

Corrigé de l'épreuve de Physique Centrale-Supelec 2013 MP

Francis BROUCHIER

12 mai 2013

I. La bobine de Ruhmkorff : une prouesse technologique du XIXème siècle

I.A –Établissement du courant dans un circuit inductif primaire

I.A.1 Après un régime transitoire du à la présence de l'inductance propre de la bobine, on a un régime en courant continu tel que $i_{1\infty} = e_0/R_1 = 22 \text{ A}$.

A la mise sous tension le circuit se compose de la résistance R_1 en série avec l'inductance L_1 . A l'instant t on peut écrire :

$$e_0 = R_1 i_1(t) + L_1 \frac{di_1}{dt} \quad \frac{L_1}{R_1} \frac{di_1}{dt} + i_1(t) = \frac{e_0}{R_1} = i_{1\infty} \quad \text{posons} \quad \tau_1 = \frac{L_1}{R_1}$$

On obtient une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants avec second membre. La solution de l'équation sans second membre est $i_1(t) = A_1 \exp(-t/\tau_1)$. On ajoute une solution particulière de l'équation avec second membre $i_1 = i_{1\infty}$. La solution générale s'écrit donc $i_1(t) = A \cdot \exp(-t/\tau_1) + i_{1\infty}$ $t=0$ $i_1(t)=0$ $A = -i_{1\infty}$. La solution générale est donc : $i_1(t) = i_{1\infty}(1 - \exp(-t/\tau_1))$

I.A.2 Application numérique : $\tau_1 = L_1/R_1 = 0,83.10^{-3}/0,91 = 0,912 \text{ ms}$.

I.B –Caractéristiques de l'enroulement secondaire

I.B.1 Le volume compris entre r_2 et r'_2 vaut $V = \pi(r'_2{}^2 - r_2^2) \cdot h$. Comme les spires sont jointives et que $d \ll r_2$ on peut admettre que le volume de cuivre est $l \cdot \pi d^2/4$ en négligeant l'espace très faible entre les spires, d'où :

$$l \approx 4(r'_2{}^2 - r_2^2)h/d^2 \quad \text{et} \quad \alpha = 4.$$

I.B.2 Soit s la section du fil, une formule très connue donne la valeur de la résistance $R = l/(\gamma \cdot s)$. Avec $s = \pi \cdot d^2/4$ il vient $l \approx \gamma_{Cu} \cdot R \cdot \pi \cdot d^2/4$

I.B.3 Application numérique. On calcule l avec la formule de la question 1 et on reporte dans l'expression de la question 2. On a ainsi :

$$d^4 = \frac{16}{\pi} \frac{r'_2{}^2 - r_2^2}{\gamma_{Cu} R_2} \cdot h \quad \text{soit} \quad d = 0,301 \text{ mm} \quad l = 40925 \text{ m}$$

On peut parler de prouesse technologique parce qu'à l'époque la fabrication d'un fil de cuivre aussi fin et d'une longueur de plusieurs dizaines de kilomètres était très difficile. Son isolation posait des problèmes et l'enroulement demandait une grande technicité pour éviter de casser le fil. De nos jours un tel fil se trouve facilement pour les primaires de transformateurs sur le secteur. L'auteur du corrigé en a une bobine dans son labo.

I.B.4 Faisons les calculs avec les valeurs efficaces des tensions et intensités. L'intensité efficace du courant est la même dans la résistance R_a et la bobine dont le module de l'impédance vaut $\sqrt{R_2^2 + L^2 \omega^2}$. De la sorte on peut écrire $U_{R_a} = R_a \cdot I_{eff}$ et $U_B = \sqrt{R_2^2 + L^2 \omega^2} \cdot I_{eff}$. Il reste finalement :

$$L = \frac{1}{\omega} \sqrt{U_B^2 \cdot R_a^2 / U_{R_a}^2 - R_2^2} \quad A.N. \quad L_2 = 223,6 \text{ Henry}$$

En travaux pratiques les bobines sont, le plus souvent, sans noyau de fer doux et ont des inductances propres de l'ordre du Henry. La bobine de Ruhmkorff est un gros transformateur élévateur de tension qui nécessite un noyau de fer doux.

I.C –Couplage inductif entre les deux circuits :tension induite lors de la coupure de courant

I.C.1 On reste en régime quelconque dépendant du temps. Le signe de M dépend du sens d'enroulement et du branchement des bobines. Pour ne pas compliquer les calculs on prendra $M > 0$.

$$\boxed{u_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}} \quad \boxed{u_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}}$$

I.C.2 $i_1(t) = i_{1\infty} \exp(-t/\tau_1)$. Comme le circuit 2 est ouvert $i_2 = 0$ et $u_2 = M \cdot di_1/dt = -\sqrt{L_1 \cdot L_2} i_{1\infty} \exp(-t/\tau_1)/\tau_1$. La plus grande valeur de u_2 est atteinte pour $t = 0$, ce qui donne : $\boxed{u_{2max} \approx 10990 \text{ V}}$. Cette valeur est effectivement très élevée.

II. Mécanisme de déclenchement de l'étincelle

II.A – Distribution des particules dans un gaz

II.A.1 On fait l'hypothèse que le gaz de particules est un gaz parfait, dans la mesure où l'on fait des calculs approchés.

a) $p_0 \cdot V_0 = n \cdot R \cdot T_0$ où n est le nombre de moles du gaz. On divise par V_0 pour avoir le nombre de moles par unité de volume et on multiplie par le nombre d'Avogadro pour avoir la nombre de particules par unité de volume, d'où $\boxed{N^* = p_0 N_a / RT_0}$

b) Application numérique : $\boxed{N^* = 2,49 \cdot 10^{25} \text{ particules/m}^3}$

II.A.2 Assimilons les particules à des points matériels au centre d'un cube d'arête d_m . Le volume de ce cube est d_m^3 et dans un mètre cube il y a N^* particules soit $N^* \cdot d_m^3 = 1$ et $\boxed{d_m = 1/\sqrt[3]{N^*} = 3,42 \cdot 10^{-9} \text{ m}}$.

II.B – Effet d'avalanche lors du déplacement d'un électron dans un gaz soumis à un champ électrique

II.B.1 Déplacement d'un électron dans un champ électrique statique et uniforme en l'absence de chocs électron-molécule.

a) A l'instant initial la vitesse est nulle. Pendant son parcours l'électron est soumis à la force électrique en projection sur Oz : $f = -e \cdot E = m_e \cdot dv/dt$ d'où $\boxed{v = -e \cdot E \cdot t / m_e}$.

b) L'énergie cinétique de l'électron a pour expression $\boxed{E_c(t) = m_e \cdot v^2 / 2}$, elle est égale au travail de la force électrique qui est la seule force en jeu dans ce modèle. Comme l'énoncé parle de "distance parcourue" il ne peut s'agir que d'une valeur positive et il faut donc prendre le module de la force électrique : $\boxed{E_c(t) = e \cdot E \cdot l(t)}$.

II.B.2 Champ disruptif d'un gaz.

a) Quand l'énergie cinétique de l'électron atteint l'énergie d'ionisation du gaz, un autre électron peut être éjecté. $E_c = w_{ion} = e \cdot E \cdot l_c$ soit $\boxed{l_c = w_{ion} / (e \cdot E_d) = 3,86 \cdot 10^{-6} \text{ m}}$.

La distance $d_m = 3,42 \cdot 10^{-9} \text{ m}$ elle est très inférieure à l_c . Comme il y a beaucoup de vide entre les particules on peut espérer qu'un certain nombre d'électron pourront atteindre la vitesse désirée.

b) En intégrant l'expression de la vitesse et en ne conservant que le module on obtient $l_c = e \cdot E_d \tau_c^2 / 2 \cdot m_e$ donc $\boxed{\tau_c = \sqrt{2 \cdot m_e \cdot l_c / e \cdot E_d} = 3,48 \cdot 10^{-12} \text{ s}}$.

c) Lorsque la pression diminue, le nombre de particules par unité de volume diminue et la distance moyenne entre les particules augmente. L'électron a donc plus de place pour voir augmenter sa vitesse avant un choc et le champ disruptif peut être plus faible.

II.B.3 Tension disruptive entre deux électrodes : ordre de grandeur.

a) Avec les hypothèses de l'énoncé le champ disruptif a pour valeur $E_d = U_d / D_e$ soit $\boxed{U_d = D_e \cdot U_d}$

b) Le champ disruptif est donné au début de la section **II.B**

$E_d = 3,6 \cdot 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ de la sorte : $\boxed{U_d = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 3,6 \cdot 10^6 = 7,2 \cdot 10^3 \text{ V}}$.

c) Un écran plasma peut être considéré comme un condensateur plan de grande surface et d'épaisseur faible, donc assimilable au modèle de cette section. La distance entre les particules du gaz est inversement proportionnelle à la racine cubique de la pression du gaz. On a vu que le champ E_d diminuait quand cette distance augmentait. Ainsi la tension de claquage est proportionnelle au produit de la racine cubique de la pression du gaz par la distance interélectrodes.

d) La pression de la vapeur de mercure dans le tube est très faible (le mercure est un produit dangereux qui doit être utilisé avec précaution. Ces tubes doivent être recyclés industriellement et non jetés dans la nature). Le champ disruptif est donc faible, ainsi que la tension d'amorçage.

III. Etude expérimentale d'un plasma produit par une étincelle électrique

III.A – Premières observations

III.A.1 Pour $x = 0$ le cylindre joue le rôle d'une lame à faces parallèles et le rayon lumineux le traverse sans déviation.

Pour $x > 0$ la déviation $\theta(x)$ est positive. Dans le cas contraire elle est négative et de même valeur absolue.

$\theta(x)$ semble être une fonction impaire.

III.A.2 Pour obtenir le dessin de l'énoncé le rayon lumineux doit s'éloigner de l'axe du cylindre. Au point d'entrée dans le cylindre la normale à la surface est le rayon du cylindre et le rayon lumineux doit s'éloigner de cette surface. Si on appelle α l'angle d'incidence et β l'angle de réfraction on doit avoir $n_o \sin \alpha = n_p \sin \beta$ avec $\beta > \alpha$ de la sorte $n_p < n_o$.

III.A.3 Sur le graphique l'ordre de grandeur de θ_{max} est de $300 \mu rad$. En inversant la formule de l'énoncé on peut écrire :

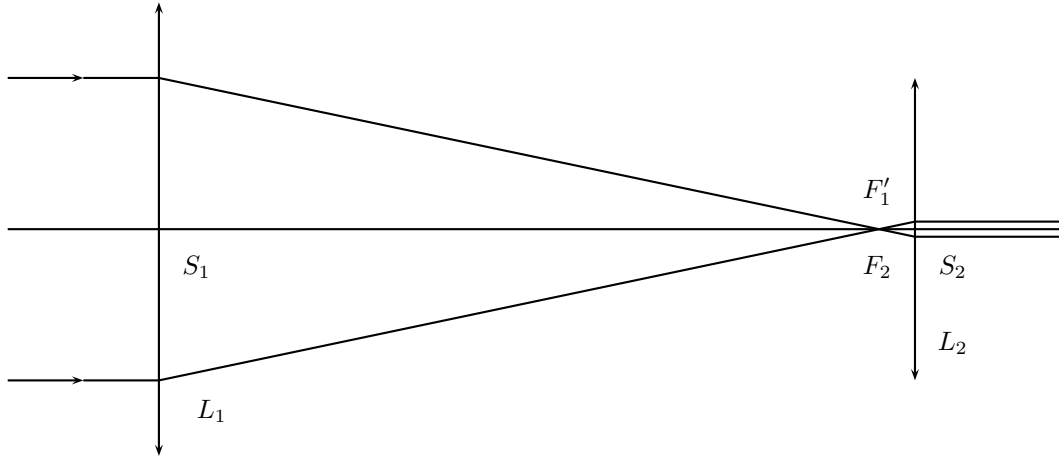
$$\left| \frac{n_0 - n_p}{n_p} \right|_{max} = \theta_{max} \frac{\sqrt{a^2/x^2 - 1}}{2} \quad \left| \frac{n_0 - n_p}{n_0} \right| \approx 8,66.10^{-5}$$

III.A.4 Le nombre de particules ionisées ne s'établit pas instantanément. Mais quand toutes les particules susceptibles de l'être le sont l'indice n_p est stable et l'angle θ ne varie plus.

III.B – Obtention d'un faisceau laser très fin

III.B.1 La précision de l'axe du faisceau laser dépend du diamètre de ce faisceau. Si on prend un faisceau parallèle incident de 2 mm de diamètre, pour un diamètre de faisceau plasmatique de 1 mm la précision est exécrable. Il faut donc réduire le diamètre du faisceau laser.

III.B.2 La longueur du système optique est de 20 cm . Le diamètre du faisceau incident est de 2 mm , celui du faisceau émergent de $0,1 \text{ mm}$. Il est impossible d'utiliser la même échelle pour ces grandeurs. Prenons donc 10 cm pour 20 cm sur l'axe horizontal et 2 cm pour 1 mm sur l'axe vertical.



$$\frac{S_1 F'_1}{F_2 S_2} = \frac{2}{0,1} = 20 \quad S_1 F'_1 = 20 F_2 S_2 \quad S_1 F'_1 = \frac{400}{21} \approx 19 \text{ cm} \quad F_2 S_2 \approx 1 \text{ cm}$$

Il eut été plus simple de prendre $S_1 S_2 = 21 \text{ cm}$ pour avoir des nombres ronds. Les lentilles de 20 cm et de 1 cm de distance focale se trouvent facilement dans le commerce, alors que celles de $19,04 \text{ cm}$ et $0,952 \text{ cm}$ de distance focale sont plus difficiles à trouver.

III.B.3 Le phénomène physique mis en jeu est le phénomène de diffraction. La diffraction à l'infini par une ouverture circulaire de diamètre d correspond à un angle ε par rapport à l'axe qui vaut $1,22\lambda/d$, c'est le résultat que l'on donne habituellement en optique ondulatoire : on le considérera donc comme l'angle d'évasement, sinon il faudra multiplier sa valeur par 2. $\varepsilon \approx 3,86.10^{-4} \text{ rad}$.

Après traversée du montage le diamètre du faisceau est divisé par 20, il en est de même de l'angle ε .

III.C – Détection électronique du déplacement du spot laser

III.C.1 La puissance lumineuse reçue par chaque photodiode est proportionnelle à la surface éclairée. Comme on suppose $\delta \ll R_{spot}$, le côté n°1 voit sa surface réduite de $\delta.R_{spot}$, alors que le côté n°2 la voit augmenter de la même quantité. Les surfaces éclairées sont donc :

$$S_1 = \frac{\pi R_{spot}^2}{2} - 2\delta R_{spot} \quad S_2 = \frac{\pi R_{spot}^2}{2} + 2\delta R_{spot} \quad \boxed{\frac{P_{lum2} - P_{lum1}}{P_{lum2} + P_{lum1}} = \frac{4\delta}{\pi R_{spot}}}$$

III.C.2 La distance δ et l'angle ε sont très petits de sorte que l'on peut écrire $\boxed{\delta \approx D.\varepsilon}$.

III.C.3 Chacun des amplificateurs 1 et 2 fonctionne en transformateur courant-tension. L'entrée + étant à la masse, l'entrée – est à un potentiel virtuel nul. L'anode de la diode étant à un potentiel négatif le courant traversant la diode va de l'entrée – vers ce potentiel négatif. Ainsi le courant traversant la résistance R_1 va de la sortie vers l'entrée – donc $U_s = R.I_N$ d'où :

$$\boxed{U_{s1} = R_1 \beta . P_{lum1}} \quad \boxed{U_{s2} = R_2 \beta . P_{lum2}}$$

III.C.4 l'amplificateur opérationnel n°3 doit fonctionner en amplificateur de différence. On doit donc avoir $R_3 = R_4 = R_5 = R_6$ de sorte que :

$$U_+ = U_{s2}/2 \quad U_- = U_{s2}/2 = (U_{s3} - U_{s1})/2 + U_{s1} \quad \boxed{U_{s3} = U_{s2} - U_{s1}}$$

On peut compliquer les choses en prenant $R_4/R_3 = R_6/R_5$ "pourquoi faire simple quand on peut faire compliqué ?" Pour obtenir $U_{s3} = A.(P_{lum2} - P_{lum1})$ il faut prendre $R_1 = R_2 = R_0$ de sorte que les tensions de sortie soient proportionnelles aux courants d'entrée :

$$\boxed{U_{s3} = \beta R_0 (P_{lum2} - P_{lum1})} \quad \boxed{A = \beta R_0}$$

IV. Propriétés optiques d'un gaz partiellement ionisé

IV.A – Mouvements électroniques dans un plasma

IV.A.1 Dans le cas d'une onde plane électromagnétique dans le vide $E/B = c = 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}$. La valeur du champ électrique est nettement supérieure à celle du champ magnétique. En mécanique classique la vitesse d'un électron est très inférieure à la vitesse de la lumière et la force magnétique $-e\vec{v} \wedge \vec{B}$ est très faible devant $-e.\vec{E}$. Si on veut que la champ électrique ne varie pas trop, il faut que le déplacement de l'électron soit nettement inférieur à la longueur d'onde.

IV.A.2 La force $\vec{F} = -m\vec{v}/\tau_c$ est analogue à une force de frottement fluide. L'équation différentielle de la vitesse est $m.dv/dt = -mv/\tau_c - eE_m \cos \omega t$. Pour que le mouvement soit seulement sinusoïdal, il faut que la force de frottement fluide soit négligeable devant la force électrique soit $m.v/\tau_c \ll eE_m$. On admet généralement que cela est atteint au bout d'un temps de $5\tau_c$.

IV.A.3 Ecrivons la relation fondamentale de la dynamique :

$$m \frac{dv}{dt} = -m\omega V_m \sin(\omega t + \varphi) = -e.E_m \cos(\omega t) \quad \sin(\omega t + \pi/2) = \cos(\omega t) \quad \boxed{\varphi = \frac{\pi}{2}} \quad \boxed{V_m = \frac{e.E_m}{m\omega}}$$

v est en avance sur E .

IV.A.4 Question pas comprise. De quelles expressions s'agit-il ?

IV.A.5 Application numérique : $V_m = e.E_m/m\omega = e.E_m.\lambda/2\pi cm$ soit $\boxed{V_m = 2,35 \text{ m.s}^{-1}}$

La vitesse d'agitation thermique d'une particule vaut $V_{ther}^2 = 3kT/m$ d'où $\boxed{V_{ther} = 2,13.10^6 \text{ m.s}^{-1}}$. La vitesse d'agitation thermique est largement supérieure à la vitesse due au champ électrique. On peut d'ailleurs se poser la question de savoir si la formule de Boltzmann-Maxwell établie dans le cas de particules dures aux chocs parfaitement élastiques peut s'appliquer à un gaz d'électrons se repoussant les uns les autres.

IV.A.6 $v = V_m \cos(\omega t + \pi/2) = V_m \sin(\omega t) = dz/dt \quad z = -V_m.\cos(\omega t)/\omega$. Finalement on a $\boxed{z_m = V_m \lambda / 2\pi c = 7,9.10^{-16} \text{ m}}$. Bien inférieur à λ .

IV.B – Propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma neutre à faible densité

IV.B.1 Les équations de Maxwell dans le vide sont :

$$\boxed{\vec{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad \text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{div}\vec{B} = 0 \quad \vec{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t})}$$

IV.B.2 Pour le plasma neutre $\rho = 0$ soit $\text{div}\vec{E} = 0$. La première équation de Maxwell permet d'écrire en tenant compte de $\varepsilon_0\mu_0c^2 = 1$:

$$\boxed{\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\vec{E}) = -\frac{\partial(\vec{\text{rot}}\vec{B})}{\partial t} = -\mu_0\frac{\partial\vec{j}}{\partial t} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \quad \vec{\Delta}\vec{E} - \frac{\mu_0\gamma_0}{\tau_c}\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

IV.B.3 Dans le cas d'une onde plane, le vecteur d'onde $\vec{k}$ est porté par $\vec{e}_z$ ainsi que $\vec{OM}$. On a donc la suite de calculs :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(j(\omega t - kz)) \quad \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = j\omega\vec{E} \quad \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2\vec{E} \quad \Delta\vec{E} = -k^2\vec{E}$$

En simplifiant il vient : $\boxed{k^2 = \omega^2/c^2 - \mu_0\gamma_0/\tau_c}$ ainsi $\boxed{\omega_p^2 = \mu_0\gamma_0/\tau_c}$

IV.B.4 Raisonnons toujours pour une onde plane, ce qui est le cas du problème. La phase est l'exposant de l'exponentielle $\Phi = \omega t - kz$. La vitesse de phase est la vitesse de déplacement des plans qui ont la même phase, soit tels que $d\Phi = \omega dt - k.dz = 0$ soit $v_\phi = \omega/k$. En exprimant cette quantité à partir de l'expression précédente on trouve $\boxed{v_\phi = \sqrt{k^2c^2 + \omega_p^2}/k}$. Cette vitesse ne correspond à aucun phénomène physique.

En comparant cette vitesse à la célérité de la lumière dans le vide on trouve $\boxed{v_\phi > c}$. Cela n'est pas en contradiction avec la relativité restreinte d'Einstein qui s'applique dans les référentiels galiléens. La célérité de la lumière dans le vide est une vitesse limite qu'aucune particule massique ne peut atteindre. La vitesse de phase n'est pas une vitesse de particule, d'ailleurs il aurait été bon de l'appeler "célérité de phase" comme pour la célérité de la lumière.

En revanche la vitesse de groupe est la vitesse de propagation d'un signal électromagnétique (ensemble d'ondes autour d'une pulsation ω_0 que l'on peut détecter par son module). La transmission d'une information est assimilée à une particule massique. Nous admettrons que la valeur du cours est $\boxed{v_g = d\omega/dk = k^2c^2/\sqrt{k^2c^2 + \omega_p^2} \quad v_g.v_\phi = c^2}$.

La vitesse de groupe est inférieure à la célérité de la lumière dans le vide.

IV.B.5 L'énoncé précise bien "célérité de la lumière dans le plasma", il s'agit donc là de la vitesse de phase et l'indice vaut $\boxed{n_p = k.c/\sqrt{k^2c^2 + \omega_p^2}}$. On voit bien que cette valeur est inférieure à 1. Le plasma n'est pas un milieu transparent "usuel". On retrouve le même phénomène pour un milieu diélectrique transparent traversé par des rayons "X".

Si $\omega \gg \omega_p$ en divisant l'expression de n_p par $k.c$ il reste au dénominateur la racine carrée de $1 + \omega_p^2/k^2c^2$ dont le second terme est très petit devant 1. Avec une formule d'approximation on obtient :

$$\boxed{n_p \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{\mu_0 e^2}{m\omega^2} n^*}$$

IV.B.6 Lors du claquement sec que l'on entend à la mise sous tension il y a création d'une onde sonore due à une variation brusque de la vitesse des particules. Le modèle utilisant une variation continue n'est qu'un modèle simplifié qui peut être amélioré.

mél :francis.brouchier@prepas.org