

Pompe à chaleur

Solution proposée par JR Seigne MP,
avec la collaboration de M Libourel Sciences de l'Ingénieur MP*,
Clemenceau Nantes

1 Thermodynamique de la pompe à chaleur

1.1 Diagramme de Mollier

1. Dans les domaines où le fluide est monophasé liquide ou monophasé gaz, on peut, à pression constante, écrire que $dh = c_p dT$ avec $c_p > 0$. Par conséquent, T est croissante avec h . Par contre, la température n'est pas strictement croissante avec l'enthalpie car lors du changement d'état du corps pur, on a une évolution à la fois isobare et isotherme ce qui fait que la température reste identique alors que l'enthalpie augmente de h_{liq} à h_{gaz} .

2. La *chaleur latente massique de vaporisation* est appelée aujourd'hui enthalpie massique de vaporisation. On a $L^{vap} = h_{gaz} - h_{liq}$. Sur le graphique, on peut la trouver en faisant sur une horizontale (donc à température fixée) la différence entre les abscisses des points d'intersection de l'horizontale avec la ligne de vapeur saturée et de cette horizontale avec la ligne d'ébullition.

3. a) Si le liquide est supposé indilatable et incompressible, c'est donc que l'enthalpie est une constante sur une isotherme, l'allure de la courbe est donc une **verticale**.

b) Si on utilise le modèle du gaz parfait, on a $dh = c_p dT$ et donc h n'est à nouveau qu'une fonction de la température. L'allure de la courbe est donc à nouveau une **verticale**.

c) Dans la zone de changement d'état, l'isotherme est encore isobare. On a donc une allure **horizontale**.

4. Grâce à une identité thermodynamique, nous pouvons écrire que $dh = Tds + vdp$.

5. Sur une isentropique, on a donc $dh = vdp$. On utilise la loi des gaz parfaits en massique avec $r = R/M$ où M est la masse molaire du fluide : $pv = rT$ et donc $dh = rT \frac{dp}{p} = rT d(\ln p)$. On en déduit que $\frac{d \ln p}{dh} = \frac{1}{rT} > 0$. Les isentropiques sont donc bien de pente positive dans le diagramme de MOLLIER¹.

6. Sur une isenthalpique, on a $dh = 0 = Tds + vdp$. On en déduit que $ds = -r \frac{dp}{p}$. En intégrant, on arrive à $s = -r \ln p + \text{Cte}$ ce qui montre bien que l'entropie décroît lorsque la pression augmente.

7. On effectue la démonstration classique des fluides en écoulement permanent en grandeurs massiques. D'après le premier principe, on peut écrire que $u_B - u_A + \Delta e_c + \Delta e_{pot} = w_{tot} + q$. L'énoncé nous invite à négliger les variations d'énergie potentielle des forces extérieures ainsi que la variation d'énergie cinétique. Le travail se décompose en un travail lié à l'écoulement $w_{écoul}$ et un travail *utile* ou encore *technique* qui correspond à des transferts énergétiques mécaniques réalisés par des dispositifs mobiles comme des pales ou des pistons que le fluide va rencontrer dans son évolution de A vers B , ce travail est noté w par l'énoncé. Le travail lié à l'écoulement correspond aux forces de pression qui poussent le fluide à entrer en A et le freinent lors de la sortie en B . On a classiquement $w_{écoul} = \int_{v_A}^0 (-p_A) dv + \int_0^{v_B} (-p_B) dv$. On trouve

¹Le diagramme de MOLLIER ne figure pas au programme. On notera que l'on appelle plus couramment diagramme de MOLLIER le graphique portant $h = f(s)$ qui est encore le diagramme enthalpique. Le diagramme $\ln p = f(h)$ est plutôt qualifié de diagramme des frigoristes.

$w_{\text{écoul}} = p_A v_A - p_B v_B$. En utilisant les hypothèses de l'énoncé et ce calcul, on met en évidence le fait que : $h_B - h_A = w + q$ où w est le travail utile.

1.2 Cycle de la pompe à chaleur

8. La détente s'effectue dans un robinet de laminage sans pièce mobile et sans que le fluide ne puisse effectuer des transferts thermiques. On a donc $w_{34} = 0$ et $q_{34} = 0$. On en déduit que $\Delta h_{34} = 0$, la transformation est isenthalpique.

9. La représentation de la forme du cycle réalisé par le fluide dans la pompe à chaleur est effectué sur le schéma de la figure 1. La phase de compression isentropique 1 – 2 est réalisée dans le domaine vapeur sèche avec une courbe croissante sur le modèle de ce que le diagramme d'état du fluide R134A nous montre. Elle s'effectue entre les pressions p_1 et $p_2 > p_1$. Ensuite, on a une liquéfaction à pression constante (sur une horizontale 2 – 3 jusqu'à un point qui n'est pas défini, on peut s'arrêter sur le palier de changement d'état, aller à son extrémité ou bien finir dans la zone monophasé liquide. La transformation 3 – 4 isenthalpique représentée par une verticale doit nous ramener à la pression initiale p_1 , le fluide finit le cycle par une horizontale pour rejoindre le point 1.

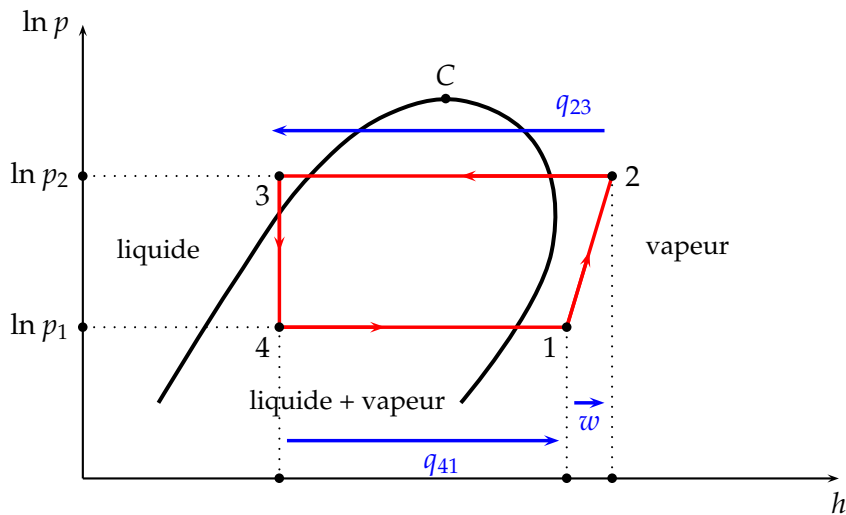


FIG. 1 – Cycle approximatif du fluide dans la pompe à chaleur

10. Sur le cycle complet on a $\Delta h = 0$. On effectue un bilan étape par étape. Pour 1 – 2, on a $\Delta h_{12} = w$. Pour 2 – 3, il n'y a pas de travail utile donc $\Delta h_{23} = q_{23}$. Ensuite, comme nous l'avons vu, on a $\Delta h_{34} = 0$. Enfin sur l'étape 4 – 1, il n'y a pas non plus de travail utile et par conséquent $\Delta h_{41} = q_{41}$. On en déduit que le bilan énergétique est : $w + q_{23} + q_{41} = 0$. On peut voir ces quantités représentées sur le schéma de la figure 1.

11. L'efficacité de la pompe à chaleur est le rapport (positif) du transfert énergétique utile sur le transfert énergétique coûteux. Une pompe à chaleur ayant pour objectif d'apporter de l'énergie à la source chaude, le transfert énergétique utile correspond donc à celui perdu par le fluide pendant l'étape 2 – 3, c'est-à-dire $|q_{23}| = -q_{23}$. Le transfert énergétique coûteux correspond au travail à fournir au compresseur dans l'étape 1 – 2 à savoir w . Il est donc logique de définir l'efficacité par $\eta = \frac{-q_{23}}{w}$. D'après le bilan énergétique sur le cycle, on a $-q_{23} = w + q_{41}$ et donc $\eta = 1 + \frac{q_{41}}{w}$. Or, $w > 0$ et $q_{41} > 0$, leur rapport est donc positif et $\eta > 1$.

12. D'après le document-réponse fourni, on observe que dans la partie monophasée liquide les isothermes ne sont pas tracées mais qu'au niveau de la ligne d'ébullition, on voit des débuts de courbes verticales. On peut donc conclure que le modèle adopté pour le liquide est satisfaisant. Pour la partie vapeur sèche, le modèle du gaz parfait n'est pas satisfaisant car on constate que les isothermes qui sont bien verticales pour une pression inférieure à 1 bar s'incurvent de façon très importante à partir de 10 bar. On retrouve bien le fait que le modèle du gaz parfait n'est satisfaisant que pour de faibles pressions et qu'ensuite, il faut changer d'équation d'état en utilisant par exemple l'équation de VAN DER WAALS.

13. La température $T_3 = 0\text{ °C}$ n'est pas acceptable². En effet, cela signifie que la température de la source chaude est au plus égale à cette valeur. Cela est incohérent avec le fait que la température de sortie de l'évaporateur soit $T_1 = 5\text{ °C}$, ce qui veut dire que la température de la source chaude est au minimum de 5 °C . On supposera donc que l'intention de l'énoncé était de donner la valeur $T_4 = 0\text{ °C}$ et, qu'à la sortie du condenseur, on se trouve juste à la fin de la liquéfaction du fluide, le point 3 se trouvant donc sur l'isobare $p_2 = 10\text{ bar}$ et sur la ligne d'ébullition à une température de 40 °C . Le tableau décrivant le cycle du fluide est donc donné ci-dessous.

	Point 1	Point 2	Point 3	Point 4
$h\text{ (kJ} \cdot \text{kg}^{-1}\text{)}$	402	424	256	256
p	3 bar	10 bar	10 bar	3 bar
T	5 °C	45 °C	40 °C	0 °C
État	monophasé gaz	monophasé gaz	liquide saturant	diphasé liquide-vapeur

14. Avec les valeurs précédentes, on en déduit que $w = \Delta h_{12} = 22\text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ et que $q_{23} = \Delta h_{23} = -168\text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$. L'efficacité est donc $\eta = 7,6$. Pour un cycle de CARNOT, on aurait le bilan énergétique suivant $w + q_c + q_f = 0$ alors que le second principe de la Thermodynamique impose pour une transformation cyclique et réversible que $\frac{q_c}{T_c} + \frac{q_f}{T_f} = 0$. Comme on a $\eta_c = \frac{-q_c}{w}$, on trouve facilement que $\eta = \frac{T_c}{T_c - T_f}$ où les températures sont en KELVIN. Compte tenu de la valeur de la température de sortie de l'évaporateur (40 °C), il est logique de prendre $T_c = 313\text{ K}$ et comme la température de sortie du condenseur est de 5 °C , on prend $T_f = 278\text{ K}$. On a donc $\eta_c = 8,9$. On retrouve bien le fait que la transformation réelle (irréversible) présente une efficacité plus faible que la transformation idéale de CARNOT.

15. La puissance disponible pour le chauffage est donnée par $P_{ch} = \mathcal{D}_m |q_{23}|$. Le débit massique de fluide à assurer est donc $\mathcal{D}_m = \frac{P_{ch}}{|q_{23}|} \simeq 0,025\text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$.

1.3 Cycle du compresseur

16. Le comportement du compresseur est supposé réversible. Dans la phase de compression, on a donc une adiabatique réversible. Le gaz modélisé par le gaz parfait suit donc la loi de LAPLACE $p v^\gamma = \text{Cte}$. La courbe de compression est donc de forme hyperbolique parcourue dans le sens d'augmentation de la pression. On peut constituer un cycle fictif comme il est représenté sur le schéma de la figure 2 en terminant par une évolution fictive à volume nul ramenant la pression à la valeur initiale.

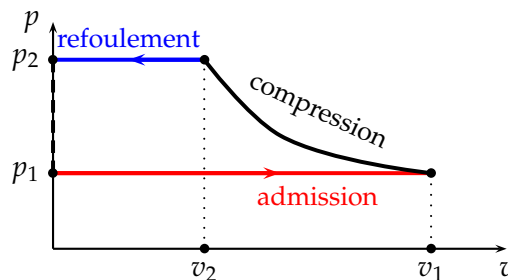


FIG. 2 – Transformation du fluide dans le compresseur

17. Le travail réversible est donné par $w_{cy} = \oint -p dv$, il correspond à l'aire du cycle en valeur algébrique.

18. Sur la phase de compression, on a une adiabatique réversible. Cela permet d'écrire que $\Delta u = w_{comp} = c_v(T_2 - T_1)$. D'après la loi de MAYER des gaz parfaits, on a $c_p - c_v = r$. On en déduit que $c_v = \frac{r}{\gamma - 1}$. En utilisant ensuite l'équation d'état des gaz parfaits $p v = r T$, on trouve que : $w_{comp} = \frac{p_2 v_2 - p_1 v_1}{\gamma - 1}$. À ce travail, il faut ajouter celui d'admission et de refoulement qui correspond aux aires sous la courbe faciles à calculer. On a $w_{ad-ref} = p_2 v_2 - p_1 v_1$. Au total pour l'ensemble des phases du compresseur, on a $w_{tot} =$

²Il s'agit d'une manifeste erreur d'énoncé. Il existe des pompes à chaleur avec un sous-refroidissement qui peut amener le fluide dans l'état liquide à une relativement basse température mais, ici, dans le contexte décrit il n'en est nullement question.

$w_{comp} + w_{ad-ref} = \frac{\gamma(p_2 v_2 - p_1 v_1)}{\gamma - 1}$. Quel que soit le travail demandé par l'énoncé, c'est bien w_{comp} qui a de l'intérêt pour une machine fonctionnant en écoulement permanent.

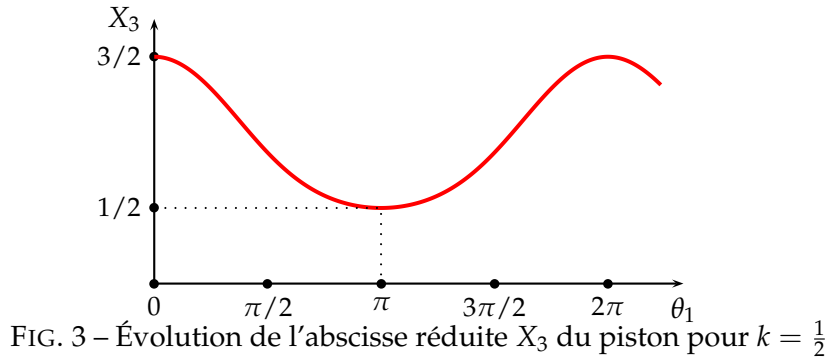
19. On peut utiliser la loi de LAPLACE en variables intensives (T, p) pour écrire que $p_1^{1-\gamma} T_1^\gamma = p_2^{1-\gamma} T_2^\gamma$. On trouve alors que la température au point 2 est donnée par $T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(\gamma-1)/\gamma}$. L'application numérique³ donne $T_2 \simeq 43$ °C. Cette valeur est tout à fait satisfaisante si on la compare à la température de 45 °C obtenue graphiquement.

2 Différentes technologies de compresseur

2.1 Dispositif bielle manivelle classique

20. a) Par projection sur l'axe horizontal, on obtient facilement $x_3 = e \cos \theta_1 + \ell \cos \theta_2$ puisque l'angle θ_2 sera toujours compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$. Les deux triangles utilisés possédant un côté commun, on peut encore écrire que $e \sin \theta_1 = \ell \sin \theta_2$. Avec la relation $\cos \theta_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_2}$, on arrive à la relation $x_3 = \ell \left(k \cos \theta_1 + \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta_1} \right)$.

b) L'allure de la courbe $X_3 = x_3/\ell = f(\theta_1)$ est donnée sur le schéma de la figure 3.

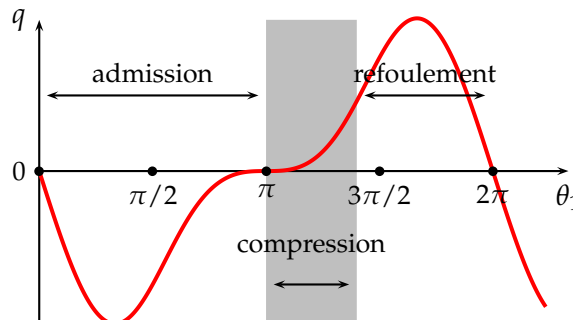


c) La cylindrée correspond au volume total balayé, c'est-à-dire $V = S(x_{3,max} - x_{3,min})$. Comme $x_{3,max} = \ell(1 + k)$ et que $x_{3,min} = \ell(1 - k)$, on en déduit que $V = 2kS\ell$.

21. Avec la condition initiale $\theta_1(t = 0) = 0$, l'angle θ_1 évolue au cours du temps selon $\theta_1 = \Omega t$. On a donc $x_3 = \ell \left(k \cos \Omega t + \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \Omega t} \right)$. La vitesse est $v_3 = \frac{dx_3}{dt} = \ell \frac{dX_3}{dt}$. En développant le calcul,

on trouve finalement que $v_3 = -\Omega \ell \left(k \sin \Omega t \right) \left(1 + \frac{k \cos \Omega t}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \Omega t}} \right)$. La débit volumique est $q = v_3 S$. En

utilisant l'expression précédente de la vitesse, on arrive finalement à $q = -\frac{\Omega V}{2} \sin \theta_1 \left(1 + \frac{k \cos \theta_1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta_1}} \right)$. L'évolution du débit volumique est représentée sur le schéma de la figure 4.



³L'application numérique n'est pas raisonnablement réalisable sans calculatrice !

Il faut discuter la courbe présentée à la figure 4 car la courbe $q(\theta_1)$ fait abstraction de la phase de compression où à la fois les clapets A et R sont fermés. On peut supposer logiquement que la phase d'admission va jusqu'à $\theta_1 = \pi$ pour profiter au maximum de la course du piston. Par contre, la phase de refoulement ne suit pas immédiatement. Il faut, entre $\theta_1 = \pi$ et une valeur de θ_1^R qu'il faudrait déterminer grâce à la loi de LAPLACE sur les pressions et volumes ($p v^\gamma = \text{Cte}$) proposer un débit volumique nul jusqu'à l'ouverture du clapet R . Il s'en suivrait alors une phase de refoulement où le débit volumique présenterait toujours une courbe en cloche mais différente de celle que l'on nous a demandé de représenter.

22. a) Le piston subit son poids et la réaction de contact avec le bâti (cylindre). On peut sans doute supposer que la lubrification est bonne est donc qu'il n'y a pas de frottements engendrés par le glissement du piston dans le cylindre. Le piston est en contact avec la bielle (2) en B , celle-ci exerce donc une force sur le piston. Enfin, il reste les forces de pression. On peut supposer que la pression atmosphérique agit sur la face arrière du piston. Sur la face avant, c'est la pression $p_2 = 10$ bar qui agit.

b) La course du piston étant réalisée sur $\pm e$, on peut évaluer les actions dues à l'accélération par $F_a = M\Omega^2 e$. On a $\Omega = 30$ tours s^{-1} ce qui correspond à $\Omega = 190$ rad $\cdot s^{-1}$. Si l'on effectue l'application numérique, on trouve $F_a \simeq 450$ N. Pour la force de pression, on peut l'évaluer en ne tenant compte que de la pression de refoulement qui agit sur la surface du piston $F_p = \pi \frac{D^2}{4} p_2$. On trouve $F_p \simeq 1250$ N. On constate que $F_p > F_a$ tout en notant que ces deux forces sont du même ordre de grandeur.

c) Il n'est pas possible de déterminer l'action de la bielle sur le piston puisqu'on ne connaît pas les forces de contact du cylindre sur le piston. On peut envisager le problème autrement en utilisant le principe des actions réciproques en considérant un système qui contient la bielle, on pourra envisager d'obtenir la force exercée par le piston sur la bielle. Pour cela, il faudrait éviter que des forces de contact agissant sur la bielle et difficiles à évaluer n'entrent aussi en ligne de compte. Si l'on ne prend que la bielle comme système, on va se trouver confronté au problème de l'action de la manivelle (1) sur la bielle. Le mieux est sans doute de considérer le système bielle-manivelle.

On peut compléter cette réponse, dans le sens du programme de Sciences de l'Ingénieur. Il aurait fallu vérifier, avant de commencer l'étude, que le modèle plan est isostatique en proposant le calcul du degré d'hyperstatisme plan puisque l'on a une modélisation plane. On a $h_p = m_{cp} + 3\gamma - I_c$ où m_{cp} est le degré de mobilité plan, γ le nombre cyclomatique et I_c le nombre d'inconnues cinématiques. Ici, (0) est relié par une articulation à (1) qui est lié lui-même à (2) toujours par une articulation. C'est toujours une liaison articulation entre (2) et (3), enfin (3) revient sur le bâti (0) avec une liaison glissière plane. Dans ce cas, nous avons $m_{cp} = 1$, $\gamma = 1$ car il y a un seul cycle indépendant (0) – (1) – (2) – (3) – (0) et 4 inconnues cinématiques $I_c = 4$. On trouve $h_p = 0$, cela prouve que l'on peut totalement résoudre le problème avec la détermination des 8 inconnues statiques. Pour déterminer l'effort du piston sur la bielle, il faut tout d'abord appliquer le théorème de la résultante dynamique au piston en projection sur Ox et on obtient $\mathbf{R}_{2 \rightarrow 3} \cdot \mathbf{e}_x$. Ce même théorème en projection sur Oy ne permet pas de connaître $\mathbf{R}_{2 \rightarrow 3} \cdot \mathbf{e}_y$ car $\mathbf{R}_{0 \rightarrow 3} \cdot \mathbf{e}_y$ n'est pas connue. On isole le système volant manivelle + bielle et on applique le théorème du moment dynamique en O , on peut déterminer $\mathbf{R}_{3 \rightarrow 2} \cdot \mathbf{e}_y$. Ensuite à l'aide du principe des actions réciproques, on en déduit $\mathbf{R}_{2 \rightarrow 3} \cdot \mathbf{e}_y$ et enfin $\mathbf{R}_{2 \rightarrow 3}$.

23. Nous avons vu la relation $e \sin \theta_1 = \ell \sin \theta_2$ qui peut encore s'écrire $\sin \theta_2 = k \sin \theta_1$. Ainsi $\sin \theta_2$ sera maximum lorsque $\sin \theta_1$ le sera, c'est-à-dire pour $\theta_1 = \pi/2$ ce qui était prévisible intuitivement. On a donc $\sin \theta_{2,max} = k = \frac{1}{2}$. On peut donc en conclure que $\theta_{2,max} = 30^\circ$. L'action en biais va engendrer des forces normales à l'axe Ox_0 importantes. On peut donc prévoir que cela sera plus favorable à l'usure du cylindre et du piston.

2.2 Dispositif à piston oscillant

24. On a toujours affaire à deux triangles rectangles qui partagent un côté en commun mais maintenant la distance $OB = h$ est fixée. On a toujours $e \sin \theta_1 = x_{32} \sin \theta_2$. Mais maintenant, on a $h = e \cos \theta_1 + x_{32} \cos \theta_2$ qui donne $x_{32} \cos \theta_2 = h - e \cos \theta_1$. En profitant du fait que $x_{32}^2 \sin^2 \theta_2 + x_{32}^2 \cos^2 \theta_2 = x_{32}^2$, on arrive facilement à : $x_{32} = \frac{h \sqrt{1 + q^2 - 2q \cos \theta_1}}{q}$. On a représenté sur le schéma de la figure 5 la courbe de $X_{32} = x_{32}/h$ en fonction de θ_1 .

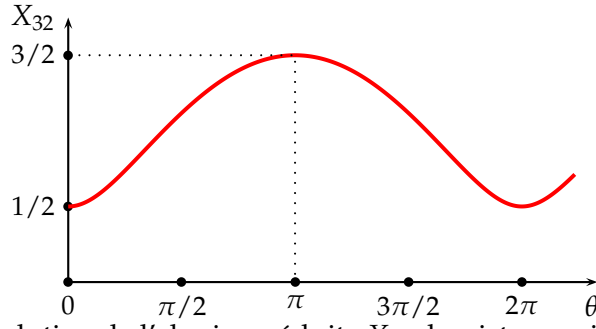


FIG. 5 – Évolution de l'abscisse réduite X_{32} du piston oscillant pour $q = \frac{1}{2}$

2.3 Comparaison de deux dispositifs

25. Comme on peut le constater en examinant les deux graphiques proposés des accélérations réduites, on voit que pour le piston classique, on a une phase où, après avoir atteint son premier maximum, l'accélération diminue puis augmente à nouveau pour atteindre un second maximum. Cela traduit en quelque sorte des à-coups qui provoquent des vibrations et des usures plus précoces que dans le cas du piston oscillant où l'évolution de l'accélération est beaucoup plus monotone. En s'intéressant à la dérivée de ces accélérations, on pourra très facilement mettre en évidence la présence ou non des à-coups évoqués avant. On peut noter que plus le rapport $q = e/h$ est petit plus on diminue le creux dans la courbe d'accélération proposée. Un système bielle-manivelle ne s'utilise d'ailleurs pas avec un rapport $q = 1/2$ mais plutôt avec un rapport $q = 1/5$ pour limiter les à-coups.

3 Contrôle en température

3.1 Première modélisation

26. a) On applique le premier principe de la Thermodynamique en puissance au local et on obtient $C_T \frac{dT_L}{dt} = -\phi + \beta(T_c - T_L)$. Compte tenu de la forme de la puissance des pertes thermiques, on arrive à l'équation différentielle : $C_T \frac{dT_L}{dt} + (\beta + H)T_L = \beta T_c + HT_0$. On peut proposer le schéma-bloc de la figure 6 pour modéliser le problème, mais cette forme n'est pas unique. La solution de l'équation générale $C_T \frac{dT_L}{dt} + (\beta + H)T_L = 0$ est de la forme $T_L = A \exp -\frac{\beta+H}{C_T}t$. Cette solution ne divergera pas lorsque $\beta + H > 0$ puisque $C_T > 0$. Le système est stable si $\beta > -H$ ce qui est certain d'être réalisé puisque $\beta > 0$. Une autre représentation du schéma-bloc plus conforme aux Sciences de l'Ingénieur est proposée sur le schéma de la figure 7.

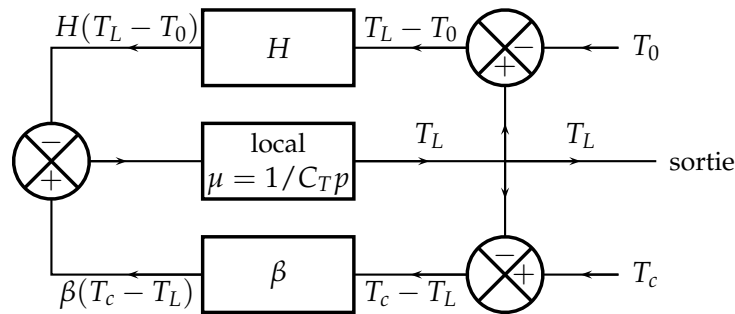


FIG. 6 – Schéma bloc de la régulation thermique

b) L'erreur statique correspond à la situation du régime permanent et donc à la solution particulière de l'équation différentielle. Cette solution est évidente : $T_{L,stat} = \frac{\beta T_c + HT_0}{\beta + H}$. L'erreur statique est $\delta_S = T_c - T_{L,stat}$. On trouve $\delta_S = \frac{H}{\beta + H}(T_c - T_0)$. Pour la réduire, il faut que $\beta \gg H$ ce qui correspond à une forte réaction. Physiquement, cette erreur statique est inévitable puisque la pompe à chaleur fournit une puissance pro-

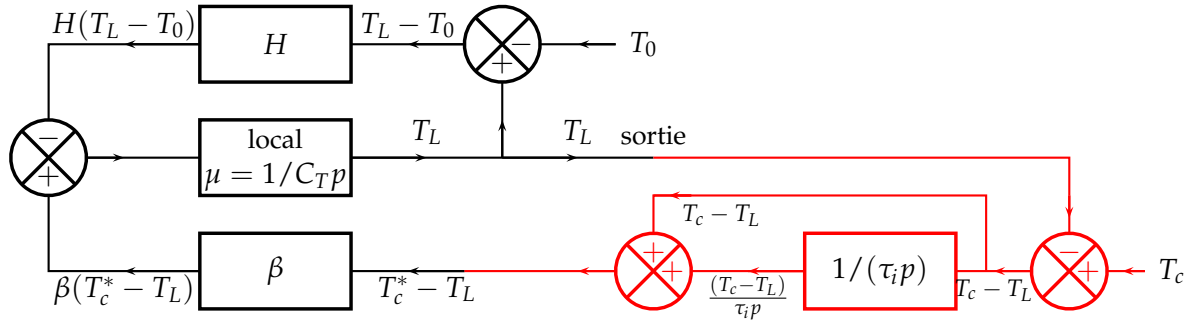


FIG. 9 – Schéma bloc du correcteur - Seconde proposition

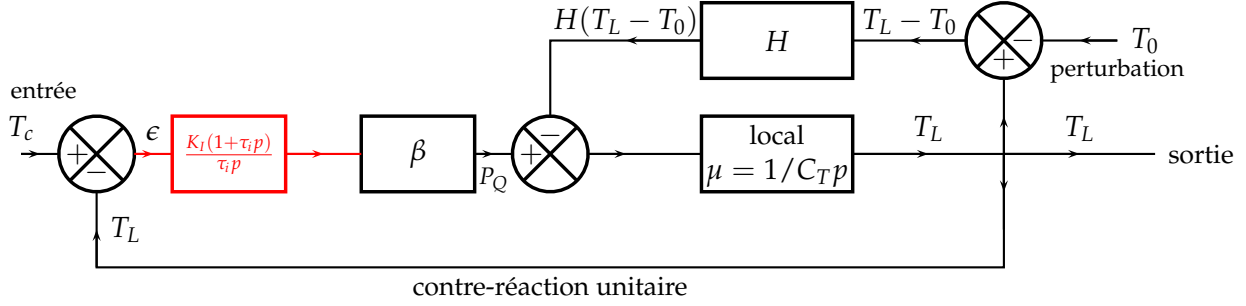


FIG. 10 – Schéma bloc de la régulation thermique avec correcteur - SI

3.2 Deuxième modélisation

28. On a $\tilde{V}_c = K\tilde{\Omega} + R\tilde{i}$ et $\tilde{i} = \frac{\tilde{C}_m}{K}$, on peut obtenir $\tilde{V}_c = K\tilde{\Omega} + \frac{R\tilde{C}_m}{K}$. L'équation différentielle donnant la vitesse est $J\frac{d\Omega}{dt} + f_r\Omega = C_m$, on en déduit que $(Jp + f_r)\tilde{\Omega} = \tilde{C}_m$. Il ne reste plus qu'à remplacer l'expression du couple moteur dans celle de la tension et on arrive à $\tilde{V}_c = \frac{[(K^2 + Rf_r) + RJp]}{K}\tilde{\Omega}$. Ainsi, on peut donner la fonction de transfert $\frac{\tilde{\Omega}}{\tilde{V}_c} = \frac{K}{[(K^2 + Rf_r) + RJp]} = \frac{k_e}{1 + \tau_e p}$. Cela permet d'identifier les constantes introduites par l'énoncé : $k_e = \frac{K}{K^2 + Rf_r}$ et $\tau_e = \frac{RJ}{K^2 + Rf_r}$. Dans la limite où $R \rightarrow 0$, on constate que $\tau_e \rightarrow 0$ et que $k_e \rightarrow \frac{1}{K}$. La vitesse de rotation Ω est alors proportionnelle à la tension V_c puisque $\tilde{V}_c = K\tilde{\Omega}$. Cela correspond bien à la proposition qui avait été faite dans la première modélisation où on avait affirmé $P_Q = \alpha V_c$ puisqu'ici on aura $P_Q = A\Omega = \frac{A}{K}V_c$. Cela revient à poser $\alpha = \frac{A}{K}$.

29. Si on dérive par rapport au temps la relation proposée par le correcteur, on aura $\frac{dV_c}{dt} = K_c \frac{d\epsilon}{dt} + \frac{\epsilon}{T_i}$. La lecture de cette équation ou de sa primitive pose quelques problèmes dimensionnels. En effet, $\epsilon = T_c - T_L$ est une température et par conséquent K_c s'exprime en $V \cdot K^{-1}$. Dans ces conditions, T_i ne peut pas être une température, ni une durée caractéristique comme l'intégrale proposée semble encore le suggérer, on a T_i en $K \cdot s \cdot V^{-1}$. On a $\tilde{V}_c = (K_c + \frac{1}{T_i p})\tilde{\epsilon}$. La fonction de transfert du correcteur est donc $C(p) = \frac{\tilde{V}_c}{\tilde{\epsilon}} = \frac{1 + K_c T_i p}{T_i p}$.

30. On a $\tilde{P}_Q = A\tilde{\Omega} = \frac{Ak_e}{1 + \tau_e p}\tilde{V}_c$. En tenant compte de l'expression obtenue à la question précédente, on arrive rapidement à $\tilde{P}_Q = \frac{Ak_e(1 + K_c T_i p)}{(1 + \tau_e p)T_i p}(\tilde{T}_c - \tilde{T}_L)$.

31. On reprend l'équation différentielle pour le local avec la convention $T_0 = 0^\circ C$: $C_T \frac{dT_L}{dt} + HT_L = P_Q$. Si l'on passe en coordonnées de LAPLACE, on a alors $\tilde{T}_L(H + C_T p) = \tilde{P}_Q$.

32. En rassemblant les résultats des deux questions précédentes, on obtient $\tilde{T}_L(H + C_T p) = \frac{Ak_e(1 + K_c T_i p)}{(1 + \tau_e p)T_i p}(\tilde{T}_c - \tilde{T}_L)$. Pour faciliter la lecture, on peut supprimer la fraction en multipliant par $(1 + \tau_e p)T_i p$. Cela donne $[(1 + \tau_e p)T_i p](H + C_T p)\tilde{T}_L = (Ak_e(1 + K_c T_i p))(\tilde{T}_c - \tilde{T}_L)$. Cette équation montre que le facteur de $\tilde{T}_L$ est d'ordre 3 en $p = j\omega$ pour étudier un régime harmonique. Ce terme constituera le dénominateur de la fonction de transfert proposée. On peut lui donner la forme $a + b(j\omega) + c(j\omega)^2 + d(j\omega)^3 = a - c\omega^2 + j\omega(b - d\omega^2)$. Dans ces conditions, on a $D(\omega) = (a - c\omega^2)^2 + \omega^2(b - d\omega^2)^2$. Comme $D(\omega)$ ne comporte pas de terme en ω^6 , il

est indispensable d'avoir $d = 0$ car seul ce terme est à l'origine de ω^6 . Si l'on reprend l'équation reliant $\tilde{T}_L$ à $\tilde{T}_c$, on peut voir que $d = C_T T_i \tau_e$. Rendre nul ce terme impose de choisir soit $T_i = 0$ ce qui n'est pas possible car cela pose un problème par rapport au correcteur proposé, soit $\tau_e = 0$ car il est évident que $C_T \neq 0$, on serait alors dans le cas où $R = 0$. Si l'on retient cette dernière solution, on a $a = Ak_e$, $b = (Ak_e K_c + H)T_i$ et $c = C_T T_i$. Le développement de $D(\omega)$ conduit à $D(\omega) = a^2 + (b^2 - 2ac)\omega^2 + c^2\omega^4$. On trouve que K_c et T_i sont liés par $b^2 = 2ac$ qui se traduit par $(Ak_e K_c + H)^2 T_i = 2Ak_e C_T$. Avec la condition précédente, on obtient alors $D(\omega) = a^2(1 + \frac{c^2}{a^2}\omega^4)$. Cela correspond à la forme recherchée. Ici, on n'obtient qu'une seule relation entre T_i et K_c et non pas deux ce qui permettrait leur détermination car il n'a pas été imposé une autre condition sur le correcteur comme par exemple un temps de réponse, un dépassement maximal ou encore une valeur souhaitée pour les marges de stabilité.

33. On identifie alors $\omega_0^4 = \frac{a^2}{c^2}$, cela donne : $\omega_0 = \sqrt{\frac{Ak_e}{C_T T_i}}$. Le dénominateur de la fonction de transfert correspond maintenant à $a - c\omega^2 + (j\omega)b = a + j\omega b + (j\omega)^2 c$ avec la relation $b^2 = 2ac$. La solution générale de l'équation différentielle de $T_L(t)$ sera fonction des racines de l'équation $cr^2 + br + a = 0$ dont le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = -2ac = -b^2 < 0$. On a donc affaire à un **régime pseudopériodique**. Les racines de l'équation sont donc $r = -\frac{b}{2}(1 \pm j)$ avec $b = \sqrt{2Ak_e C_T T_i}$. Le régime est amorti avec une constante de temps $\tau_a = \frac{2}{b} = \sqrt{\frac{2}{Ak_e C_T T_i}}$. On donc une solution générale de la température de la forme $T_{L,gen} = T_m \exp -\frac{t}{\tau_a} \cos(\frac{t}{\tau_a} + \varphi_a)$. Le système est donc stable mais il présentera des oscillations amorties pour le régime transitoire. Cette situation correspond à un coefficient d'amortissement $\xi = \sqrt{2}/2$. Dans le cas de la seconde modélisation, le schéma-bloc est celui de la figure 11.

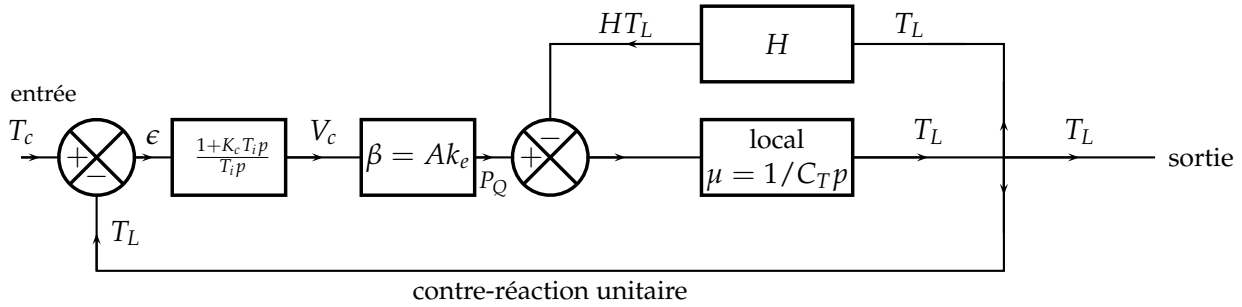


FIG. 11 – Schéma bloc de la seconde modélisation

La fonction de transfert $F(j\omega) = \frac{\tilde{T}_L}{\tilde{T}_c} = FTBF(j\omega) = \frac{1 + K_c T_i(j\omega)}{1 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_0} + \frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2}}$ avec $p = j\omega$. On cherche la réponse

à l'échelon unitaire. Avec cette fonction de transfert, on voit immédiatement que le système sera précis, c'est-à-dire que l'écart statique sera nul puisque $\delta_s = \lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\tilde{\epsilon}(p) = 0$. En utilisant le théorème de la valeur initiale, on peut observer que la courbe d'évolution de la température $T_L(t)$ présente une dérivée non nulle à l'origine ce qui est caractéristique d'un second ordre généralisé. En effet, on a $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{dT_L}{dt} = \lim_{p \rightarrow \infty} p^2 \tilde{T}_L(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} p^2 \frac{1}{p} FTBF(p)$ puisque l'échelon en $\tilde{T}_c(p)$ correspond à $\frac{1}{p} T_{c0}$ où T_{c0} donne la dimension de l'échelon de température. On trouve donc que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{dT_L}{dt} = \omega_0^2 K_c T_i T_{c0}$. Dans le cas d'un second ordre généralisé, on peut avoir un dépassement important au contraire du cas d'un second ordre simple comme $\frac{1}{1 + 2\xi \frac{j\omega}{\omega_0} + \frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2}}$ pour lequel lorsque $\xi = \sqrt{2}/2$ - ce qui est notre cas - on a un dépassement

limité à 4,9%. L'allure de la réponse temporelle est représentée sur le schéma de la figure 12. Un système avec $\xi = 0,69$ est le plus rapide et il possède un dépassement de 5%. Ici, le système avec $\xi = \sqrt{2}/2$ est quasiment le plus rapide et son dépassement est de 4,9%. On peut aussi relever qu'en réglant le système pour que la FTBF soit d'ordre 2, on a un système intrinsèquement stable, ce qui n'est pas nécessairement assuré avec un système d'ordre 3.

Dans le cas de l'étude des systèmes de second ordre généralisé, on peut démontrer que la réponse possède un dépassement important lorsque $K_c T_i \gg \frac{2\xi}{\omega_0}$ ce qui revient à écrire que $K_c T_i \omega_0 \gg \sqrt{2}$. On pourrait proposer pour le réglage du système de limiter le dépassement en proposant par exemple de prendre

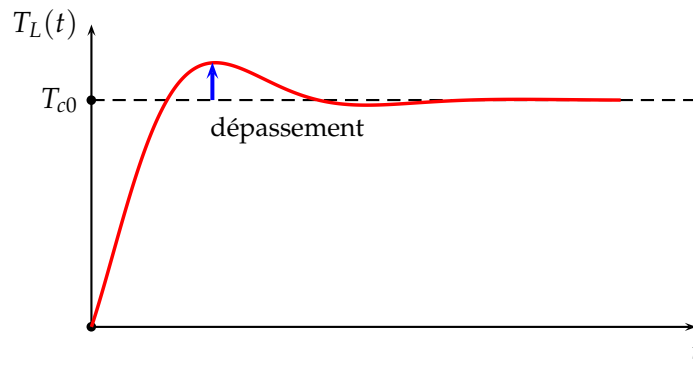


FIG. 12 – Réponse indicielle $T_L(t)$

$K_C T_i \omega_0 = \sqrt{2}$. Cela conduirait à une seconde relation entre K_c et T_i et déterminerait complètement le système. On aurait donc $K_c = \sqrt{\frac{2C_T}{Ak_e T_i}}$ accompagné de la première relation $(Ak_e K_c + H)^2 T_i = 2Ak_e C_T$.