

CONCOURS D'ADMISSION 2012 - COMPOSITION DE PHYSIQUE - B (XELC)

ETUDE DE QUELQUES PHÉNOMÈNES NON LINÉAIRES DANS LES MILIEUX DIÉLECTRIQUES

Corrigé proposé par P. PIQUEMAL et R. SKRZYPEK

I Un modèle de susceptibilité électronique en réponse linéaire

- I.1. (a) La force $\vec{F}$ est la force exercée par le noyau supposé fixe en O sur une boule chargée uniformément modélisant le nuage électronique dont le centre est repéré par $\vec{r}$. Elle est l'opposée de la force exercée par le nuage sur le noyau.

- On utilise la symétrie sphérique du nuage électronique et ses invariances pour écrire que le champ créé est de la forme $\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$.
- On applique ensuite le théorème de Gauss. En particulier pour $r \leq a$: $E(r)4\pi r^2 = \frac{\rho 4\pi r^3}{3\epsilon_0}$ d'où $\vec{E}(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{r}$ avec $\rho = \frac{-3e}{4\pi a^3}$.
- Le noyau est situé en $-\vec{r}$ donc $-\vec{F} = e\frac{\rho}{3\epsilon_0}(-\vec{r})$ d'où $\boxed{\vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} \vec{r} = -m_e \omega_0^2 \vec{r}}$

(b) $\boxed{\omega_0^2 = \frac{e^2}{m_e 4\pi\epsilon_0 a^3}}$

Une longueur caractéristique de l'échelle atomique est l'angström : $a \approx 10^{-10} \text{ m}$. On calcule alors $\omega_0 \approx 1,6 \times 10^{16} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

(c) $\vec{F} = -\text{grad } W_2(r)$ d'où $\boxed{W_2(r) = \frac{m_e \omega_0^2 r^2}{2}}$ en choisissant la constante nulle.

(d) ω_0 est la pulsation propre du système en l'absence de l'onde électromagnétique.

- I.2. (a) Le nuage électronique étant une boule homogène, le torseur des actions électromagnétiques s'exerçant sur lui se réduit à un glisseur passant par son barycentre dit *force de Lorentz* : $\vec{F}_{EM} = -e \left[\vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{v} \wedge \vec{B}(\vec{r}, t) \right]$ où $\vec{v}$ désigne la vitesse du barycentre par rapport au référentiel d'étude lié au noyau.

Hypothèses :

- les électrons sont non relativistes $v \ll c$, on peut négliger la composante magnétique de la force de Lorentz devant la composante électrique pour l'onde électromagnétique ;
- $r \ll a \ll \lambda$, le champ électrique peut être considéré uniforme au cours du déplacement du nuage électronique.

(b) $\boxed{\vec{F}_{EM} = -e\vec{E}(0, t) = -eE_0 \cos \omega t \vec{u}_y}$

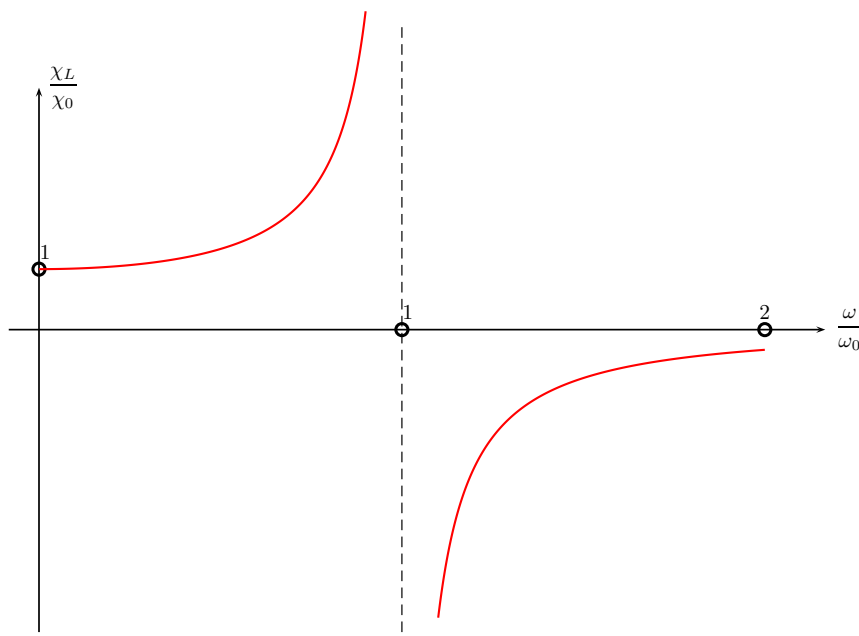
- I.3. (a) En régime sinusoïdal forcé, la solution de l'équation (2) est de la forme $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 \cos(\omega t + \varphi)$. En reportant cette forme dans l'équation (2), on obtient $-m_e \omega^2 \vec{r} = -eE_0 \cos \omega t \vec{u}_y - m_e \omega_0^2 \vec{r}$.

$$\boxed{\vec{r}(t) = \frac{-e}{m_e(\omega_0^2 - \omega^2)} \underbrace{E_0 \cos \omega t \vec{u}_y}_{\vec{E}(O, t)}}$$

(b) $\vec{P} = N\vec{p} = N(-e\vec{r})$ d'où $\boxed{\vec{P} = \frac{Ne^2}{m_e(\omega_0^2 - \omega^2)} \underbrace{E_0 \cos \omega t \vec{u}_y}_{\vec{E}(O, t)}}$

(c) $\vec{P}(O, t) = \epsilon_0 \chi_L \vec{E}(O, t)$ donc $\boxed{\chi_L = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{\chi_0}{1 - \omega^2/\omega_0^2}}$

L'esquisse de la fonction $\frac{\omega}{\omega_0} \rightarrow \frac{\chi_L}{\chi_0}$ est la suivante :



Analyse :

- Aux basses fréquences ($\omega \ll \omega_0$), $\chi_L \approx \chi_0$: on retrouve un résultat similaire à celui du régime statique (régime *quasi-statique*). La réponse du milieu à l'excitation est linéaire et indépendante de la fréquence ; excitation et réponse sont en phase.
- Aux hautes fréquences ($\omega \gg \omega_0$), χ_L tend vers 0. Le milieu n'arrive pas à suivre les variations temporelles de l'excitation.
- On remarque une résonance en ω_0 qui, dans la réalité, est atténuée par les phénomènes dissipatifs négligés dans le modèle.

- (d) $\chi_0 = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} = N4\pi a^3$. Pour un milieu isolant, N est la densité d'entités polarisables donc de l'ordre de la densité volumique du milieu divisée par la masse de l'entité. $N = \rho/m = \rho\mathcal{N}_A/M \simeq 10^{29} \text{ m}^{-3}$ donc $\chi_0 \simeq 1$ ce qui est cohérent avec $\varepsilon_r = 1 + \chi_0$ de l'ordre de quelques unités.

II Effet non linéaire d'ordre deux - Doublement de fréquences

II.A. Ordres de grandeur

II.4. $E^* = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a^2}$ donc $E^* \approx 1,4 \times 10^{11} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$

- II.5. Pour ce laser pulsé, la puissance surfacique vaut $10^{14} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$. Or pour une onde plane progressive dans le vide, la puissance surfacique moyenne vaut $\frac{E^2}{2\mu_0 c}$ d'où $E \approx 3 \times 10^8 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} > 10^{-3} E^*$. Ce laser permet d'observer des effets non linéaires.

II.B. Composantes de la polarisation

- II.6. Un tel potentiel ne permet de modéliser l'interaction noyau-nuage que si on tient compte d'une déformation du nuage lors de son déplacement relatif contrairement à ce qui a été annoncé.

II.7. $m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\vec{\text{grad}} W_3(r) + q\vec{E}(O, t)$

$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -m\omega_0^2 r \vec{u}_y - \frac{3}{2}m\omega_0^2 \alpha \frac{r^2}{L} \vec{u}_y + qE_0 \cos \omega t \vec{u}_y$ puisqu'on limite l'étude au cas où $\vec{r}(t) = r(t)\vec{u}_y$.

II.8. L'équation précédente projetée selon $\vec{u}_y$ s'écrit $m \frac{d^2 r}{dt^2} = -m\omega_0^2 r - \frac{3}{2}m\omega_0^2 \alpha \frac{r^2}{L} + qE_0 \cos \omega t$.

- (a) En se limitant au premier ordre par rapport à α :

- $\frac{d^2 r}{dt^2} = -\omega^2 a_1 \cos(\omega t) - \alpha a_2 (2\omega)^2 \cos(2\omega t)$
- $r^2(t) = a_1^2 \cos^2(\omega t) + 2\alpha a_1 a_0 \cos(\omega t) + 2\alpha a_1 a_2 \cos(\omega t) \cos(2\omega t) + o(\alpha)$

Ainsi, en reportant dans l'équation précédente et en se limitant aux termes du premier ordre en α , il vient :

$$\underbrace{-m\omega^2 a_1 \cos(\omega t) - m(2\omega)^2 \alpha a_2 \cos(2\omega t)}_{m \frac{d^2 r}{dt^2}} = \underbrace{-m\omega_0^2 (a_1 \cos(\omega t) + \alpha a_0 + \alpha a_2 \cos(2\omega t))}_{-m\omega_0^2 r} - \underbrace{m \frac{3}{2} \alpha \frac{\omega_0^2}{L} a_1^2 \cos^2(\omega t) + qE_0 \cos(\omega t)}_{m \frac{3}{2} \alpha \frac{\omega_0^2}{L} r^2}$$

- (b) ■ A l'ordre zéro en α , $-m\omega^2 a_1 \cos \omega t = -m\omega_0^2 a_1 \cos \omega t + qE_0 \cos \omega t$ donc $a_1 = \frac{qE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$.

■ Au premier ordre en α et en tenant compte de la relation ci-dessus :

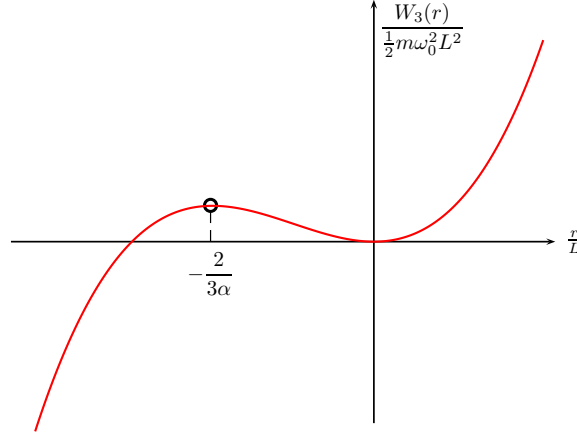
Pour tout t , $-m(2\omega)^2 \alpha a_2 \cos 2\omega t = -m\omega_0^2 (\alpha a_0 + \alpha a_2 \cos 2\omega t) - \frac{3}{2L} m\omega_0^2 \alpha (a_1 \cos \omega t)^2$

Soit pour tout t , $-m(2\omega)^2 \alpha a_2 \cos 2\omega t = -m\omega_0^2 \alpha a_0 - m\omega_0^2 \alpha a_2 \cos 2\omega t - \frac{3}{4L} m\omega_0^2 \alpha a_1^2 (1 + \cos 2\omega t)$.

Comme le système $\{1, \cos(2\omega t)\}$ est réputé libre, on peut identifier et obtenir :

$$a_0 = -\frac{3a_1^2}{4L} \text{ et } a_2 = \frac{3a_1^2 \omega_0^2}{4L(4\omega^2 - \omega_0^2)}.$$

- (c) $a_0 < 0$ est cohérent avec la forme du potentiel $W_3(r)$ qui présente un maximum relatif en $r = a_0 = -\frac{2L}{3\alpha}$.



- (d) $\vec{P} = Nq\vec{r}$ d'où $P(t) = Nqa_1 \cos \omega t + Nq\alpha a_0 + Nq\alpha a_2 \cos 2\omega t$.

On remplace alors a_0 , a_1 et a_2 par leurs expressions établies dans la question 8.b :

$$P(t) = \varepsilon_0 \underbrace{\frac{Nq^2}{\omega_0^2 - \omega^2}}_{\chi_L} E_0 \cos(\omega t) - \alpha \frac{3}{4} \frac{Nq^3 E_0^2}{m^2 L (\omega_0^2 - \omega^2)^2} \left\{ 1 + \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - 4\omega^2} \cos(2\omega t) \right\}$$

Qu'on peut aussi écrire ainsi :

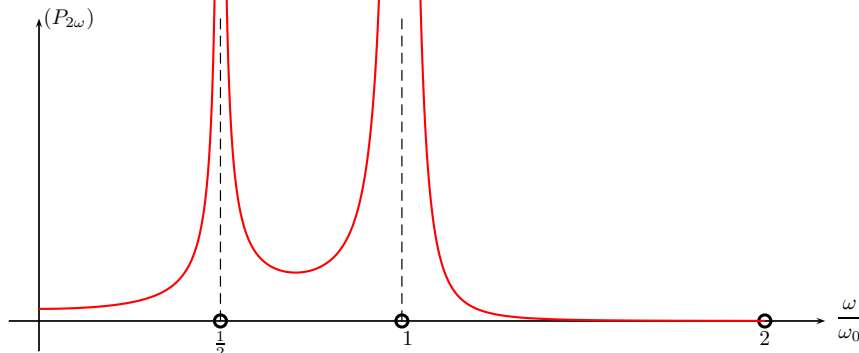
$$P(t) = \varepsilon_0 \underbrace{\frac{Nq^2}{\omega_0^2 - \omega^2}}_{\chi_L} E_0 \cos(\omega t) - \alpha \underbrace{\frac{3}{4} \frac{1}{NqL}}_{P^*} \varepsilon_0^2 \underbrace{\frac{\frac{N^2 q^4}{m^2 \varepsilon_0^2}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}}_{\chi_L^2} E_0^2 \left\{ 1 + \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - 4\omega^2} \cos(2\omega t) \right\}$$

Ainsi $P^* = NqL$ et $H = \frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2 - 4\omega^2)}$.

- (e) L'amplitude $(P_{2\omega})$ relative au terme $\cos(2\omega t)$ est -compte tenu de l'expression (6) de l'énoncé - :

$$(P_{2\omega}) = \left| -\alpha \frac{3(\varepsilon_0 \chi_L E_0)^2}{4P^*} H \right|$$

Compte tenu de la dépendance $\omega \rightarrow \chi_L$ et $\omega \rightarrow H$, $(P_{2\omega}) \propto \left| \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \frac{1}{\omega_0^2 - 4\omega^2} \right|$. L'allure de cette dernière fonction est représentée ci-dessous.



On remarque deux résonances en respectivement $\frac{\omega_0}{2}$ et ω_0 (pulsation de l'onde excitatrice) qui, dans la réalité, sont atténuées par les phénomènes dissipatifs négligés dans le modèle. Chaque résonance génère respectivement des ondes de pulsation $2\omega_0$ (doublement de fréquence) et ω_0 .

- (f) • Si Δ varie peu avec le matériau, la connaissance des effets linéaires donc de $\chi_L(\omega)$ permet d'accéder à $\chi_L(2\omega)$ et donc au comportement non linéaire du matériau quelle que soit sa nature.

- Δ est homogène à l'inverse de $\varepsilon_0 E_0$ car le coefficient χ_L est sans dimension. On s'attend à $\Delta \propto \frac{1}{\varepsilon_0 E^\star}$.
- Nous avons établi à la question 8.e que $(P_{2\omega}) = \alpha \frac{3}{4} \frac{1}{P^\star} \chi_L^2(\omega) |H(\omega)| (\varepsilon_0 E_0)^2$. En remarquant que $|H(\omega)| = \frac{\omega_0^2}{\omega_p^2} \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - 4\omega^2} = \frac{\omega_0^2}{\omega_p^2} \chi_L(2\omega)$, il vient :

$$(P_{2\omega}) = \underbrace{\alpha \frac{3}{4} \frac{\omega_0^2}{P^\star \omega_p^2}}_{=\Delta} \chi_L^2(\omega) \chi_L(2\omega) (\varepsilon_0 E_0)^2$$

- (g) On observera à la sortie un faisceau contenant deux fréquences f et $2f$ donc deux longueurs d'onde 1064 nm et 532 nm car $\lambda = \frac{c}{f}$.

II.C. Intensité de l'onde de fréquence double

- II.9. ■ Le vecteur de Poynting étant défini par $\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$, il faut calculer le champ magnétique $\vec{B}$. Compte tenu de la linéarité des équations de Maxwell, on peut traiter les deux composantes (de pulsations différentes) séparément.

■ Á partir de l'équation de Maxwell-Faraday $\vec{rot} \vec{E}_1 = -\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t}$, on calcule $\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [E_1(x) \cos(\omega t - kx)] \vec{e}_z$ puis $\vec{B}_1 = -\frac{1}{\omega} \frac{\partial}{\partial x} [E_1(x) \sin(\omega t - kx)] \vec{e}_z$ (on élimine le champ statique puisqu'on ne s'intéresse qu'à des solutions ondulatoires).

On calcule alors $\vec{R}_1 = -\frac{E_1(x) \cos(\omega t - kx) \frac{\partial(E_1(x) \sin(\omega t - kx))}{\partial x}}{\mu_0 \omega} \vec{u}_x$ qu'on moyenne sur une période $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\frac{2\pi}{2\omega}$.

$$\langle R_1(x) \rangle = \frac{k E_1^2(x)}{2\mu_0 \omega}$$

- De même pour la composante de fréquence double en remarquant que $\frac{2k}{2\omega} = \frac{k}{\omega}$.

$$\langle R_2(x) \rangle = \frac{k E_2^2(x)}{2\mu_0 \omega}$$

- II.10. ■ Ecrivons la conservation locale de l'énergie électromagnétique :

$$-\frac{\partial(\frac{\varepsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2)}{\partial t} = \text{div} \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} + \vec{j} \cdot \vec{E}$$

Remarquons que :

- $\left\langle \frac{\partial(\frac{\varepsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2)}{\partial t} \right\rangle = 0$
- $\vec{j} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ et $\vec{j} \cdot \vec{E} = \varepsilon_0 \chi_L E \frac{\partial E}{\partial t} + 4\varepsilon_0 D E^2 \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial(\varepsilon_0 \chi_L E^2/2 + 4/3 \varepsilon_0 D E^3)}{\partial t}$ donc $\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = 0$
- $\left\langle \text{div} \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right\rangle = \text{div} \left\langle \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right\rangle = \text{div} \left[\left(\frac{k E_1^2(x)}{2\mu_0 \omega} + \frac{k E_2^2(x)}{2\mu_0 \omega} \right) \vec{u}_x \right] = \frac{d \left(\frac{k E_1^2(x)}{2\mu_0 \omega} + \frac{k E_2^2(x)}{2\mu_0 \omega} \right)}{dx}$

- Ainsi, l'équation locale de conservation de l'énergie électromagnétique, moyennée sur une période, peut s'écrire :

$$\frac{d(E_1^2(x) + E_2^2(x))}{dx} = 0$$

Cette expression est compatible avec le système d'équations (11) car $E_1 \frac{dE_1}{dx} + E_2 \frac{dE_2}{dx} = 0$. On remarque que $E_1^2(x) + E_2^2(x) = E_0^2$ car à l'entrée $x = 0$ seul le signal E_1 est présent.

La dernière équation encadrée est aussi équivalente - compte tenu de la question 9 - à $\frac{d}{dx} [R_1(x) + R_2(x)] = 0$.

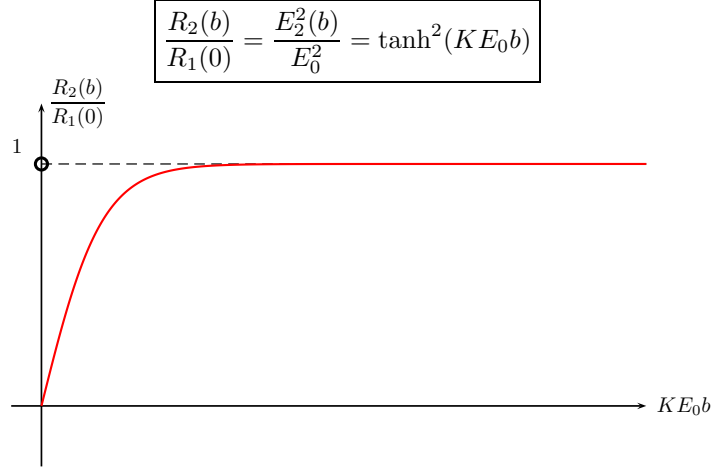
L'équation $\frac{dE_2}{dx} = +K E_1^2$ permet d'établir que $\frac{dR_2}{dx} > 0$ de sorte que $\frac{dR_1}{dx} < 0$: à mesure que l'onde se propage, la

puissance transportée par la composante de pulsation ω (ainsi que son amplitude) diminue tandis que la puissance transportée par la composante de pulsation 2ω augmente (ainsi que son amplitude).

II.11. $\frac{dE_2}{dx} = KE_1^2 = K(E_0^2 - E_2^2)$ donc $\boxed{\frac{dE_2}{dx} + KE_2^2 = KE_0^2}$.

II.12. On intègre $\frac{\frac{dE_2}{dx}}{1 - \frac{E_2^2}{E_0^2}} = KE_0^2$ ce qui mène à $E_2(x) = E_0 \tanh(KE_0x)$ et $\boxed{E_2(b) = E_0 \tanh(KE_0b)}$.

II.13. On obtient directement -compte tenu de la question 9 - :



On remarque que le rapport évolue vers 1 si $KE_0b \gg 1$ donc que seule la fréquence double est présente dans le signal si b est suffisamment grand.

II.14. D'après l'énoncé, $R_1(0) = \frac{10^6}{2 \times (10^{-3})^2} = 0,5 \times 10^{12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$. Comme (cf. question 5), $E_0 = \sqrt{2R_1(0)\mu_0 c}$, on en déduit $E_0 = \sqrt{10^{12} \times 4\pi \times 10^{-7} \times 3,0 \times 10^8} = 1,9 \times 10^7 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$.

On calcule alors $KE_0b = \frac{\omega D}{c\sqrt{\epsilon_r}} E_0b = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{D}{\sqrt{\epsilon_r}} E_0b = \frac{2\pi}{1064 \times 10^{-9}} \frac{5,0 \times 10^{-13}}{\sqrt{2,3}} \times 1,9 \times 10^7 \times 0,5 \times 10^{-2} = 0,189$.

Enfin, $\boxed{\frac{R_2(b)}{R_1(0)} = \tanh(0,189)^2 = 3,5 \times 10^{-2}}$ (on remarquera que sans calculatrice, l'ordre de grandeur est délicat à déterminer).

II.15. La longueur caractéristique n'est autre que $L = (KE_0)^{-1}$. L'hypothèse $\left| \frac{d^2 E_i}{dx^2} \right| \ll k^2 |E_i|$ implique $\frac{|E_i|}{L^2} \ll k^2 |E_i|$ soit $k^2 L^2 \gg 1$. On remplace L par son expression et on obtient la condition équivalente $DE_0 \ll 1$. Comme $DE_0 = 5,0 \times 10^{-13} \times 1,9 \times 10^7 \approx 1 \times 10^{-5} \ll 1$, l'hypothèse associée au système d'équations (11) est satisfaite.

III Effet non linéaire d'ordre trois-Effet Kerr optique

III.A. Effet Kerr

III.16. $m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\vec{\text{grad}} W_4(r) + qE_0 \cos \omega t \vec{u}_y$, soit :

$$\boxed{m \frac{d^2 r}{dt^2} = -m\omega_0^2 r \vec{u}_y + 2m\omega_0^2 \alpha \frac{r^3}{L^2} \vec{u}_y + qE_0 \cos \omega t \vec{u}_y}$$

III.17. Projétons l'équation précédente selon $\vec{u}_y$:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -m\omega_0^2 r + 2m\omega_0^2 \alpha \frac{r^3}{L^2} + qE_0 \cos \omega t$$

(a) En se limitant au premier ordre par rapport à α :

- $\frac{d^2 r}{dt^2} = -\omega^2 a_1 \cos(\omega t) - \omega^2 b_1 \alpha \cos(\omega t) - (3\omega)^2 \alpha b_3 \cos(3\omega t)$
- $r^3(t) = a_1^3 \cos^3(\omega t) + 3a_1^2 \cos^2(\omega t) \alpha [b_1 \cos(\omega t) + b_3 \cos(3\omega t)] + o(\alpha)$

Ainsi, en reportant dans l'équation précédente et en se limitant aux termes du premier ordre en α , il vient :

$$-\omega^2 a_1 \cos(\omega t) - \omega^2 \alpha b_1 \cos(\omega t) - (3\omega)^2 \alpha b_3 \cos(3\omega t) = -\omega_0^2 [a_1 \cos(\omega t) + \alpha b_1 \cos(\omega t) + \alpha b_3 \cos(3\omega t)] + \frac{2\omega_0^2 \alpha}{L^2} a_1^3 \cos^3(\omega t) + \frac{qE_0}{m} \cos \omega t.$$

(b) ■ A l'ordre zéro en α , $-\omega^2 a_1 \cos \omega t = -\omega_0^2 a_1 \cos \omega t + \frac{qE_0}{M} \cos \omega t$ donc $a_1 = \frac{qE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$.

■ Au premier ordre en α et en tenant compte de la relation ci-dessus, on obtient pour tout t :

$$-\omega^2 b_1 \cos(\omega t) - (3\omega)^2 b_3 \cos(3\omega t) = -\omega_0^2 b_1 \cos(\omega t) - \omega_0^2 b_3 \cos(3\omega t) + \frac{2\omega_0^2}{L^2} a_1^3 \cos^3(\omega t)$$

En linéarisant l'équation précédente, il vient pour tout t :

$$-\omega^2 b_1 \cos(\omega t) - (3\omega)^2 b_3 \cos(3\omega t) = -\omega_0^2 b_1 \cos(\omega t) - \omega_0^2 b_3 \cos(3\omega t) + \frac{\omega_0^2}{2L^2} a_1^3 [3 \cos(\omega t) + \cos(3\omega t)]$$

Comme le système $\{\cos(\omega t), \cos(3\omega t)\}$ est réputé libre, on peut identifier et obtenir :

$$b_1 = \frac{3a_1^3}{2L^2} \frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad \text{et} \quad b_3 = \frac{a_1^3}{2L^2} \frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2 - 9\omega^2)}$$

III.18. $P_\omega = Nqr_\omega(t)$ où $r_\omega(t) = a_1 \cos(\omega t) + ab_1 \cos(\omega t)$. Développer les calculs mène bien à l'expression proposée.

III.19. $\left. \begin{array}{l} n^2 = 1 + \chi = 1 + \chi_L (1 + \alpha\beta) \\ n_L^2 = 1 + \chi_L \end{array} \right\} \Rightarrow n^2 = n_L^2 + \chi_L \alpha\beta$ donc $n^2 - n_L^2 = \chi_L \alpha\beta$ soit $(n - n_L) \underbrace{(n + n_L)}_{\approx 2n_L} = \chi_L \alpha\beta$ puis $n_L \delta 2n_L = \chi_L \alpha\beta$.

$$\delta = \frac{\chi_L \alpha\beta}{2n_L^2} = \frac{\chi_L \alpha\beta}{2(1 + \chi_L)}$$

III.20. Dans l'expression de δ , seul le terme β dépend de la variable E_0 et cette dépendance est en E_0^2 . Compte tenu de l'expression de δ , clairement δ est proportionnelle à E_0^2 donc I .

III.21. On peut vérifier la consistance des approximations : $\delta = 2 \times 10^{-20} \times \frac{10^9}{(10^{-3})^2} = 2 \times 10^{-5}$. Compte tenu de la relation démontrée à la question **19**, cela est cohérent avec $|\alpha\beta| \ll 1$ puisque χ_L est de l'ordre de l'unité.

III.B. Autofocalisation d'un faisceau lumineux

III.22. L'ordre de grandeur de la divergence angulaire est donnée par la relation :

$$\theta_D \sim \frac{\frac{\lambda}{n_L}}{2z_0}$$

l'application numérique mène à $\theta_D \sim \frac{\frac{0,7 \times 10^{-6}}{1,5}}{2 \times 10 \times 10^{-6}} = 2,3 \times 10^{-2}$ rad

III.23. La réflexion est totale si $n \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) > n_L$ soit $\cos(\theta) > \frac{n_L}{n}$. Aux petits angles, on obtient $1 - \frac{\theta^2}{2} > \frac{n_L}{n} = \frac{1}{1 + \gamma \frac{E_0^2}{2n_L^2}}$.

En supposant $\gamma \frac{E_0^2}{2n_L^2} \ll 1$ que l'on vérifiera a posteriori, il vient $1 - \frac{\theta^2}{2} > 1 - \gamma \frac{E_0^2}{2n_L^2}$ soit :

$$\theta < \theta_\ell \quad \text{et} \quad \theta_\ell = \frac{\sqrt{\gamma} E_0}{n_L}$$

III.24. La divergence du faisceau est contrebalancée par l'effet Kerr lorsque $\theta_d \sim \theta_\ell$ ce qui se produit lorsque $E_c = \frac{\lambda}{2\sqrt{\gamma} z_0}$.

L'application numérique mène à $E_c = \frac{0,7 \times 10^{-6}}{2\sqrt{10^{-22}} \times 10 \times 10^{-6}}$ soit $E_c = 3,5 \times 10^9 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$. On remarquera que la condition $\gamma \frac{E_c^2}{2n_L^2} \ll 1$ de l'approximation est réalisée.

III.25. Pour $E_0 \sim E_c$, la refocalisation par effet Kerr autorise la propagation du faisceau dans le milieu sans divergence du faisceau. Pour $E_0 > E_c$, le faisceau est focalisé. Pour $E_0 < E_c$, la diffraction l'emporte : le faisceau diverge.

FIN