

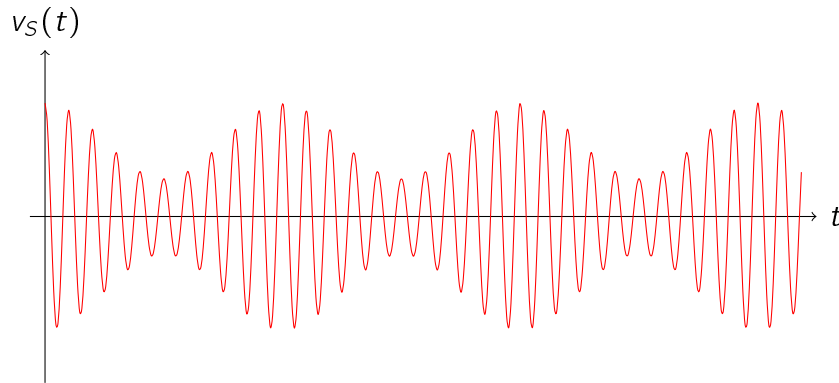
Proposition de correction physique e3a 2012 PC

A1. On a :

$$\begin{aligned} v_S(t) &= v_{S_1}(t) + u_2(t) = k u_1(t) u_2(t) + u_2(t) \\ &= k U_m U_0 \cos(\omega_m t) \cos(\omega_p t) \\ &= U_0 \cos(\omega_p t) (1 + k U_m \cos(\omega_m t)) \end{aligned}$$

Donc on identifie : $m = k U_m$

A2. Par exemple pour $m = 0,5$:



B1. On a :

$$\begin{aligned} v_p(t) &= U_0 \cos(\omega_p t + m \cos(\omega_m t)) \\ &= U_0 (\cos(\omega_p t) \cos(m \cos(\omega_m t)) - \sin(\omega_p t) \sin(m \cos(\omega_m t))) \end{aligned}$$

Or comme $m \ll 1$: $v_p(t) \simeq U_0 (\cos(\omega_p t) - m \cos(\omega_m t) \sin(\omega_p t))$.

On identifie donc $f(t) = -U_0 m \cos(\omega_m t)$.

B2. On a :

$$\begin{aligned} v_S(t) &= v_{S_1}(t) + u_2(t) = k u_1(t) u_2'(t) + u_2(t) \\ &= k U_m \cos(\omega_m t) u_2'(t) + U_0 \cos(\omega_p t) \end{aligned}$$

On a $v_S(t) = v_p(t)$ à condition que : $u_2'(t) = -U_0 \frac{m}{k U_m} \sin(\omega_p t) = -U_0 \sin(\omega_p t)$.
L'opérateur "Dp" doit donc ajouter une phase de $+\frac{\pi}{2}$ à $u_2(t)$.

C1. On peut librement fixer la masse dans le circuit, mettons-la en bas. On applique le théorème de Millman à la sortie (-) de l'A.O.1, comme on est en régime linéaire $V_- = V_+ = 0$ et comme les A.O. sont idéaux il n'y a pas de courant de sortie, on obtient : $0 = \frac{u_e}{R_1} + \frac{u_1}{R_1}$ d'où $\underline{u_1} = -\underline{u_e}$. Cette partie gauche du circuit est simplement un inverseur.

C2. On s'intéresse maintenant à l'A.O.2, lui aussi idéal et en régime linéaire. Le théorème de Millman à sa borne (-) donne : $\underline{V_-} (\frac{1}{R} + \frac{1}{R}) = \frac{\underline{u_1}}{R} + \frac{\underline{u_S}}{R}$, soit finalement : $2\underline{V_-} = \underline{u_1} + \underline{u_S}$. Le théorème de Millman à sa borne (+) donne : $\underline{V_+} (\frac{1}{R} + jC\omega) = \frac{\underline{u_1}}{R}$, soit finalement $\underline{V_+} = \frac{\underline{u_1}}{1+jRC\omega}$.

Comme $V_- = V_+$, on en déduit : $\underline{H_1}(j\omega) = \frac{1-jRC\omega}{1+jRC\omega}$.

En totalité :

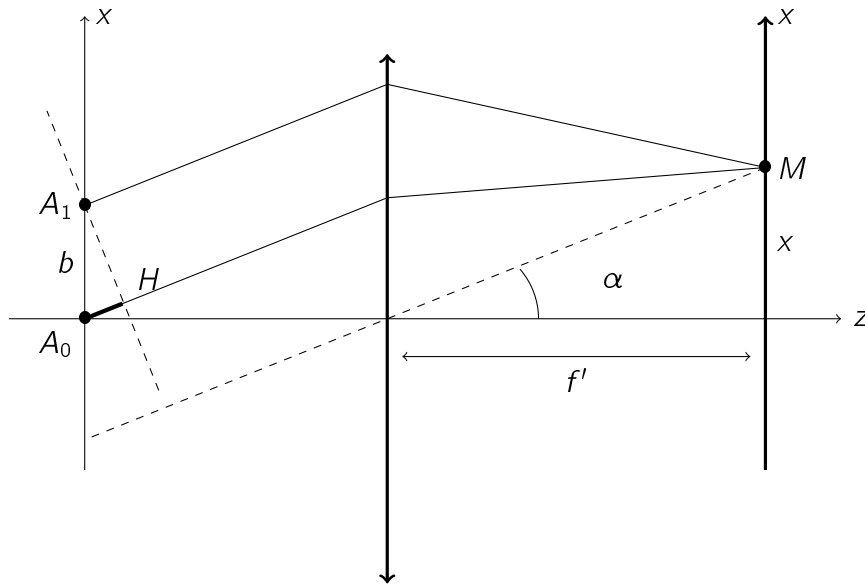
$$\underline{H}(j\omega) = -\frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega}.$$

C3. On remarque que $|\underline{H}(j\omega)| = 1, \forall \omega$ donc l'opérateur ne change pas l'amplitude. Par contre $\text{Arg}(\underline{H}(j\omega)) = \pi + \text{Arg}(1 - jRC\omega) - \text{Arg}(1 + jRC\omega) = \pi - 2\arctan(RC\omega)$, l'opérateur introduit donc un déphasage φ_D entre l'entrée et la sortie :

$$\varphi_D = \pi - 2\arctan(RC\omega).$$

C4. On veut ici $\varphi_D = \frac{\pi}{2}$ ce qui correspond à $\arctan(RC\omega_p) = \frac{\pi}{4}$ d'où $RC\omega_p = \tan(\frac{\pi}{4}) = 1$, soit finalement $RC = \frac{1}{\omega_p}$.

D1*a. Par retour inverse de la lumière, on peut considérer le point M comme une source ponctuelle. Comme elle est placée dans le plan focal objet de la lentille les rayons sortent parallèles après la lentille. Grâce au théorème de Malus, on peut tracer la surface de même phase passant par A_1 , représentée en pointillé sur le dessin. On a donc $(A_1M) = (HM)$ et $\delta_{1/0} = (A_1M) - (A_0M) = -(A_0H) = -A_0H$ car on est dans le vide. On a de plus $\tan(\alpha) = \frac{x}{f'} \simeq \alpha$ car $|x| \ll f'$, or on a aussi $\sin(\alpha) \simeq \alpha = \frac{A_0H}{b}$, d'où finalement $\delta_{1/0} = -\frac{bx}{f'}$.



D1*b. On peut obtenir $\delta_{-1/0}$ en remarquant que A_{-1} est le symétrique de A_1 par l'axe Oz , on obtient donc par cette symétrie $\delta_{-1/0}$ en partant de $\delta_{1/0}$. La symétrie transforme x en $-x$ laissant le reste inchangé, on obtient donc $\delta_{-1/0} = \frac{bx}{f'}$.

D1*c. Le déphasage au point M entre l'onde issue de A_1 et celle issue de A_0 est d'une part dû au retard φ initial et d'autre part à la différence de chemin optique, on a : $\delta\varphi_{1/0} = -\varphi - \frac{2\pi}{\lambda}\delta_{1/0}$ et donc

$$\delta\varphi_{1/0} = -\varphi + \frac{2\pi bx}{\lambda f'}.$$

On a de façon analogue

$$\delta\varphi_{-1/0} = -\varphi - \frac{2\pi bx}{\lambda f'}.$$

D2*a. La relation entre éclairement et amplitude complexe donne en M : $|\underline{a}_0|^2 = \mathcal{E}_0$ et $|\underline{a}_1|^2 = m^2 \mathcal{E}_0$, on en conclut : $|\underline{a}_1| = m|\underline{a}_0|$.

D2*b. On a naturellement $\arg(\underline{a}_1) - \arg(\underline{a}_0) = \delta\varphi_{1/0}$ d'où $\arg(\underline{a}_1) = \arg(\underline{a}_0) - \varphi + \frac{2\pi bx}{\lambda f'}$.

$$\begin{aligned}\underline{a}_1 &= |\underline{a}_1| \exp(j(\arg(\underline{a}_1))) \\ &= m|\underline{a}_0| \exp(j(\arg(\underline{a}_1) - \arg(\underline{a}_0) + \arg(\underline{a}_0))) \\ &= m \exp(j(\arg(\underline{a}_1) - \arg(\underline{a}_0))) |\underline{a}_0| \exp(j\arg(\underline{a}_0))\end{aligned}$$

Donc

$$\underline{a}_1 = m \underline{a}_0 \exp(j(-\varphi + \frac{2\pi bx}{\lambda f'}))$$

D2*c. On a immédiatement $\underline{a}_{-1} = m \underline{a}_0 \exp(j(-\varphi - \frac{2\pi bx}{\lambda f'}))$.

$$\begin{aligned}\underline{a}_{tot} &= \underline{a}_0 + \underline{a}_1 + \underline{a}_{-1} \\ &= \underline{a}_0 (1 + m e^{j(-\varphi + \frac{2\pi bx}{\lambda f'})} + m e^{j(-\varphi - \frac{2\pi bx}{\lambda f'})}) \\ &= \underline{a}_0 (1 + m e^{-j\varphi} (e^{-j\frac{2\pi bx}{\lambda f'}} + e^{j\frac{2\pi bx}{\lambda f'}}))\end{aligned}$$

Donc

$$\underline{a}_{tot} = \underline{a}_0 (1 + m e^{-j\varphi} 2 \cos(\frac{2\pi bx}{\lambda f'})).$$

D2*d. On a :

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= |\underline{a}_{tot}|^2 = |\underline{a}_0|^2 |1 + 2m e^{-j\varphi} \cos(\frac{2\pi bx}{\lambda f'})|^2 \\ &= \mathcal{E}_0 (1 + 2m \cos(\frac{2\pi bx}{\lambda f'}) e^{-j\varphi} + 2m \cos(\frac{2\pi bx}{\lambda f'}) e^{j\varphi} + \sigma(m^2)) \\ &= \mathcal{E}_0 (1 + 4m \cos(\varphi) \cos(\frac{2\pi bx}{\lambda f'})),\end{aligned}$$

à l'ordre 1 en m . On identifie donc : $\gamma = 4m$.

D2*e. L'éclairement ne dépend que de x , on observe donc des franges rectilignes dans la direction Oy . Si $\cos(\varphi) > 0$, on a des maxima quand $\cos(\frac{2\pi bx}{\lambda f'}) = 1$ d'où $\frac{2\pi bx}{\lambda f'} = 2\pi n$ avec $n \in \mathbb{Z}$ donc quand $x = \frac{n\lambda f'}{b}$. Si $\cos(\varphi) < 0$, on a des maxima quand $\cos(\frac{2\pi bx}{\lambda f'}) = -1$ d'où

$$\frac{2\pi bx}{\lambda f'} = 2\pi n + \pi \text{ avec } n \in \mathbb{Z} \text{ donc quand } x = \frac{(n+\frac{1}{2})\lambda f'}{b}.$$

D2*f. On identifie le contraste comme la valeur absolue du facteur devant $\cos(\frac{2\pi bx}{\lambda f'})$ dans la formule de l'éclairement, on a donc :

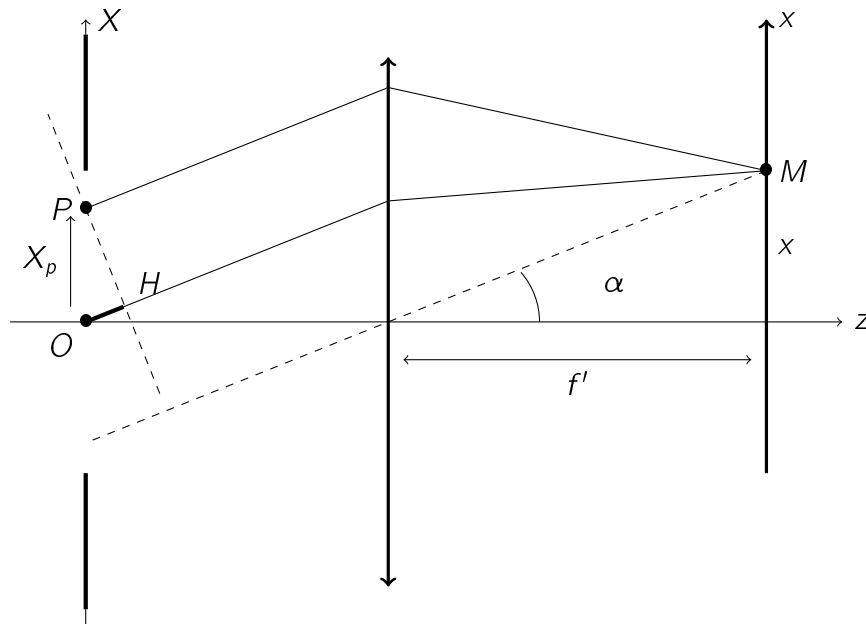
$$\Gamma = \gamma |\cos(\varphi)|.$$

On peut aussi redémontrer la formule en partant de $\Gamma = \frac{\mathcal{E}_{max} - \mathcal{E}_{min}}{\mathcal{E}_{max} + \mathcal{E}_{min}}$.

D2*g. Les interférences disparaissent si le contraste s'annule donc si $\cos(\varphi) = 0$, d'où $\varphi = \frac{\pi}{2} + n\pi$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

E1*a. Principe d'Huygens-Fresnel : chaque point P d'une surface éclairée par de la lumière se comporte comme une source quasi ponctuelle émettant une onde sphérique.

E1*b.



E1*c. Le raisonnement est identique à celui de la question D1*a, en remplaçant b par X_p on obtient $(PM) - (OM) = -\frac{xX_p}{f'}$.

E1*d. On peut considérer la diffraction seulement dans le plan OXz car la fente étant très allongée selon Y (donc $Y \gg \lambda$), il n'y aura pas de diffraction visible dans la direction Oy.

Le principe d'Huygens-Fresnel appliqué à la fente nous dit que chaque élément de surface de la fente se comporte comme une source ponctuelle fictive d'amplitude proportionnelle à l'excitation. L'onde incidente a une incidence normale, donc par le théorème de Malus tous les rayons arrivant sur la fente sont en phase, les différences de marche apparaissent ensuite durant le trajet fente-écran. On observe sur un point M de l'écran la somme des amplitudes de chaque source fictive P

$$\begin{aligned} \underline{a}(M) &= cst \int_{-L/2}^{L/2} \exp(-j\frac{2\pi}{\lambda}(PM))dX_p \\ &= cst \int_{-L/2}^{L/2} \exp(-j\frac{2\pi}{\lambda}((PM) - (OM) + (OM)))dX_p \\ &= cst * \exp(-j\frac{2\pi}{\lambda}(OM)) \int_{-L/2}^{L/2} \exp(-j\frac{2\pi}{\lambda}((PM) - (OM)))dX_p \end{aligned}$$

Finalement en posant $K = cst * \exp(-j\frac{2\pi}{\lambda}(OM))$, on obtient :

$$\underline{a}(M) = K \int_{-L/2}^{L/2} \exp(j\frac{2\pi}{\lambda} \frac{xX_p}{f'})dX_p.$$

E1*e. On a :

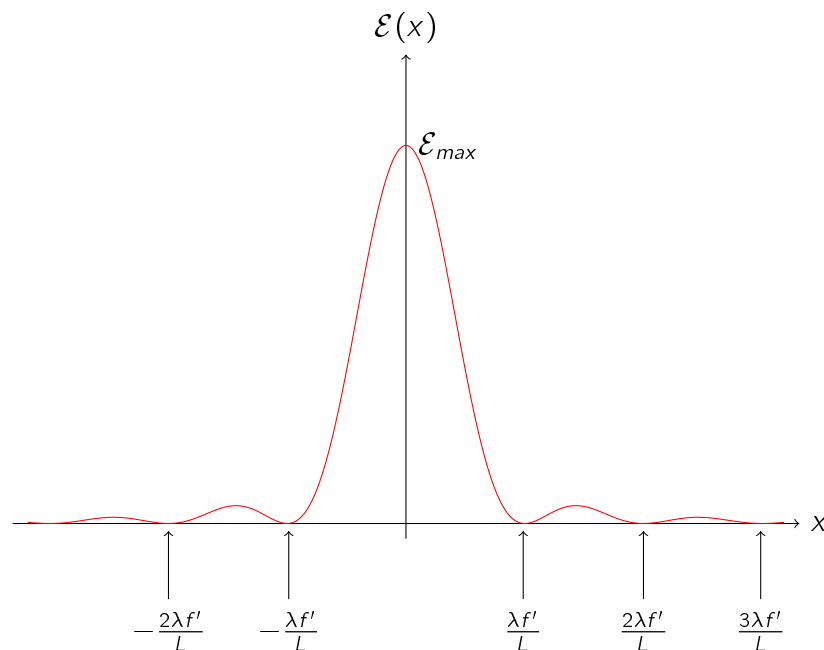
$$\begin{aligned}
 \underline{a}(M) &= K \int_{-L/2}^{L/2} \exp(j \frac{2\pi x X_p}{\lambda f'}) dX_p \\
 &= K \left[\frac{\exp(j \frac{2\pi x X_p}{\lambda f'})}{j \frac{2\pi x}{\lambda f'}} \right]_{-L/2}^{L/2} \\
 &= K \frac{1}{j \frac{2\pi x}{\lambda f'}} \left(\exp(j \frac{2\pi x L}{\lambda f'}) - \exp(-j \frac{2\pi x L}{\lambda f'}) \right) \\
 &= K \frac{1}{j \frac{2\pi x}{\lambda f'}} \left(2j \sin\left(\frac{2\pi x L}{\lambda f'}\right) \right)
 \end{aligned}$$

D'où

$$\underline{a}(M) = KL \sin_c\left(\frac{\pi x L}{\lambda f'}\right)$$

E1*f. $\mathcal{E}(x) = |\underline{a}(M)|^2 = K^2 L^2 \sin_c^2\left(\frac{\pi x L}{\lambda f'}\right)$, au maximum en $x = 0$, $\mathcal{E}_{max} = K^2 L^2$, soit finalement :

$$\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}_{max} \sin_c^2\left(\frac{\pi x L}{\lambda f'}\right)$$



E1*g. Si $L \rightarrow \infty$, la figure se resserre, il n'y a un éclaircissement non nul qu'en $x = 0$, c'est le limite de l'optique géométrique, les rayons issus d'un objet à l'infini convergent vers F' .

E1*h. D'après le graphique, $\Delta x = \frac{2\lambda f'}{L} = \frac{2 \cdot 500 \cdot 10^{-9} \cdot 1}{5 \cdot 10^{-2}} = 2 \cdot 10^{-5} m$, donc $\Delta x = 2 \cdot 10 \mu m$, ce n'est pas observable à l'oeil nu, en effet une fente de 5cm est bien plus grande que celles utilisées en T.P. plutôt de l'ordre du mm.

E2*a. Le raisonnement est proche de celui de la question E1*a sauf qu'ici les rayons ne sont plus en phase au niveau de la fente mais sur la face d'entrée de la lame, il faut donc comparer leurs chemins optiques à partir de cette face d'entrée. Le rayon passant par O a traversé une distance d avec un indice $n(X=0) = n_0$ alors que le rayon passant par P a traversé une distance

d avec un indice $n(X = X_p) = n_0 + \epsilon \cos(2\pi \frac{X_p}{\lambda})$. Après la lame ils ont une différence de marche identique à la question E1*a. On obtient donc $\delta_{P/O} = (PM) - (OM) = -\frac{X_p x}{f'} + n(X_p)d - n_0 d$, d'où

$$\delta_{P/O} = -\frac{X_p x}{f'} + d\epsilon \cos(2\pi \frac{X_p}{\lambda})$$

E2*b. Comme on avait obtenu $\underline{a}(M) = K' \int_{-L/2}^{L/2} \exp(-j \frac{2\pi}{\lambda} ((PM) - (OM))) dX_p$, on a immédiatement

$$\underline{a}(M) = K' \int_{-L/2}^{L/2} \exp\left(j \frac{2\pi}{\lambda} \left[\frac{X_p x}{f'} - d\epsilon \cos(2\pi \frac{X_p}{\lambda}) \right]\right) dX_p,$$

la constante K' est différente de K car on n'a pas pris la même référence de phase (discussion hors-programme).

E2*c. Avec l'approximation proposée :

$$\begin{aligned} \underline{a}(M) &= K' \int_{-L/2}^{L/2} \exp\left(j \frac{2\pi}{\lambda} \frac{X_p x}{f'}\right) \left(1 - j \frac{2\pi \epsilon d}{\lambda} \cos\left(\frac{2\pi X_p}{\lambda}\right)\right) dX_p \\ &= K' \int_{-L/2}^{L/2} \exp\left(j \frac{2\pi}{\lambda} \frac{X_p x}{f'}\right) \left(1 - j \frac{2\pi \epsilon d}{2\lambda} (\exp(-j \frac{2\pi X_p}{\lambda}) + \exp(j \frac{2\pi X_p}{\lambda}))\right) dX_p \end{aligned}$$

On obtient une somme de trois intégrales, la première a déjà été calculée en E1*e, elle donne $K' L \sin_c(\frac{\pi x L}{\lambda f'})$. La seconde est de la forme :

$$\begin{aligned} &- K' j \frac{\pi \epsilon d}{\lambda} \int_{-L/2}^{L/2} \exp\left(j \frac{2\pi}{\lambda} \frac{X_p x}{f'}\right) \exp(-j \frac{2\pi X_p}{\lambda}) dX_p \\ &= -K' j \frac{\pi \epsilon d}{\lambda} \int_{-L/2}^{L/2} \exp\left(j \frac{2\pi X_p}{\lambda f'} (x - \frac{\lambda f'}{\lambda})\right) dX_p \end{aligned}$$

On obtient donc le même résultat que pour la première intégrale en remplaçant x par $x - \frac{\lambda f'}{\lambda}$. De même la troisième intégrale s'obtient en remplaçant x par $x + \frac{\lambda f'}{\lambda}$. Finalement il vient :

$$\underline{a}(M) = K' L \sin_c\left(\frac{\pi x L}{\lambda f'}\right) - j K' L \frac{\pi \epsilon d}{\lambda} \sin_c\left(\frac{\pi L}{\lambda f'} (x - \frac{\lambda f'}{\lambda})\right) - j K' L \frac{\pi \epsilon d}{\lambda} \sin_c\left(\frac{\pi L}{\lambda f'} (x + \frac{\lambda f'}{\lambda})\right),$$

c'est la forme attendue en identifiant $F(x) = K' L \sin_c(\frac{\pi x L}{\lambda f'})$.

E2*d. Quand $L \rightarrow \infty$, le seul point non nul de $F(x)$ est le point $x = 0$, ici on a une somme de trois fonctions F translatées, on obtient donc trois points non nuls : $B_0 : x = 0$, $B_1 : x_1 = \frac{\lambda f'}{\lambda}$ et $B_{-1} : x_{-1} = -\frac{\lambda f'}{\lambda}$

E2*e. $x_1 = \frac{\lambda f'}{\lambda} = \frac{500 \cdot 10^{-9}}{0,1 \cdot 10^{-3}} 1 = 5 \cdot 10^{-3} m$ d'où $x_1 = 5 mm$. On a $x_1 \gg \Delta x$, les trois points sont maintenant observables à l'oeil nu.

E2*f. Dans la formule de la question E2*c, le premier terme correspond au rayon passant par B_0 , le deuxième celui passant par B_1 , le troisième par B_{-1} . On constate donc qu'entre les amplitudes B_1 , B_{-1} et B_0 , il y a un facteur $-j$ qui induit un retard $\phi = \frac{\pi}{2}$.

E3*a. Je ne suis pas sûr de bien comprendre la question, en tout cas dans le cadre de l'optique géométrique les rayons incidents ne sont pas déviés par la lame car leur incidence est normale. Le système formé par les deux lentilles est un système afocal de grandissement 1. On observera donc sur l'écran l'image de la fente sans agrandissement.

E3*b. L'énoncé ne me paraît pas clair, il faut semble-t-il supposer ici qu'on est dans la limite $L \rightarrow \infty$ pour pouvoir répondre à cette question. Dans cette limite, on observe une amplitude non nulle dans le plan focal image de (L_1) seulement sur les trois points B_0, B_1 et B_{-1} . Le principe d'Huygens-Fresnel appliqué à ce plan nous indique que l'onde observée en M peut être considérée comme la superposition de trois sources ponctuelles fictives situées aux points B_0, B_1 et B_{-1} car l'amplitude d'une sources fictive en un point P est proportionnelle à l'amplitude incidente sur ce point.

E3*c. D'après la formule du E2*c, l'amplitude en B_1 est celle en B_0 multipliée par le facteur $-j\frac{\pi\epsilon d}{\lambda}$. On cherche maintenant le lien entre les amplitudes en O' des ondes issues de ces points. Or un raisonnement avec le théorème de Malus similaire à celui de la question D1*a montre que $(B_0O') = (B_1O')$, donc les deux ondes ne varient plus l'une par rapport à l'autre à partir du plan focal image de (L_1) . On en conclut $\underline{a}'_1 = (-j\frac{\pi\epsilon d}{\lambda})\underline{a}'_0$, de même $\underline{a}'_{-1} = (-j\frac{\pi\epsilon d}{\lambda})\underline{a}'_0$.

E3*d. D'après D2*a, on identifie $m = \frac{\pi\epsilon d}{\lambda}$, donc d'après D2*d on a $\gamma = 4\frac{\pi\epsilon d}{\lambda}$. On voit simplement que l'équivalent de b est ici x_1 , donc $b = \frac{\lambda}{\lambda} f'$.

E3*e. Si on utilise la formule de l'éclairement de D2*d, comme on a ici $\varphi = \phi = \frac{\pi}{2}$, on obtient $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$, donc un éclairement uniforme sur l'écran. Or l'énoncé prétend que ce n'est le cas que sur une largeur L' , pour expliquer ce fait il faut revenir sur l'hypothèse $L \rightarrow \infty$. C'est ici que l'énoncé me semble un peu bancal, on ne sait jamais quand cette hypothèse est supposée ou non. Sans l'hypothèse, on ne peut plus directement utiliser les résultats de la partie D, il faut faire le principe d'Huygens-Fresnel dans le plan focal image de (L_1) , on obtient :

$$\underline{a}'(M) = cst \int_{-\infty}^{\infty} \underline{a}(M) \exp(j\frac{2\pi}{\lambda} \frac{xx'_M}{f'}) dx,$$

où $\underline{a}(M)$ est celui de E2*c et x'_M repère le point M sur l'écran. $\underline{a}(M)$ contient trois termes, le premier donne une intégrale $J = cstK'L \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(\frac{\pi}{\lambda} \frac{xL}{f'}) \exp(j\frac{2\pi}{\lambda} \frac{xx'_M}{f'}) dx$. C'est la diffraction d'une fente avec transparence en sinus cardinal, ce qui n'est pas au programme a priori. Le second terme donne :

$$cstK'L(-j)\frac{\pi\epsilon d}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{\pi}{\lambda} \frac{L}{f'}(x - x_1)\right) \exp(j\frac{2\pi}{\lambda} \frac{xx'_M}{f'}) dx.$$

On peut effectuer le changement de variable $u = x - x_1$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} & cstK'L(-j)\frac{\pi\epsilon d}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{\pi}{\lambda} \frac{L}{f'}u\right) \exp(j\frac{2\pi}{\lambda} \frac{(u + x_1)x'_M}{f'}) du \\ &= cstK'L(-j)\frac{\pi\epsilon d}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{\pi}{\lambda} \frac{L}{f'}u\right) \exp(j\frac{2\pi}{\lambda} \frac{ux'_M}{f'}) du * \exp(j\frac{2\pi}{\lambda} \frac{x_1x'_M}{f'}) \\ &= -j\frac{\pi\epsilon d}{\lambda} J \exp(j\frac{2\pi}{\lambda} \frac{x_1x'_M}{f'}). \end{aligned}$$

Le troisième terme donne de la même façon $-j\frac{\pi\epsilon d}{\lambda} J \exp(-j\frac{2\pi}{\lambda} \frac{x_1x'_M}{f'})$. Donc finalement on obtient comme attendu

$$\underline{a}'(M) = J(1 - j\frac{\pi\epsilon d}{\lambda}(e^{-j\frac{2\pi x_1 x'_M}{\lambda f'}} + e^{j\frac{2\pi x_1 x'_M}{\lambda f'}})),$$

où on reconnaît le deuxième terme, c'est le terme d'interférences à trois sources de la partie D qui ici fournit un éclairement uniforme. La non uniformité constaté sur l'écran provient donc du premier terme J qui n'est malheureusement pas au programme et difficilement calculable,

des considérations de transformée de Fourier inverse étant proscrites. On attend peut-être d'un élève qu'il utilise l'exemple de la fente de la partie E1 qui montre qu'une extension spatiale L conduit après diffraction à une largeur $\Delta x = \frac{2\lambda f'}{L}$. Donc comme le dispositif est le même ici (même λ , même f'), on peut prévoir que le sinus cardinal d'extension $\Delta x = \frac{2\lambda f'}{L}$ produit à son tour une figure d'extension spatiale $\frac{2\lambda f'}{\Delta x} = L$. Et donc conclure $L' = L$, ce qui correspond à la limite de l'optique géométrique de la question E3*a.

E4*a. L'ajout de la lame (Dp) change la différence de chemins optiques entre les rayons arrivant en B_0 et ceux en B_1 . En considérant les angles d'incidence très faibles, les rayons arrivant en B_0 ont parcouru par rapport à ceux arrivant en B_1 une distance en plus e dans l'indice n_1 , ils ont donc pris une différence de marche à cause de (Dp) valant $(n_1 - 1)e$. Finalement :

$$\phi' = \phi - \frac{2\pi}{\lambda}(n_1 - 1)e.$$

E4*b. On utilise la formule de l'éclairement (1) de D2*d avec $\varphi = \phi' = \phi - \frac{2\pi}{\lambda}(n_1 - 1)e$ d'après E4*a et $\gamma = 4\frac{\pi\epsilon d}{\lambda}$, $b = \frac{\lambda}{\lambda}f'$ et $\phi = \frac{\pi}{2}$ d'après E3*d. On obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(M) &= \mathcal{E}_0 \left[1 + 4\frac{\pi\epsilon d}{\lambda} \cos(\phi') \cos(2\pi\frac{x}{\lambda}) \right] \\ &= \mathcal{E}_0 \left[1 + 4\frac{\pi\epsilon d}{\lambda} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{\lambda}(n_1 - 1)e\right) \cos(2\pi\frac{x}{\lambda}) \right]\end{aligned}$$

et finalement

$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_0 \left[1 + 4\frac{\pi\epsilon d}{\lambda} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(n_1 - 1)e\right) \cos(2\pi\frac{x}{\lambda}) \right].$$

$\mathcal{E}_0$ est l'éclairement moyen sur l'écran, c'est aussi l'éclairement qu'on aurait sans la lame d'indice variable.

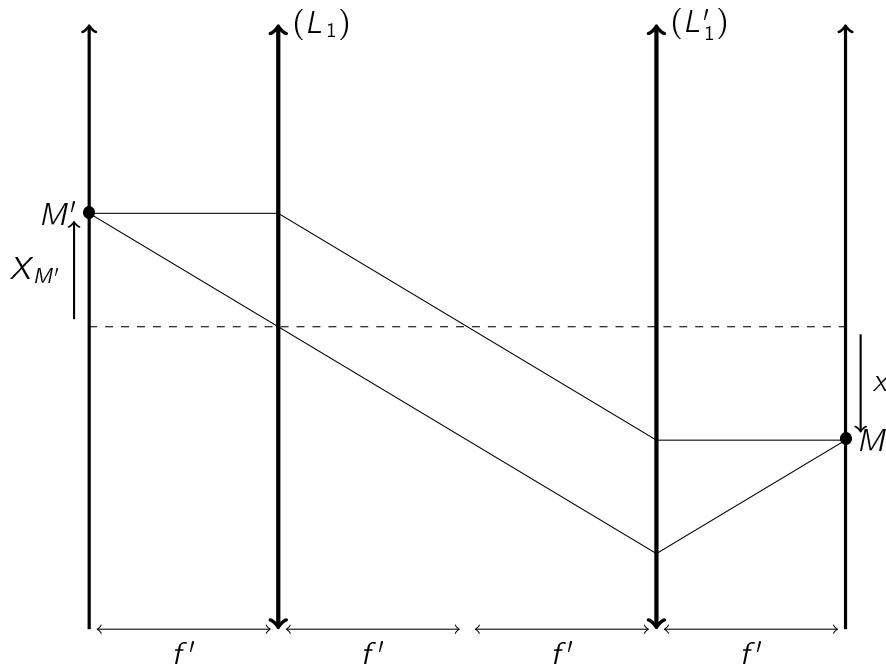
La lame initiale avait un indice variable selon la loi $n_0 + \epsilon \cos(2\pi\frac{x}{\lambda})$ avec x le paramètre de la fente, on constate qu'on obtient un éclairement dépendant de la variable x de l'écran selon $\cos(2\pi\frac{x}{\lambda})$. C'est exactement la même forme, donc on a directement sur l'écran un éclairement qui donne une image des variations d'indice de la lame.

E4*c. Le contraste de la figure d'interférences vaut : $\Gamma = 4\frac{\pi\epsilon d}{\lambda} |\sin(\frac{2\pi}{\lambda}(n_1 - 1)e)|$, il est maximal quand $\sin(\frac{2\pi}{\lambda}(n_1 - 1)e) = \pm 1$ donc quand $\frac{2\pi}{\lambda}(n_1 - 1)e = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, donc

$$e_k = \frac{\lambda}{2\pi(n_1 - 1)} \left(k\pi + \frac{\pi}{2} \right).$$

Au minimum pour $k = 0$, $e_{min} = \frac{\lambda}{4(n_1 - 1)} = \frac{500 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot 0.5} = 3 \cdot 10^{-7} m$, $e_{min} = 3 \cdot 10^2 nm$. On forme dans les compact disques des alvéoles de profondeur de l'ordre de 200nm (à peu près un quart de la longueur d'onde du laser de lecture pour faire des interférences destructives qui permettent la lecture), il est donc a priori techniquement possible de produire la lame (Dp) avec e_{min} .

E4*d. Sur le dessin on constate que $X_{M'} = -x$



L'indice est maximal quand $\cos(2\pi \frac{X_{M'}}{\Lambda}) = 1$ donc quand $X_{M'} = k\Lambda$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

L'indice est minimal quand $\cos(2\pi \frac{X_{M'}}{\Lambda}) = -1$ donc quand $X_{M'} = (k + \frac{1}{2})\Lambda$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Si $\sin(\frac{2\pi}{\lambda}(n_1 - 1)e) > 0$ alors l'éclairement est maximal quand $\cos(2\pi \frac{x}{\Lambda}) = 1$, c'est-à-dire quand $x = l\Lambda$ avec $l \in \mathbb{Z}$, comme $X_{M'} = -x$ on est dans le cas où un maximum d'éclairement est associé à un maximum d'indice. Cela se passe avec un e optimal quand $\sin(\frac{2\pi}{\lambda}(n_1 - 1)e) = 1$ donc quand $\frac{2\pi}{\lambda}(n_1 - 1)e = \frac{\pi}{2} + 2m\pi$ avec $m \in \mathbb{Z}$, soit $e_m = \frac{\lambda}{2\pi(n_1 - 1)}(2m\pi + \frac{\pi}{2})$.

Si $\sin(\frac{2\pi}{\lambda}(n_1 - 1)e) < 0$ alors l'éclairement est maximal quand $\cos(2\pi \frac{x}{\Lambda}) = -1$, c'est-à-dire quand $x = (l + \frac{1}{2})\Lambda$ avec $l \in \mathbb{Z}$, comme $X_{M'} = -x$ on est dans le cas où un maximum d'éclairement est associé à un minimum d'indice. Cela se passe avec un e optimal quand $\sin(\frac{2\pi}{\lambda}(n_1 - 1)e) = -1$ donc quand $\frac{2\pi}{\lambda}(n_1 - 1)e = \frac{\pi}{2} + (2m + 1)\pi$ avec $m \in \mathbb{Z}$, soit

$$e_m = \frac{\lambda}{2\pi(n_1 - 1)}((2m + 1)\pi + \frac{\pi}{2}).$$

F1*a. Equation de diffusion :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_s \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}.$$

F1*b. On injecte la forme cherchée dans l'équation de diffusion :

$$\begin{aligned} f'(t) \cos(\frac{2\pi x}{\Lambda}) &= -D_s f(t) (\frac{2\pi}{\Lambda})^2 \cos(\frac{2\pi x}{\Lambda}) \\ f'(t) &= -D_s f(t) (\frac{2\pi}{\Lambda})^2, \end{aligned}$$

d'où

$$f'(t) + D_s \frac{4\pi^2}{\Lambda^2} f(t) = 0.$$

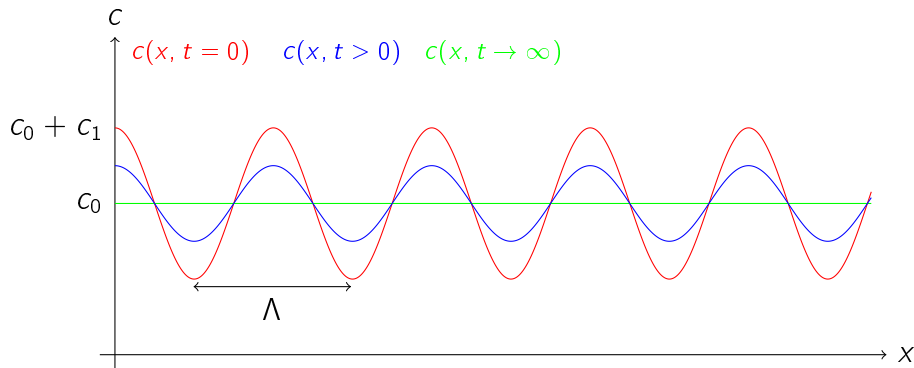
On résout avec $f(t = 0) = c_1$, on obtient

$$f(t) = c_1 e^{-t/\tau_1},$$

avec $\tau_1 = \frac{\Lambda^2}{4\pi^2 D_s}$.

τ_1 est un temps caractéristique de décroissance des inhomogénéités de concentration.

F1*c. On obtient :



F2*a. On a un indice variant avec la loi $n(x, t) = n_e + \beta(c_0 + c_1 e^{-t/\tau_1})$, on retrouve la formule de la variation d'indice de la lame de la partie E2 en identifiant $n_0 = n_e + \beta c_0$ et $\varepsilon = \beta c_1 e^{-t/\tau_1}$. D'après E4*b, avec e tel que $\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(n_1 - 1)e\right) = 1$ d'après l'énoncé, on obtient :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \left[1 + (\xi c_1 d) e^{-t/\tau_1} \cos\left(2\pi \frac{x}{\Lambda}\right) \right],$$

avec $\xi = 4 \frac{\beta \pi}{\lambda}$.

F2*b. On a $\Gamma_{min} = \xi c_{min} d$, d'où $c_{min} = \frac{\Gamma_{min}}{\xi d}$.

$$c_{min} = \frac{0.010}{7.5 \times 10^3 \times 1.0 \times 10^{-3}} = 1.3 \times 10^{-3} \text{ mol.m}^{-3}$$

F2*c. On a $\Gamma(t)/\Gamma(0) = e^{-t/\tau_1}$, on ne s'étonnera néanmoins pas que le graphique soit une fonction affine car le papier est semi-log !

Question délicate, le protocole n'étant pas bien expliqué. Peut-être que l'éclairement chauffe initialement la cuve modifiant D_S et/ou l'indice ? Y'a-t-il un filtre anti-calorique devant la source ?

F2*d. Sans calculatrice, on ne peut faire une régression linéaire complète, en plus on ne demande qu'un chiffre significatif. On a $\log(\Gamma(t)/\Gamma(0)) = \ln(\Gamma(t)/\Gamma(0))/\ln(10) = -\frac{t}{\tau_1 \ln(10)}$. A $t = 30s$ on a $\Gamma(t)/\Gamma(0) = 0.7$, d'où $\log(0.7) = -\frac{30}{\tau_1 \ln(10)}$ et à $t = 150s$ on a $\Gamma(t)/\Gamma(0) = 0.07$ d'où $\log(0.07) = -\frac{150}{\tau_1 \ln(10)}$. En soustrayant ces deux équations, on obtient : $\log(0.7/0.07) = 1 = -\frac{120}{\tau_1 \ln(10)}$ et $\tau_1 = \frac{120}{\ln(10)}$ puis finalement : $D_S = \frac{\ln(10)\Lambda^2}{4\pi^2 \times 120}$ ce qui donne $D_S = 5 \times 10^{-10} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. Ordre de grandeur raisonnable pour un liquide.