 0}$.

A3) Par définition $\gamma = \frac{\overline{OC}}{\overline{OP}} \rightarrow \gamma = -\frac{\overline{OC}}{L}$ et $\boxed{\gamma = -\frac{f'}{L - f'}}$.

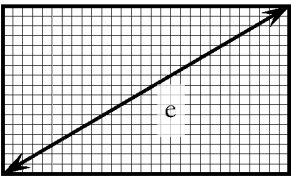
A4) Pour tous les modèles, $f' \ll L \rightarrow \overline{OC} \approx \frac{L \cdot f'}{L} = f'$

Le capteur CCD doit être placé au foyer image de la lentille d'objectif car les objets peuvent être considérés comme étant situés à l'infini.

DOB

A5) De même $\boxed{|\gamma| \approx f'/L}$

Les caméras ont été dimensionnées pour avoir le même grandissement quelle que soit la distance d'observation. La moyenne vaut $\boxed{|\gamma| = 1,75 \cdot 10^{-3}}$.

A6)  Le ratio largeur/hauteur vaut $r = \frac{752}{582} = 1,292$
 $e = \sqrt{c^2 + r^2 c^2}$ donc $e = c \cdot \sqrt{1 + r^2}$ et $c = \frac{e}{\sqrt{1 + r^2}}$.

Le capteur a donc pour dimensions $\boxed{5,02 \text{ mm} \times 3,89 \text{ mm}}$. Un pixel mesure $\boxed{a = 6,68 \mu\text{m}}$.

A7) En divisant des dimensions du capteur par la valeur de γ , les dimensions du champ de vue sont $\boxed{2,87 \text{ m} \times 2,22 \text{ m}}$. Ce champ de vue est de l'ordre de grandeur d'un

véhicule. Il nécessite cependant un bon positionnement de la caméra pour filmer la chaussée. Si la route comporte plusieurs voies, il faut placer une caméra par voie.

A8) En multipliant les dimensions d'un caractère par γ : $\boxed{87,5 \mu\text{m} \times 138 \mu\text{m}}$ soit $\boxed{13 \times 21 \text{ pixels}}$. Image très pixellisée, il faut un algorithme de lecture des plaques très performant.

A9) Lorsque γ augmente, l'image d'un caractère sur l'image augmente (elle est donc moins pixellisée) mais plus le champ de vue se réduit.

La valeur retenue réalise un compromis serré entre le **champ de vue** (de la taille d'une voiture) et la **taille de l'image** d'un caractère (environ 10 pixels).

Pour améliorer la résolution ou la taille du champ de vue il faudrait augmenter le nombre de pixels sur le capteur ... et donc le coût.

A10) Les images dans le domaine visible ne seraient pas exploitables dans la pénombre ou la nuit lorsque les phares des voitures sont allumés.

L'utilisation d'un flash visible le temps de la photographie serait optiquement envisageable mais cela serait très inconfortable pour les automobilistes !

Les images dans de domaine infrarouge :

- permettent d'éclairer la scène grâce aux LED **sans éblouir le conducteur du véhicule**,
- ne sont **pas sujettes à l'éblouissement des phares la nuit**,
- présentent un **contraste identique** quelles que soient les conditions d'illumination.

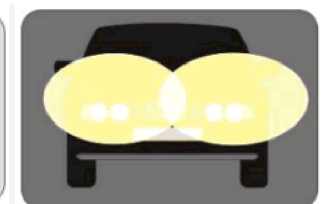
Illustration :



infrarouge (jour ou nuit)



visible (jour)



visible (nuit)

Source : http://www.cctv.lk/Articles/Technical/An_Introduction_to_ANPR.php

Rq : L'image visible peut être utilisée pour effectuer un contrôle manuel lorsque l'algorithme LAPI a échoué.

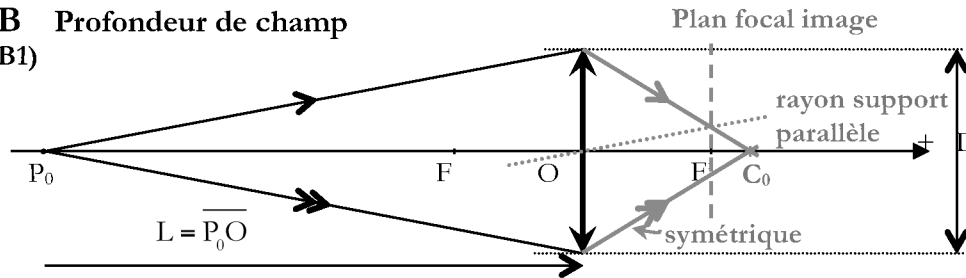
A11) Pour une pupille circulaire, le premier zéro de la tache d'Airy a un écart angulaire $\theta = \arcsin(1,22 \cdot \lambda/D)$. Après focalisation par la lentille, cet écart donne une tache de

rayon $f' \cdot \tan(\theta)$ donc la largeur de la tache de diffraction vaut $2f' \tan\left(\arcsin\left(1,22 \frac{\lambda}{D}\right)\right)$

soit environ 8 mm . En se plaçant dans le pire cas (f' maximale et $l = 950 \text{ nm}$) la tache de diffraction a la taille d'un pixel $6,68 \text{ mm}$, ce phénomène n'est pas limitant, mais là encore, le dimensionnement effectué se place à la limite physique admissible (à moindre coût car la lentille ne mesure que 1 cm de diamètre...).

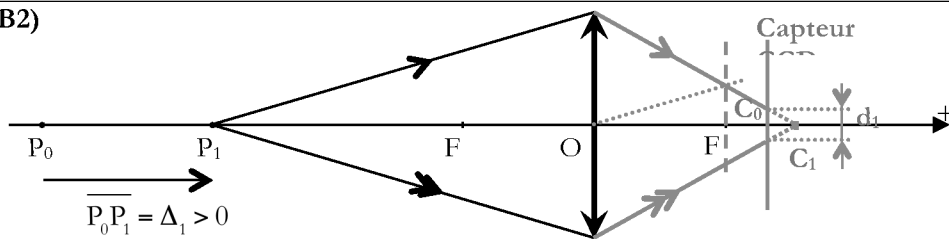
B Profondeur de champ

B1)



Le rayon en pointillé, parallèle au rayon haut, coupe ce dernier dans le plan focal image.

B2)



B3) Théorème de Thalès : $\frac{d_1}{C_0C_1} = \frac{D}{OC_1} \rightarrow d_1 = D \cdot \left(\frac{\overline{C_0O} + \overline{OC_1}}{\overline{OC_1}} \right) = D \cdot \left(-\frac{\overline{OC_0}}{\overline{OC_1}} + 1 \right)$.

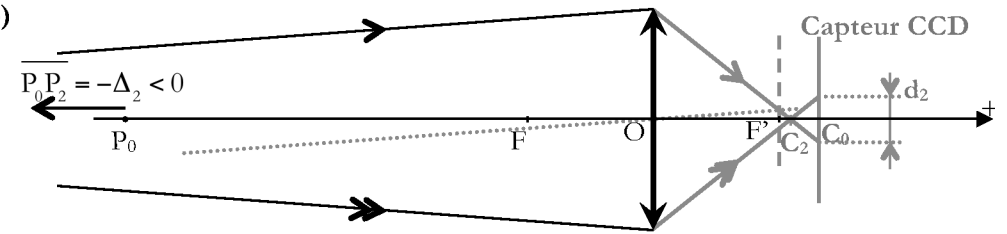
d'après A2, $\overline{OC_0} = \frac{\overline{OP_0} \cdot f'}{\overline{OP_0} + f'} = \frac{-L \cdot f'}{-L + f'}$, de même $\overline{OC_1} = \frac{(\overline{OP_0} + \overline{P_0P_1}) \cdot f'}{\overline{OP_0} + \overline{P_0P_1} + f'} = \frac{(-L + \Delta_1) f'}{-L + \Delta_1 + f'}$.

$$d_1 = D \cdot \left(1 - \frac{L \cdot f'}{L - f'} \cdot \frac{-L + \Delta_1 + f'}{(-L + \Delta_1) \cdot f'} \right) = D \cdot \left(\frac{(L - f')(L - \Delta_1) + L \cdot (-L + \Delta_1 + f')}{(L - f')(L - \Delta_1)} \right)$$

$$d_1 = D \cdot \left(\frac{L^2 - L \cdot \Delta_1 - f' L + f' \Delta_1 - L^2 + L \cdot \Delta_1 + L \cdot f'}{(L - f')(L - \Delta_1)} \right)$$

et $d_1 = \frac{D \cdot f' \cdot \Delta_1}{(L - f')(L - \Delta_1)} \rightarrow \boxed{\beta = D}$.

B4)



B5) $d_1 \approx \beta \cdot \frac{f' \cdot \Delta_1}{L \cdot (L - \Delta_1)}$ et $d_2 \approx \beta \cdot \frac{f' \cdot \Delta_2}{L \cdot (L + \Delta_2)}$

B6) $D_{1\text{lim}}$ est telle que $d_1 = a$, soit $\beta \cdot \frac{f' \cdot \Delta_1}{L \cdot (L - \Delta_1)} = a \rightarrow \beta \cdot f' \cdot \Delta_1 = a \cdot L \cdot (L - \Delta_1)$

$$\rightarrow \Delta_1 \cdot (\beta \cdot f' + a \cdot L) = a \cdot L^2 \rightarrow \Delta_{1\text{lim}} = \frac{a \cdot L^2}{\beta \cdot f' + a \cdot L} = \frac{a \cdot L^2}{D \cdot f' + a \cdot L}$$

$D_{2\text{lim}}$ est telle que $d_2 = a$, soit $\beta \cdot \frac{f' \cdot \Delta_2}{L \cdot (L + \Delta_2)} = a \rightarrow \beta \cdot f' \cdot \Delta_2 = a \cdot L \cdot (L + \Delta_2)$

$$\rightarrow \Delta_2 \cdot (\beta \cdot f' - a \cdot L) = a \cdot L^2 \rightarrow \Delta_{2\text{lim}} = \frac{a \cdot L^2}{\beta \cdot f' - a \cdot L} = \frac{a \cdot L^2}{D \cdot f' - a \cdot L}$$

B7) L'application numérique donne $\Delta_{1\text{lim}} = 2,54 \text{ m}$ et $\Delta_{2\text{lim}} = 5,84 \text{ m}$. La caméra est donc en mesure de filmer des voitures situées entre de $6,46 \text{ m}$ et $14,85 \text{ m}$ ce qui est tout à fait satisfaisant.

B8) Par définition de la profondeur de champ, $Z = D_{1\text{lim}} + D_{2\text{lim}}$ soit

$$Z = \frac{a \cdot L^2}{D \cdot f' + a \cdot L} + \frac{a \cdot L^2}{D \cdot f' - a \cdot L} \text{ ou } Z = a \cdot L^2 \cdot \left(\frac{D \cdot f' - a \cdot L + D \cdot f' + a \cdot L}{(D \cdot f')^2 - (a \cdot L)^2} \right) \rightarrow Z = \frac{2 \cdot f' \cdot D \cdot a \cdot L^2}{(D \cdot f')^2 - (a \cdot L)^2}$$

B9) A.N. : $D \cdot f' = 1,60 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ et $a \cdot L = 6,30 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$ donc $(D \cdot f')^2 \gg (a \cdot L)^2$ et la

profondeur de champ se simplifie en $Z \approx \frac{2 \cdot a \cdot L^2}{D \cdot f'}$.

A.N. $\rightarrow Z = 0,9 \text{ m}$, ce qui est cohérent avec la somme $\Delta_{1\text{lim}} + \Delta_{2\text{lim}} = 8,38 \text{ m}$ des valeurs déterminées à la question B8.

L'écart s'explique par l'approximation faite à cette question.

B10) Plus le diamètre de la lentille diminue, plus la profondeur de champ augmente (effet bien connu en photographie en diminuant l'ouverture).

Une lentille de 1 cm de diamètre est donc un atout pour ces caméras : la grande profondeur de champ qu'elle offre (ici 8,39 m pour une distance de mise au point de 9,00 m !) permet de se passer de dispositif de mise au point (c'est aussi le cas des appareils photos jetables ou de ceux des téléphones portables qui ont une faible ouverture f/D).

Le prix à payer est une plus faible luminosité (compensée par les flashes des LED infrarouge) et **un risque de voir la résolution limitée par la diffraction**.

2^{ème} partie :

Détection de véhicules par boucle inductive

C Inductance de la boucle

C1) Par définition $\Phi = L \cdot I$.

C2) Par définition, $\Phi = \iint_{\text{section}} \vec{j} \cdot d\vec{S}$, or $\vec{j}$ est uniforme sur une section donc $\Phi = j \cdot S$ et

$$\vec{j} = \frac{I}{S} \cdot \vec{e}_z \rightarrow \boxed{\vec{j} = \frac{I}{\pi \cdot e^2} \cdot \vec{e}_z}.$$

C3) Cherchons $\vec{B}$ en un point M quelconque. Le plan contenant l'axe (Oz) et passant par M est un plan de symétrie pour la distribution de courants donc un plan d'antisymétrie pour le champ magnétique et $\vec{B}(M)$ lui est donc perpendiculaire :

$$\boxed{\vec{B}(M) = B(M) \cdot \vec{e}_\varphi}.$$

La distribution de courant étant invariante par translation selon z et par rotation d'angle φ , la norme du champ magnétique ne dépend pas de ces deux variables et

$$\boxed{\|\vec{B}(M)\| = f(r)}. \text{ Finalement } \boxed{\vec{B}(M) = B(r) \cdot \vec{e}_\varphi}.$$

C4) La circulation de $\vec{B}$ sur le cercle d'axe (Oz) et passant par M vaut :

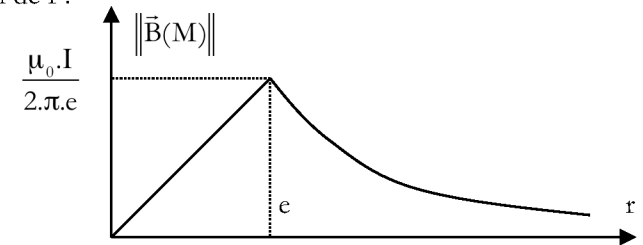
$$\mathbf{C} = \oint_{\text{cercle}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{\text{cercle}} B(r) \vec{e}_\varphi \cdot d\vec{l} \vec{e}_\varphi = \oint_{\text{cercle}} B(r) \cdot d\ell = B(r) \cdot \oint_{\text{cercle}} d\ell = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot B(r)$$

D'après le théorème d'Ampère, $\mathbf{C} = \mu_0 I_{\text{enlacés}}$,

$$\text{si } r > e, I_{\text{enlacés}} = I, \rightarrow \boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot \vec{e}_\varphi}$$

$$\text{si } r < e, I_{\text{enlacés}} = j \cdot \pi \cdot r^2 = I \cdot \frac{r^2}{e^2}, \rightarrow \boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot e^2} \cdot r \cdot \vec{e}_\varphi}.$$

C5) Tracé de $\|\vec{B}(M)\|$ en fonction de r :



$$\mathbf{C6)} \quad \Phi_f = \int_{z=-b/2}^{b/2} \int_{r=0}^a \vec{B}(M) \cdot d\vec{S} = b \cdot \int_{r=0}^a B(r) \cdot dr.$$

$$\Phi_f = b \cdot \left(\int_{r=0}^e \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot e^2} \cdot r \cdot dr + \int_{r=e}^a \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot dr \right) = b \cdot \left(\frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot e^2} \cdot \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^e + \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi} \cdot [\ln(r)]_e^a \right).$$

$$\Phi_f = b \cdot \left(\frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot e^2} \cdot \frac{e^2}{2} + \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi} \cdot \ln\left(\frac{a}{e}\right) \right) \rightarrow \boxed{\Phi_f = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot b}{2 \cdot \pi} \cdot \left[\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{a}{e}\right) \right]}.$$

C7) Sommons les contributions de chaque coté (qui apportent tous un flux positif « correctement » orienté) :

$$\Phi_1 = 2 \cdot \left[\frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi} \cdot G \cdot \left(\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{D}{e}\right) \right) + \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi} \cdot D \cdot \left(\frac{1}{2} + \ln\left(\frac{G}{e}\right) \right) \right] = \frac{\mu_0 \cdot I}{\pi} \left(\frac{G+D}{2} + G \cdot \ln\left(\frac{D}{e}\right) + D \cdot \ln\left(\frac{G}{e}\right) \right)$$

$$\text{soit, en divisant par } I, \boxed{L_1 = \frac{\mu_0}{\pi} \cdot \left(\frac{G+D}{2} + G \cdot \ln\left(\frac{D}{e}\right) + D \cdot \ln\left(\frac{G}{e}\right) \right)}.$$

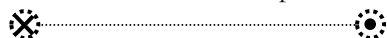
$$\mathbf{C8)} \quad \text{A.N.} \quad e = \sqrt{\frac{s}{\pi}} = 0,69 \text{ mm} \quad \text{et} \quad \boxed{L_1 = 9,6 \mu\text{H}}.$$

C9) Le champ magnétique produit est multiplié par n et ce champ n fois plus grand crée un flux propre dans n spires. Donc Φ et L sont multipliés par n^2 : $\boxed{L = n^2 \cdot L_1}$.

C10) $n = \sqrt{L/L_1} \rightarrow 2,7 < n < 7,2, \rightarrow \boxed{n \in [3..7]}$, ce qui est cohérent avec les recommandations du constructeur.

D Détection d'un véhicule

D1) D'après la loi de Lenz, le flux produit par le champ induit doit s'opposer aux causes qui lui ont donné naissance, donc le flux induit par la spire « miroir » doit être négatif dans la spire enterrée, cette spire doit donc créer un champ magnétique « vers le bas » lorsque I est positif : elle est donc orientée en sens inverse de la spire enterrée :



D2) D'après la question **C4.**, à l'extérieur de la spire $\vec{B}_i(M) = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot r} \cdot \vec{e}_\varphi$, donc :

Point	Distance à C_1	Champ B_{C1}	Distance à C_2	Champ B_{C2}	Champ total
O	0,5 m	$4,0 \cdot 10^{-7}$ T	0,5 m	$4,0 \cdot 10^{-7}$ T	$8,0 \cdot 10^{-7}$ T
A	0,6 m	$3,3 \cdot 10^{-7}$ T	0,4 m	$5,0 \cdot 10^{-7}$ T	$8,3 \cdot 10^{-7}$ T
B	0,7 m	$2,9 \cdot 10^{-7}$ T	0,3 m	$6,7 \cdot 10^{-7}$ T	$9,5 \cdot 10^{-7}$ T

D3) Le flux du champ magnétique se conserve le long d'un tube de champ. Démo :

- ① schéma clair d'un tube de champ
- ② flux à travers toute surface fermée = 0
- ③ bilan flux entrée / flux sortie / flux cotés (= 0) d'où flux sortie = flux entrée

D4) Le flux propre sur la partie « centrale » de la spire « miroir » est donc égal au flux induit dans la totalité de la spire enterrée.

Le problème étant considéré comme invariant par translation parallèlement aux longs cotés de la spire (D) (ce qui est discutable...) le flux se calcule par :

$D \times$ largeur du tube de champ sur la figure 9 B au milieu du tube

(les 5 tubes concernés ont une largeur de 10 cm)

$$\Phi_i = 2,0 \cdot 0,1 \cdot (8,0 \cdot 10^{-7} + 2,8 \cdot 3 \cdot 10^{-7} + 2,9 \cdot 5 \cdot 10^{-7}) \text{ soit } \Phi_i = 8,7 \cdot 10^{-7} \text{ Wb}$$

D5) Ce flux se soustrait au flux propre créé par la spire $\rightarrow \Phi_i' = \Phi_i - \Phi_i$. En divisant

$$\text{par } I = 1 \text{ A, } L_i' = L_i - \Phi_i / I \rightarrow \Delta L_i = L_i' - L_i = -8,7 \cdot 10^{-7} \text{ H} \rightarrow \Delta L_i / L_i = -9 \%$$

Dans la boucle complète composée de n spires, le champ magnétique créé est n fois plus grand, donc le courant induit est n fois plus grand de même que $\vec{B}_i(M)$.

Ce champ magnétique créé donc un flux induit $n \cdot \Phi_i$ dans chaque spire, soit un flux total $n^2 \cdot \Phi_i$ dans l'ensemble de la boucle.

De plus, comme $L = n^2 L_i$, DL est multipliée par n^2 et DL/L est le même que pour une

spire : $\Delta L/L = -9 \%$. Cette variation est assez importante pour le simple ajout d'un véhicule au dessus de la spire.

D6) R est donnée par $R = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\ell}{s} \rightarrow r = \frac{1}{\sigma} \frac{2n(D+G)}{s} \rightarrow r = 0,2 \Omega$.

D7) Notons i l'intensité telle que C soit en convention récepteur.

loi d'additivité des tensions : $-L \frac{di}{dt} - r \cdot i = u$ avec $i = C \frac{du}{dt} \rightarrow \ddot{u} + \frac{r}{L} \dot{u} + \frac{u}{L \cdot C} = 0$

$\rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \rightarrow f_0 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}}$ et $\frac{r}{L} = \frac{\omega_0}{Q} \rightarrow Q = \frac{L \cdot \omega_0}{r} \rightarrow Q = \frac{1}{r} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$.

D8) Non, car L croît en n^2 et r croît en $n \rightarrow \frac{1}{r} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$ est indépendant de n .

D9) C doit être comprise entre environ 31,3 nF et 2,5 mF. Ce sont de grosses valeurs de capacité qui présenteront des résistances de fuite importantes qu'il faudra compenser. La précision et la stabilité de la valeur de ces condensateurs doit par ailleurs être meilleure que 1/1000 ce qui est plus délicat à réaliser avec des grandes valeurs.

D10) En utilisant les différentielles logarithmiques : $\frac{df_0}{f_0} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{dL}{L}$ et $\frac{\Delta f_0}{f_0} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta L}{L}$.

Comme L diminue, la fréquence augmente lors du passage d'un véhicule $\frac{\Delta f_0}{f_0} = 4,5 \%$

qui se situe au-delà de la gamme de sensibilité proposée par le constructeur.

Cette trop forte sensibilité s'explique par un modèle qui surestime le flux induit par le châssis de la voiture.

3^{ème} partie : Production de soufre par le procédé Claus**E Conversion de l'hydrogène sulfuré**

E1) Enthalpie standard de la réaction [1] à 1500 K :

$$\Delta_r H_1^0(1500\text{K}) = \Delta_f H_{1500}^0(\text{SO}_2) + \Delta_f H_{1500}^0(\text{H}_2\text{O}) - \Delta_f H_{1500}^0(\text{H}_2\text{S}) - \frac{3}{2} \Delta_f H_{1500}^0(\text{O}_2)$$

$$\Delta_r H_1^0(1500\text{K}) = -523,6 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Entropie standard de la réaction [1] à 1500 K :

$$\Delta_r S_1^0(1500\text{K}) = S_{1500}^0(\text{SO}_2) + S_{1500}^0(\text{H}_2\text{O}) - S_{1500}^0(\text{H}_2\text{S}) - 3/2 \cdot S_{1500}^0(\text{O}_2)$$

$$\Delta_r S_1^0(1500\text{K}) = -84,1 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$$

E2) Réaction de combustion très fortement exothermique (caractère auto-entretenu)
Nécessité d'assurer un refroidissement permanent du four.

E3) Enthalpie libre standard de la réaction [1] : $\Delta_r G_1^0(T) = -523600 + 84,1 T \text{ (J.mol}^{-1}\text{)}$
à 1500 K, $\Delta_r G_1^0(1500) = -397450 \text{ J.mol}^{-1}$.

Cte d'équilibre : $K_{(1500K)}^0 = \exp\left\{\frac{-\Delta_r G_1^0(1500K)}{RT}\right\} = 7,0.10^{13}$ ou $\ln K_{(1500K)}^0 \approx 32$

La réaction totale

E4) Bilan de fin de la réaction [1] de combustion, pour 100 moles de gaz à traiter :
 $(60 \text{ H}_2\text{S}) + 30 \text{ SO}_2 + 33 \text{ H}_2\text{O} + [180 \text{ N}_2 + 7 \text{ CO}_2]$

E5) Enthalpie libre standard de la réaction [2] : $\Delta_r G_2^0(T) = -62500 - 75,1 T \text{ (J.mol}^{-1}\text{)}$
à 1500 K, $\Delta_r G_2^0(1500) = -50175 \text{ J.mol}^{-1}$

Cte d'équilibre : $K_{(1500K)}^0 = \exp\left\{\frac{-\Delta_r G_2^0(1500K)}{RT}\right\} \approx 56,0$ ou $\ln K_{(1500K)}^0 \approx 4$

La réaction n'est pas totale

E6) Tableau d'avancement de la réaction [2] :

	H ₂ S	SO ₂	S ₂	H ₂ O
t = 0	60	30	0	33
t	60 - 2ξ	30 - ξ	1,5 ξ	33 + 2ξ

Nombre total $n_T(\xi)$ de molécules gazeuses :

$$n_T(\xi) = (30 - \xi) + (60 - 2\xi) + 1,5\xi + (33 + 2\xi) + 180 + 7 = 310 + 0,5\xi$$

E7) Quotient réactionnel :

$$Q_2 = \frac{p^{1,5}(\text{S}_2) p^2(\text{H}_2\text{O})}{p(\text{SO}_2) p^2(\text{H}_2\text{S})} = \frac{n^{1,5}(\text{S}_2) n^2(\text{H}_2\text{O})}{n(\text{SO}_2) n^2(\text{H}_2\text{S})} \left(\frac{P}{P^0 n_T(\xi)} \right)^{0,5}$$

$$Q_2 = \frac{(1,5\xi)^{1,5} (33 + 2\xi)^2}{4(30 - \xi)^3} \left(\frac{1,2}{(310 + 0,5\xi)} \right)^{0,5}$$

En identifiant avec l'expression donnée de $f(\xi)$:

$$X = 1,5 \xi, Y = 33 + 2\xi, \alpha = 0,5 \text{ et } \beta = 3$$

E8) Sachant qu'à l'équilibre, plus de 70 % du SO₂ formé par la combustion [1] est

$$\text{transformé en soufre via la réaction [2], } \frac{\xi}{30} \geq 0,7 \Rightarrow \xi \geq 21$$

E9) Bilan des espèces gazeuses à la sortie du four : (point A)

	H ₂ S	SO ₂	S ₂	H ₂ O	N ₂	CO ₂
nb moles	60-46=14	30-23=7	1,5 ξ=34,5	33+46=79	180	7

E10) Après refroidissement à 493 K, le soufre se condense et devient liquide (ce qui permet une récupération aisée).

Rendement en soufre de l'opération de conversion :

Au départ : 90 moles de S (dans H₂S) et à l'arrivée : 34,5 moles de S₂ soit 69 moles de S

$$\text{rendement : } \rho_{cv} = \frac{69}{90} = 77 \%$$

Les autres espèces demeurent gazeuses (au total 287 moles).

F Conversion catalytique

F1) Tableau d'avancement, pour la réaction [2'] : (en introduisant ξ_{RC1} à 530 K

	H ₂ S	SO ₂	S ₈	H ₂ O
t = 0	14	7	0	79
t	14 - 2ξ _{RC1}	7 - ξ _{RC1}	3/8 ξ _{RC1}	79 + 2ξ _{RC1}

A la sortie de RC1, $69 + 0,13(90) = 80,7$ moles de soufre ont été obtenues sur les 90 moles du H₂S de départ ; il en reste donc 9,3 moles se partageant entre 3,1 moles de SO₂ et 6,2 moles de H₂S (pour respecter le ratio de 2).

$$\text{En identifiant : } n(\text{SO}_2) = 7 - \xi_{RC1} \approx 3,1 \rightarrow \xi_{RC1} \approx 3,9$$

Bilan des espèces gazeuses à la sortie du réacteur RC1 : (point B)

	H ₂ S	SO ₂	H ₂ O	N ₂	CO ₂
nbre moles	14-7,8=6,2	7-3,9=3,1	79+7,8=86,8	180	7

F2) Tableau d'avancement, pour la réaction [2'] : (en introduisant ξ_{RC2} à 430 K

	H ₂ S	SO ₂	S ₈	H ₂ O
t = 0	6,2	3,1	0	86,8
t	6,2 - 2ξ _{RC2}	3,1 - ξ _{RC2}	3/8 ξ _{RC2}	86,8 + 2ξ _{RC2}

A la sortie de RC2, $69 + 0,13(90) + 0,09(90) = 88,8$ moles de soufre ont été obtenues sur les 90 moles du H₂S de départ ; il en reste donc 1,2 moles se partageant entre 0,4 moles de SO₂ et 0,8 moles de H₂S (pour respecter le ratio de 2). ; en identifiant :

$$n(\text{SO}_2) = 3,1 - \xi_{RC2} \approx 0,4 \rightarrow \xi_{RC2} \approx 2,7$$

Bilan des espèces gazeuses à la sortie du réacteur RC2 : (point C)

	H ₂ S	SO ₂	H ₂ O	N ₂	CO ₂
nbre moles	6,1-5,4=0,8	3,1-2,7=0,4	86,8+5,4=92,2	180	7

F3) Dans l'incinérateur la faible quantité résiduelle de H₂S est oxydée en SO₂. Ce dioxyde de soufre ira alimenter l'unité de fabrication de SO₃ puis d'acide sulfurique H₂SO₄. La vapeur d'eau produite pourra alimenter une turbine pour produire de l'énergie électrique.

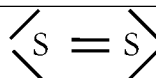
G Structure du soufre

G1) Configuration électronique du soufre (Z = 16) : 1s² 2s² 2p⁶ 3s² 3p⁴
Le soufre se trouve dans la colonne 16, même colonne que O, Se, Te, ...

G2) Structure de Lewis du soufre :
(6 électrons de valence)



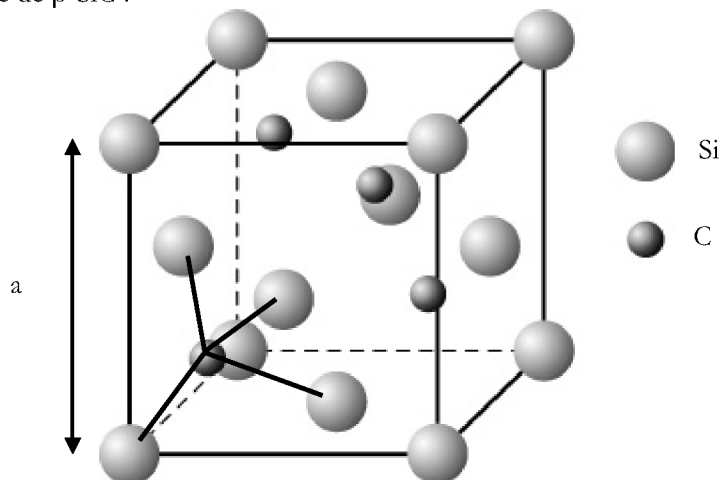
G3) Structure de Lewis de la molécule S₂ :
molécule linéaire



G4) ?

H Structure de β-SiC, support de catalyseur

H1) Maille de β-SiC :



Nombre d'atomes par maille :

$$\text{silicium : } 8 \left(\frac{1}{8} \right) + 6 \left(\frac{1}{2} \right) = 4 \quad ; \quad \text{carbone : } 8 \text{ sites T} \left(\frac{1}{2} \right) = 4$$

H2) Coordinences 4/4 pour Si comme pour C

Chaque carbone est au centre d'un tétraèdre formé par quatre atomes de silicium. Liaisons fortes de nature covalente entre Si et C (conférant à SiC des propriétés de dureté et de résistance à l'usure, d'où le nom industriel de *carborundum*).

H3) Relation entre rayons covalents et le paramètre de maille : Si et C sont au contact

$$\text{sur un quart de diagonale principale du cube : } R(\text{Si}) + R(\text{C}) = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

$$a = \frac{4[R(\text{Si}) + R(\text{C})]}{\sqrt{3}} = 448 \text{ pm}$$

H4) Compacité de la structure β-SiC : $C = \frac{4\pi}{3} \frac{4(R^3(\text{Si}) + R^3(\text{C}))}{a^3} = 0,38$

maille aux deux tiers vide car quatre sites T sont vacants et les centres des faces ne sont pas occupés (comme ZnS).

H5) Masse volumique de la structure β-SiC : $\rho_{\beta\text{-SiC}} = \frac{4M(\text{SiC})}{N_A a^3} = 2963 \text{ kg.m}^{-3}$

Corrigé proposé par Jean-Paul Fortin-Ripoche (jean-paul.fortin-ripoche@ac-nantes.fr)
N'hésitez pas à me contacter pour toute remarque, question ou erreur. Bonne lecture !