

Composition de Physique – A

Filière PC

Durée de l'épreuve : 4 heures

Solution proposée

Oscillations d'une bulle

On pourra rapprocher ce sujet de Mines–Ponts, PSI, 2006 (Physique II), qui traite le même problème : les oscillations adiabatiques d'une bulle sphérique d'air dans de l'eau, décrites d'après les travaux originaux de Marcel Minnaert (1893–1970).

I : Oscillations libres d'une bulle d'air

I.1. Pour des évolutions adiabatiques et réversibles d'un gaz parfait, pV^γ reste constant, ce qui s'écrit donc $[P_0 + p_a(t)] \cdot [R_0 + r_1(t)]^{3\gamma} = P_0 R_0^{3\gamma}$. La linéarisation de cette équation fournit $1 + \frac{p_a}{P_0} = 1 - 3\gamma \frac{r_1}{R_0}$ donc

$$p_a(t) = -\frac{3\gamma P_0}{R_0} r_1(t).$$

I.2. Le travail des forces de pression exercées par la bulle sur l'eau est $\delta W_1 = -(P_0 + p_a)dV_{\text{eau}}$; l'eau étant considérée comme incompressible, sa variation de volume au niveau de la bulle $dV_{\text{eau}} = -dV_{\text{bulle}}$ est accompagnée d'une autre variation de volume $dV'_{\text{eau}} = -dV_{\text{eau}}$ à grande distance de la bulle, où la pression est P_0 , donc avec $\delta W_2 = -P_0 dV'_{\text{eau}}$. Finalement, $\delta W_1 + \delta W_2 = p_a dV_{\text{bulle}}$ ou $\delta W = p_a dV_a$.

I.3. On a aussi $\delta W = -\frac{3\gamma P_0}{R_0} r_1 4\pi(R_0 + r_1)^2 dr_1$, expression qui n'est que partiellement linéarisée ici et qu'on doit plutôt écrire, au premier ordre non nul, $\delta W = -12\pi\gamma P_0 R_0 r_1 dr_1$; on reconnaît donc $\delta W = -dU$ avec

$$U = \frac{1}{2} K r_1^2 \quad \text{si} \quad K = 12\pi\gamma P_0 R_0.$$

I.4. L'eau étant incompressible, le champ des vitesses est à flux conservatif (on peut par exemple le déduire de la relation locale de conservation de la masse, $\text{div}(\rho_0 \vec{v}) + \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0$ avec ρ_0 constant). En particulier, pour tout $r > R(t)$, le flux de $\vec{v}$ à travers une sphère de rayon r , donc $4\pi r^2 v_1(r, t)$, est indépendant de r . Comme $v_1 = \dot{r}_1$ en $r = R(t)$ on en déduit $v_1(r, t) = \dot{r}_1 \frac{R^2(t)}{r^2}$ qui, développé au premier ordre en r_1 et $\dot{r}_1$, s'écrit

$$v_1(r, t) = \dot{r}_1(t) \frac{R_0^2}{r^2}.$$

I.5. L'énergie cinétique d'une masse $dm = \rho_0 4\pi r^2 dr$ d'eau à la distance r de O est $dE_c = \frac{1}{2} dm v_1^2$ soit $dE_c = \rho_0 \dot{r}_1^2 R_0^4 2\pi \frac{dr}{r^2}$, qu'on somme de $r = R_0$ à l'infini selon $\int_{R_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{R_0}$ donc $E_c = 2\pi R_0^3 \rho_0 \dot{r}_1^2$ qui prend la forme $E_c = \frac{1}{2} M \dot{r}_1^2$ avec $M = 4\pi R_0^3 \rho_0$.

I.6. Négligeant ici toutes les forces autres que de pression, l'application du théorème de l'énergie cinétique à l'eau s'écrit $\frac{1}{2} K \dot{r}_1^2 + \frac{1}{2} M \ddot{r}_1^2 = \text{cte}$ ou $\ddot{r}_1 + \frac{K}{M} r_1 = 0$, équation qui décrit des (petites) oscillations harmoniques

à la pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}}$ qu'on écrit donc $\omega_0 = \frac{c}{R_0}$ avec $c = \sqrt{\frac{3\gamma P_0}{\rho_0}}$.

I.7. On a vu que $p_a(t) = -\frac{3\gamma P_0}{R_0} r_1(t)$, qu'on peut recopier sous la forme $p_a(t) = -\rho_0 R_0 \omega_0^2 r_1(t)$.

I.8. On a ici $c = \sqrt{\frac{3\gamma P_0}{\rho_0}} \simeq 20,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. La vitesse du son dans l'air s'écrit $c_s = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_{\text{air}}}} \simeq 300 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;

on en déduit la longueur d'onde λ des ondes acoustiques du pulsation ω_0 à l'intérieur de la bulle d'air, $\lambda =$

$2\pi c_s/\omega_0$ qui vérifie donc $\frac{\lambda}{R_0} = 2\pi \frac{c_s}{c} \gg 1$: la bulle est beaucoup trop petite pour avoir besoin de tenir compte des variations spatiales de pression qui accompagneraient la propagation d'ondes acoustiques dans l'air. Numériquement, $\frac{\omega_0}{2\pi} \simeq 3,3 \text{ kHz}$ pour $R_0 = 1,0 \text{ mm}$: c'est une fréquence audible, plutôt aiguë.

II : Oscillations forcées

II.1. L'eau est ici décrite comme un fluide parfait régi par l'équation d'Euler (écrite en négligeant la gravité), $\rho_0 \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla p$, avec $p = P_0 + p_1(r, t)$; le terme $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = v_1 \frac{\partial v_1}{\partial r}$ est ici du second ordre par rapport à v_1 et on le néglige. La projection radiale de l'équation d'Euler fournit bien $\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial r}$.

II.2. L'évolution incompressible de l'eau impose toujours $v_1(r, t) = \dot{r}_1 \frac{R_0^2}{r^2}$ donc aussi l'équation $\frac{dv_1}{dt} = \ddot{r}_1 \frac{R_0^2}{r^2}$ donc $\frac{\partial p_1}{\partial r} = -\rho_0 \ddot{r}_1 \frac{R_0^2}{r^2}$ qui s'intègre (relativement à r) sous la forme $p_1(r, t) = \rho_0 \ddot{r}_1 \frac{R_0^2}{r} + C(t)$ où $C(t)$ est une constante d'intégration. Comme la surpression p_1 a pour limite $p_e(t)$ si $r \rightarrow \infty$, on en déduit $C(t) = p_e(t)$ donc finalement $p_1(r, t) = p_e(t) + \rho_0 \ddot{r}_1(t) \frac{R_0^2}{r}$.

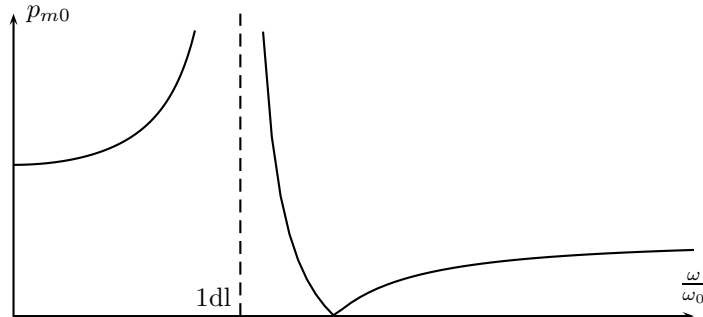
II.3. On en déduit $p_1(R_0, t) = p_e(t) + \rho_0 R_0 \ddot{r}_1(t)$; comme par ailleurs $p_a(t) = -\rho_0 R_0 \omega_0^2 r_1(t)$, on écrit $p_1(R_0, t) = p_a(t)$ par continuité de la pression, qui fournit $\ddot{r}_1 + \omega_0^2 r_1 = -\frac{p_e(t)}{\rho_0 R_0}$ qui décrit bien des évolutions libres de pulsation ω_0 si $p_e = 0$.

II.4. En régime sinusoïdal, on cherche $r_1 = r_{10} \cos(\omega t + \varphi)$ en notations complexes en résolvant l'équation $r_{10} \exp(i\varphi) (\omega_0^2 - \omega^2) = -\frac{p_{e0}}{\rho_0 R_0}$. L'amplitude des oscillations est donc $r_{10} = \frac{p_{e0}}{\rho_0 R_0} \frac{1}{|\omega_0^2 - \omega^2|}$ et le déphasage φ peut être pris nul si $\omega > \omega_0$ et égale à $\pm\pi$ si $\omega < \omega_0$.

II.5. On a ici $p_m(t) = p_1(d, t) = p_e(t) + \rho_0 \ddot{r}_1 \frac{R_0^2}{d}$ avec $r_1 = -\frac{p_{e0}}{\rho_0 R_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega t)$ donc aussi $\ddot{r}_1 = -\omega^2 r_1$; finalement, $p_m(t) = p_{e0} \cos(\omega t) \left[1 + \frac{R_0}{d} \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \right]$.

II.6. On en déduit immédiatement $p_{m0} = p_{e0} \left| 1 + \frac{R_0}{d} \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \right|$.

II.7. Dans le cas proposé, $p_{m0} = \frac{p_{e0}}{2} \left| \frac{2\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \right|$ dont le tracé est homographique avec une résonance (infinie ici) pour $\omega \rightarrow \omega_0$ et une annulation pour $\omega \rightarrow \sqrt{2}\omega_0$.



II.8. En l'absence de ce dispositif, sous l'action des résultantes des forces de pesanteur et du gradient de la pression moyenne (poussée d'Archimède), la bulle remontera à la surface.

III : Modélisation de l'amortissement

III.1. On utilise la forme linéarisée des équations d'Euler, $\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v} \right] = -\vec{\text{grad}} p$ qui devient $\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\vec{\text{grad}} p_1$, et de l'équation de continuité $\text{div}(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ qui devient $\rho_0 \text{div} \vec{v}_1 + \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial p_1}{\partial t} = 0$. On élimine alors la vitesse en écrivant $\text{div} \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \Delta p_1 = -\frac{1}{\rho_0 c_s^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}$ donc $\Delta p_1 = \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}$ qui est l'équation de d'Alembert demandée.

III.2. La forme proposée par l'énoncé vérifie $\Delta p_1 = -\frac{1}{c_s^2 r} [-\phi'' + \psi'']$ tandis que $\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = \frac{\phi'' - \psi''}{r}$; cette solution (somme de deux ondes sphériques respectivement divergente et convergente) est bien solution de l'équation de d'Alembert.

III.3. On ne considère ici que l'onde se propageant dans le sens des r croissants à la vitesse c_s , en l'absence de tout dispositif réfléchissant : l'onde acoustique dans l'eau est créée par les oscillations de la bulle, et s'en éloigne. Finalement, $\psi = 0$

III.4. Il suffit d'écrire l'équation d'Euler en $r = R$: $\vec{v}_1 = \dot{r}_1 \vec{e}_r$ et $\vec{\text{grad}} p = \frac{\partial p_1}{\partial r} \Big|_{r=R_0}$ en ce point donc on a bien

$$\rho_0 \ddot{r}_1(t) = - \left(\frac{\partial p_1(r, t)}{\partial r} \right)_{r=R_0}.$$

III.5. On a immédiatement $\frac{\partial p_1(r, t)}{\partial r} = -\frac{\phi}{r^2} - \frac{\phi'}{rc_s}$ donc en $r = R_0$, $-\left(\frac{\partial p_1(r, t)}{\partial r} \right)_{r=R_0} = \frac{\phi(t)}{R_0^2} + \frac{\dot{\phi}(t)}{R_0 c_s}$.

III.6. En $r = R_0$, la continuité de la pression impose $p_a(t) = \frac{\phi(t)}{R_0}$ donc $\phi(t) = R_0 p_a(t)$ qui s'écrit aussi $\phi(t) = -\rho_0 R_0^2 \omega_0^2 r_1(t)$.

III.7. Compte tenu de **III.5** et **III.6**, l'équation établie en **III.4** s'écrit $\rho_0 \ddot{r}_1 = -\rho_0 R_0^2 \omega_0^2 \left[\frac{r_1(t)}{R_0^2} + \frac{\dot{r}_1}{R_0 c_s} \right]$ qu'on écrira sous la forme $\ddot{r}_1 + \frac{\omega_0}{Q} \dot{r}_1 + \omega_0^2 r_1 = 0$ avec $Q = \frac{c_s}{R_0 \omega_0}$ soit $Q = \frac{c_s}{c}$. Numériquement, $Q = 73$.

III.8. L'incompressibilité se traduit par $c_s \rightarrow \infty$ (puisque $c_s = 1/\sqrt{\rho_0 \chi}$) donc $Q \rightarrow \infty$: on retrouve ici l'équation des oscillations non amorties établie plus haut.

III.9. La vibration de la bulle est la cause d'une onde acoustique se propageant dans l'eau à partir de la bulle d'air ; cette onde entraîne la propagation d'une certaine puissance acoustique dans l'eau, et il n'y a plus conservation de l'énergie lors des oscillations de la bulle.

IV : Étude expérimentale des oscillations forcées

IV.1. L'onde plane est solution de l'équation de d'Alembert donc $\omega = c_s \|\vec{k}\|$.

IV.2. L'équation de d'Alembert est linéaire et la solution proposée est solution de l'équation de d'Alembert, comme combinaison linéaire d'une onde plane et d'une onde sphérique, toutes deux solutions de la même équation.

IV.3. La question **III.4** est inchangée puisqu'elle ne dépend pas de l'expression de p_1 mais seulement de l'écriture de l'équation d'Euler à la surface de la bulle. La question **III.5** est également inchangée puisque l'hypothèse $\|\vec{k}\| R_0 \ll 1$ consiste justement à négliger le gradient de l'onde plane, en particulier devant celui de l'onde sphérique. La continuité de la pression en $r = R_0$ s'écrit maintenant $p_a(t) = \frac{\phi(t)}{R_0} + p_{e0} \cos(\omega t)$. On peut

donc maintenant recopier l'équation $p_a(t) = -\rho_0 R_0 \omega_0^2 r_1(t)$ sous la forme $\rho_0 R_0 \omega_0^2 r_1(t) + \frac{\phi(t)}{R_0} + p_{e0} \cos(\omega t) = 0$

tandis que l'équation d'Euler fournit $\frac{\phi(t)}{R_0^2} + \frac{\dot{\phi}(t)}{R_0 c_s} = \rho_0 \ddot{r}_1$ qu'on écrit ici $R_0^2 \rho_0 \ddot{r}_1(t) = \phi(t) + \frac{\dot{\phi}(t)}{\omega_0 Q}$.

IV.4. En notation complexes, le système prend la forme linéaire $\begin{cases} \rho_0 R_0 \omega_0^2 \bar{r}_1 + \frac{\bar{\phi}}{R_0} = -p_{e0} \\ -\omega^2 R_0^2 \rho_0 \bar{r}_1 = \bar{\phi} \left[1 + \frac{i\omega}{\omega_0 Q} \right] \end{cases}$ d'où on déduit

les amplitudes complexes demandées, $\bar{r}_1 = -\frac{p_{e0}}{\rho_0 R_0} \frac{1 + i \frac{\omega}{\omega_0 Q}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i \frac{\omega \omega_0}{Q}}$ et $\bar{\phi} = R_0 p_{e0} \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i \frac{\omega \omega_0}{Q}}$.

IV.5. Tant que $kd \ll 1$, on peut écrire $p_m(t) = p_{e0} \cos(\omega t) + \frac{1}{d} \phi(t - \frac{d-R_0}{c_s})$ soit, en notations complexes,

$$\underline{p}_m = p_{e0} \left(1 + \frac{R_0}{d} \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i \frac{\omega \omega_0}{Q}} \exp \left(-i \frac{\omega}{c_s} (d - R_0) \right) \right). \text{ Si l'eau est considérée comme un liquide d'incompressible, } Q \rightarrow \infty \text{ et } c_s \rightarrow \infty \text{ donc on retrouve bien } \underline{p}_m = p_{e0} \left(1 + \frac{R_0}{d} \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \text{ comme ci-dessus.}$$

IV.6. Il y a résonance pour $f_0 = 990$ Hz donc $\omega_0 = 2\pi f_0 = 6,2 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. On lit sur le diagramme les fréquences de coupure à -3 dB donc pour une surpression divisée par $\sqrt{2}$ par rapport au maximum ; de $f_- = 975$ Hz et $f_+ = 1010$ Hz on tire $\Delta f = 35$ Hz et $Q = \frac{f_0}{\Delta f} = 28$. On lit enfin p_{e0} pour $\omega \rightarrow 0$ d'où

l'amplitude à la résonance qui vérifie $\frac{p_{\max}}{p_{e0}} = |1 - iQ \frac{R_0}{d}| = 4,0$ donc $Q \frac{R_0}{d} = \sqrt{15}$ ou enfin $\frac{d}{R_0} = \frac{Q}{\sqrt{15}} = 7,3$.

IV.7. $R_0 = \frac{c}{\omega_0} = 3,3 \text{ mm}$. On doit donc vérifier $R_0 \ll \lambda$ où $\lambda = c_s / f_0 = 1,5 \text{ m}$: l'hypothèse $\lambda \gg R_0$ est vérifiée.

IV.8. Le facteur de qualité plus faible montre la présence d'autres phénomènes dissipatifs, en plus de ceux pris en compte ici ; on peut en particulier penser à la viscosité de l'eau.

IV.9. La réversibilité des oscillations est limitée par les phénomènes dissipatifs, comme la viscosité déjà citée. Les oscillations seront donc amorties plus rapidement. On peut éventuellement aussi discuter l'hypothèse adiabatique.

IV.10. On a ici encore excitation d'un système oscillant à la fréquence de l'onde excitatrice, mais ce système n'est pas dipolaire, donc l'onde diffusée l'est de manière isotrope.