

X-ENS MP 2012. Composition de Physique

I. Une théorie du gravitomagnétisme

I.1) $\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}$ et $\vec{g}(M) = -Gm \frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}$

I.2) $\vec{E}(M)$ vérifie $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_o}$.

Par analogie, on remplace $\frac{1}{\epsilon_o}$ par $-4\pi G$. On obtient $\text{div} \vec{E} = -4\pi G \rho = \frac{\rho}{\epsilon_g}$ avec $\epsilon_g = \frac{-1}{4\pi G}$

Le théorème de Green-Ostrogradsky donne alors : $\iiint_{V \subset S} \text{div} \vec{g} d\tau = \iint_S \vec{g} \cdot d\vec{S}_{\text{sortante}} = -4\pi G M_{\text{int}}$

I.3) g est en m s^{-2} , $\overrightarrow{\text{rot}} g$ en s^{-2} donc h est en s^{-1} .

I.4) La divergence d'un rotationnel est toujours nulle : $\text{div} (\overrightarrow{\text{rot}} h) = 0$

Donc $\text{div} \vec{j} + \text{div} (\epsilon_g \frac{\partial \vec{g}}{\partial t}) = 0 = \text{div} \vec{j} + \epsilon_g \frac{\partial}{\partial t} (\text{div} \vec{g})$ soit $\text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

I.5) En l'absence de matière, $\vec{j} = \vec{0}$ et $\rho = 0$

$\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{g}) = \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div} \vec{g}) - \Delta \vec{g} = \overrightarrow{\text{rot}} (-\frac{\partial \vec{h}}{\partial t}) = -\frac{\partial \overrightarrow{\text{rot}} \vec{h}}{\partial t} = -\epsilon_g \mu_g \frac{\partial^2 \vec{g}}{\partial t^2}$

D'où l'équation de d'Alembert : $\Delta \vec{g} - \epsilon_g \mu_g \frac{\partial^2 \vec{g}}{\partial t^2} = \vec{0} = \Delta \vec{g} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{g}}{\partial t^2}$

On en déduit $\mu_g = \frac{1}{\epsilon_g c^2} = -\frac{4\pi G}{c^2}$

I.6) Force gravitationnelle $\vec{f} = m\vec{g}$

La force de Lorentz s'écrit $\vec{f}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ donc par analogie, la force due à $\vec{h}$ s'écrit $\vec{f}_h = m\vec{v} \wedge \vec{h}$

I.7) On se place en coordonnées cylindriques d'axe Oz parallèle au fil.

Le système est invariant par translation selon Oz et par rotation autour de Oz donc le champ $\vec{g}$ ne dépend ni de z ni de θ , mais seulement de la distance r au fil.

Le plan contenant M et le fil est de symétrie, ainsi que le plan contenant M et perpendiculaire au fil. $\vec{g}$ appartient donc à ces deux plans. Il est donc radial : $\vec{g} = g(r)\vec{e}_r$.

On applique le théorème de Gauss gravitationnel à une surface cylindrique d'axe Oz de hauteur H et de rayon r :

$$\iint_S \vec{g} \cdot d\vec{S}_{\text{sortante}} = 2\pi r H g(r) = -4\pi G M_{\text{int}} = -4\pi G \lambda H \text{ d'où } \vec{g} = -\frac{2\lambda G}{r} \vec{e}_r$$

I.8) Un élément de masse $dm = \lambda dl$ subit une force $d\vec{f}_g = \vec{g}(M) dm$ donc une longueur de fil unité subit la force attractive :

$$\vec{F}_g = -\frac{2\lambda^2 G}{d} \vec{e}_r$$

I.9) Mêmes invariances qu'en I.7 donc $\vec{h} = \vec{h}(r)$. Le plan contenant M et le fil est de symétrie donc $\vec{h}$ est perpendiculaire à ce plan : $\vec{h} = h(r)\vec{e}_\theta$

L'équation $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{h} = \mu_g \vec{j}$ est équivalente à un théorème d'ampère gravitationnel :

$$\oint_C \vec{h} \cdot d\vec{l} = \iint_{S/C} \mu_g \vec{j} \cdot d\vec{S} = \mu_g I_g$$

On prend un contour (C) circulaire d'axe le fil, et comme surface (S) le disque de rayon r s'appuyant sur (C). Le flux de masse est $I_g = \lambda v$.

$$2\pi r h(r) = \mu_g \lambda v = -\frac{4\pi G \lambda v}{c^2} \text{ d'où } \vec{h} = -\frac{2G \lambda v}{rc^2} \vec{e}_\theta$$

I.10) Un élément $dm = \lambda dl$ de fil subit une force $d\vec{f}_h = dm \vec{v} \wedge \vec{h} = -\frac{2G \lambda^2 v^2}{c^2 d} dl \vec{e}_z \wedge \vec{e}_\theta$.

D'où la force répulsive pour une longueur unité :

$$\vec{F}_h = \frac{2G \lambda^2 v^2}{c^2 d} \vec{e}_r$$

$$\frac{\|\vec{F}_h\|}{\|\vec{F}_g\|} = \frac{v^2}{c^2} \text{ donc pour les vitesses non relativistes, on peut négliger } F_h \text{ devant } F_g.$$

Si on change le sens de $\vec{v}$ d'un fil, $\vec{F}_h$ change de signe.

I.11) Pour une spire circulaire d'axe Oz, $\vec{M} = \pi R^2 I \vec{e}_z$.

I.12) Par analogie on définit $\vec{M}_g = \pi R^2 I_g \vec{e}_z = \pi R^2 \frac{m}{T} \vec{e}_z = \pi R^2 \frac{m \omega}{2\pi} \vec{e}_z = \frac{m R^2}{2} \omega \vec{e}_z$.

Le moment cinétique est $\vec{\sigma} = J \omega \vec{e}_z = m R^2 \omega \vec{e}_z$. Donc $\vec{\sigma} = 2 \vec{M}_g$

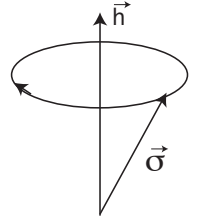
I.13) Couple subi par un dipôle magnétique : $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$ donc par analogie le gyroscope placé dans $\vec{h}$ subit un couple $\vec{\Gamma}_h = \vec{M}_g \wedge \vec{h}$.

Théorème du moment cinétique barycentrique appliqué au gyroscope :

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \vec{M}_g \wedge \vec{h} \text{ soit}$$

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \frac{1}{2} \vec{\sigma} \wedge \vec{h} = \frac{-\vec{h}}{2} \wedge \vec{\sigma} = \vec{\Omega} \wedge \vec{\sigma}$$

On a un mouvement de précession de $\vec{\sigma}$ autour de $-\vec{h}$ à vitesse angulaire $h/2$.



II. Effet gravitomagnétique sur un satellite du à sa révolution

II.1) Principe fondamental de la dynamique dans le référentiel géocentrique supposé galiléen :

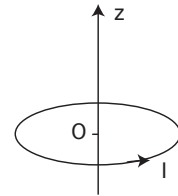
$$-m \frac{v^2}{r} \vec{e}_r = -\frac{GmM_\oplus}{r^2} \vec{e}_r \text{ et à la surface } g = \frac{GM_\oplus}{R_\oplus^2} \text{ donc } v = R_\oplus \sqrt{\frac{g}{R_\oplus + a}}$$

$$\text{A.N. si } a \ll R_\oplus, v \simeq \sqrt{g R_\oplus} \simeq 8 \text{ km s}^{-1}. \text{ Période de révolution : } T = \frac{2\pi R_\oplus}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{R_\oplus}{g}} = 5000 \text{ s.}$$

II.2) $\vec{B}(O) = \frac{\mu_o I}{2R} \vec{e}_z$

II.3) Par analogie $\vec{h} = \frac{\mu_g I_g}{2 R_\oplus} \vec{e}_z$ avec $I_g = M_\oplus / T$

$$\vec{h} = \frac{-2\pi G M_\oplus}{R_\oplus T c^2} \vec{e}_z = \frac{-2\pi v^2}{T c^2} \vec{e}_z$$



II.4) D'après I.13, $\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \frac{-\vec{h}}{2} \wedge \vec{\sigma} = \frac{\pi v^2}{T c^2} \vec{e}_z \wedge \vec{\sigma} = \vec{\omega}_1 \wedge \vec{\sigma}$

On a une précession de $\vec{\sigma}$ autour de $\vec{e}_z$ dans le sens direct à vitesse angulaire $\omega_1 = \frac{\pi v^2}{T c^2}$.

II.5) A.N. $\theta = \omega_1 T_\oplus = 3,2 \cdot 10^7 \pi \left(\frac{8 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^8} \right)^2 / 5 \cdot 10^3 = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ rad/an}$. Cette valeur est 2 fois plus faible que la valeur expérimentale.

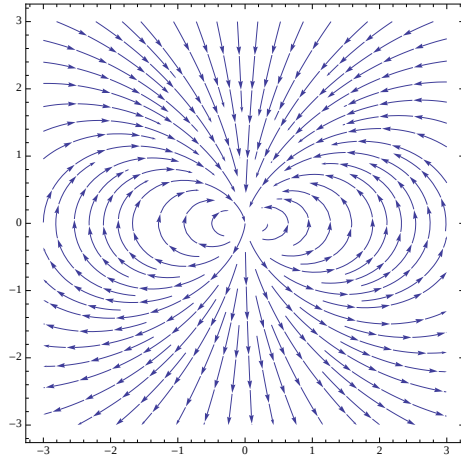
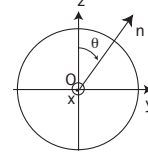
III. Effet gravitomagnétique de la rotation de la terre sur un satellite

III.1) D'après I.12, $\vec{M}_g = \frac{1}{2} \vec{\sigma} = \frac{1}{2} J_\oplus \vec{\Omega}_\oplus$

III.2) Par analogie $\vec{h} = -\frac{G}{c^2} \frac{3(\vec{M}_g \cdot \vec{n})\vec{n} - \vec{M}_g}{r^3}$

III.3) $\vec{M}_g = M_g \vec{e}_z$, $\vec{n} \cdot \vec{e}_y = \sin \theta$ et $\vec{n} \cdot \vec{e}_z = \cos \theta$

$$h_y = \frac{\mu_g M_g}{4\pi(R_\oplus + a)^3} 3 \cos \theta \sin \theta \quad \text{et} \quad h_z = \frac{\mu_g M_g}{4\pi(R_\oplus + a)^3} (3 \cos^2 \theta - 1)$$



III.4) On a toujours $\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \frac{-\vec{h}}{2} \wedge \vec{\sigma}$ et $\vec{\sigma}$ reste parallèle à Oy sur un temps T.

$$\text{Donc } \delta\vec{\sigma} \simeq \frac{T}{2} \sigma \vec{e}_y \wedge h_z \vec{e}_z = \frac{\sigma h_z T}{2} \vec{e}_x$$

III.5) ϵ est faible donc $\tan \epsilon \simeq \epsilon = \frac{\delta\sigma}{\sigma} = \frac{\langle h_z \rangle T}{2} = \frac{\mu_g M_g T}{8\pi(R_\oplus + a)^3} \langle 3 \cos^2 \theta - 1 \rangle$
 $\langle 3 \cos^2 \theta - 1 \rangle = 3/2 - 1 = 1/2$

$$\text{Donc } \omega_2 = \frac{\epsilon}{T} = \frac{\langle h_z \rangle}{4} = \frac{\mu_g M_g}{16\pi(R_\oplus + a)^3}$$

III.6) $M_g = \frac{1}{2} J_\oplus \Omega_\oplus$

$$\omega_2 = -\frac{GM_\oplus R_\oplus^2 \Omega_\oplus}{24c^2 R_\oplus^3} = -\frac{GM_\oplus \Omega_\oplus}{24c^2 R_\oplus} = -\frac{v^2 \Omega_\oplus}{24c^2}$$

III.7) $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\Omega_\oplus T}{24\pi} = \frac{T}{12T_\oplus} = \frac{5000}{12 \cdot 86400} \simeq 5 \cdot 10^{-3}$ ce qui correspond aux valeurs mesurées.

On a aussi $\omega_2 = \frac{\pi v^2}{12T_\oplus c^2} = 7 \cdot 10^{-8} \text{ rad/an}$ ce qui est 2 fois plus faible que la valeur mesurée. Le modèle est donc acceptable.

III.8) La précession géodétique est autour de Oz alors que la précession de Lense-Thirring est selon Ox quand le satellite est sur une orbite polaire. On peut donc distinguer les deux rotations.

IV. Mesure du mouvement du gyroscope

IV.1) La force de Lorentz donne B en $\frac{\text{kg m s}^{-2}}{\text{C m s}^{-1}} = \text{kg C}^{-1} \text{s}^{-1}$

Or $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$ donc A est en $\text{kg C}^{-1} \text{m s}^{-1}$ ce qui est bien l'unité de $m_e v / e$

IV.2) $\vec{j} = -Ne\vec{v}$

IV.3) j étant fini, si la résistivité est nulle, E est nul dans le supraconducteur.

Conservation de la charge : $\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0$. Or $\text{div } \vec{E} = \rho_e / \epsilon_0 = 0$ (donc le supraconducteur est localement neutre). On a donc $\text{div } \vec{j} = 0$ et par conséquent $\text{div } \vec{A} = 0$.

IV.4) On a vu que $\vec{E} = \vec{0}$

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = -\frac{m_e}{Ne^2} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{j}$$

IV.5) $\text{div } \vec{E} = \rho_e / \epsilon_0$, $\text{div } \vec{B} = 0$ et $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ sont vérifiées.

IV.6) $\vec{v} = r\Omega \vec{e}_\theta$ en coordonnées cylindriques d'axe Oz.

$\vec{B}$ créé par un fil infini vérifie hors du fil $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \vec{0} = \overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta \right)$ donc $\overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{\vec{e}_\theta}{r} \right) = \vec{0}$

Ici $\vec{B} = \frac{m_e \Omega}{e} \overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{r^2}{r} \vec{e}_\theta \right) = \frac{m_e \Omega}{e} (r^2 \vec{0} + \overrightarrow{\text{grad}} r^2 \wedge \frac{\vec{e}_\theta}{r}) = \frac{2m_e \Omega}{e} \vec{e}_z$ uniforme.

IV.7) Les électrons sont immobiles dans le supraconducteur donc il n'y a pas de courant surfacique entre le niobium et le quartz. $\vec{B}$ est donc continu. Il est donc aussi uniforme dans la boule.

$$\text{A.N. } B = \frac{2.9, 1.10^{-31} \cdot 900}{1, 6.10^{-19}} = 10^{-8} \text{T}$$

IV.8) $\frac{\delta B}{B} = \left(\frac{\delta \sigma}{\sigma} \right)_{\min} = \omega_2 t$

On peut donc mesurer $\omega_2 t$ moyen avec une précision de 5.10^{-9} rad. La précision relative sera meilleure sur une durée de mesure importante.

Sur un an, on a donc une précision relative sur ω_2 de $\frac{5.10^{-9}}{1, 9.10^{-7}} = 2,5\%$ avec les valeurs de l'énoncé et de 7% environ avec celles calculées.

Les mesures de 2004 de la NASA ont vérifié l'existence de ω_2 à 19% près et la sonde LAGEOS 3 espère obtenir quelques %.

Merci de me signaler d'éventuelles erreurs : trabujo.nadine@wanadoo.fr