

Première partie : les atomes froids

I . Modèle de l'électron élastiquement lié

I.A –

$$\text{I.A.1) } \rho(N) = \frac{3e}{4\pi a^3}.$$

$$\text{I.A.2) Pour tout point N de l'espace, } \rho(N) = \rho(r) \Rightarrow V(N) = V(r) \Rightarrow \vec{E}(N) = -\vec{\nabla}_N V(r) = -\frac{dV(r)}{dr} \vec{e}_r = E_r(r) \vec{e}_r.$$

Soit Σ une sphère de centre P de rayon $r < a$. D'après le théorème de Gauss :

$$\oint_{\Sigma} \vec{E}(N) \cdot d\vec{s} = 4\pi r^2 E_r(r) = \frac{Q_{\text{int}\Sigma}}{\epsilon_0} = \frac{\rho 4\pi r^3}{3\epsilon_0} = \frac{er^3}{a^3 \epsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(r \leq a) = \frac{e}{4\pi a^3 \epsilon_0} \vec{r} \cdot \vec{r} = \overrightarrow{PN}.$$

$$\text{I.A.3) } \vec{F}_{p \rightarrow e} = -e\vec{E}(N) = -\frac{e^2}{4\pi a^3 \epsilon_0} \overrightarrow{PN} \text{ . d'après le principe des actions réciproques:}$$

$$\vec{F}_{e \rightarrow p} = -\vec{F}_{p \rightarrow e} = \frac{e^2}{4\pi a^3 \epsilon_0} \overrightarrow{PN}.$$

I.B –

Le système noyau-électron est isolé dans le référentiel galiléen R_g d'étude. Son référentiel barycentrique $R^*(Oxyz)$ relatif à R_g est alors galiléen. En effet, $(m+M) \frac{d\vec{v}(O)}{dt} \Big|_{R_g} = \vec{f}_{\text{ext}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}(O) = \vec{cst}$. R^* est donc en translation rectiligne uniforme par rapport à R_g .

$$\text{I.B.1) Dans } R^*, \text{ le PFD appliqué à l'électron s'écrit : } m \frac{d^2 \overrightarrow{ON}(t)}{dt^2} = \vec{F}_{p \rightarrow e} = -\frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 a^3} \overrightarrow{PN}(t) \quad (1).$$

$$\text{De même, le PFD appliqué au proton dans } R^* \text{ donne : } M \frac{d^2 \overrightarrow{OP}(t)}{dt^2} = \vec{F}_{e \rightarrow p} = \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 a^3} \overrightarrow{PN}(t) \quad (2).$$

$$\text{I.B.2) } (1) \text{ et } (2) \Rightarrow \frac{d^2 \vec{R}(t)}{dt^2} = \frac{d^2 \overrightarrow{OP}(t)}{dt^2} - \frac{d^2 \overrightarrow{ON}(t)}{dt^2} = \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 a^3} \overrightarrow{PN}(t) \text{ .}$$

$$\text{Soit : } \frac{d^2 \vec{R}(t)}{dt^2} = -\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 a^3} \vec{R}(t) = \frac{1}{\mu} \vec{F}_{e \rightarrow p} \quad (3).$$

I.B.3) Dans le référentiel barycentrique, on a $M \overrightarrow{OP} + m \overrightarrow{ON} = \vec{0} \Rightarrow (M+m) \overrightarrow{OP} = m \overrightarrow{NP}$. D'où :

$$\vec{R}_+ = \overrightarrow{OP} = \frac{m}{m+M} \overrightarrow{NP} = \frac{m}{m+M} \vec{R} \text{ et } \vec{R}_- = \overrightarrow{ON} = -\frac{M}{m+M} \overrightarrow{NP} = -\frac{M}{m+M} \vec{R} \quad (4).$$

(3) et (4) montrent que les trajectoires barycentriques de l'électron et du proton sont homothétiques à celle d'une particule fictive A_{fic} , de masse égale à la masse réduite $\mu = \frac{mM}{m+M}$, de position barycentrique égale à la position relative $\overrightarrow{OA_{fic}}(t) = \overrightarrow{NP}(t) = \vec{R}(t)$ en mouvement dans R^* sous l'action de la force :

$$\vec{F}_{e \rightarrow p} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} \vec{R}(t) = -\mu\omega_0^2 \vec{R}(t) \cdot \omega_0 = \left[\frac{m+M}{mM} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} \right]^{1/2}.$$

I.B.4) $M \simeq 1838m \gg m \Rightarrow \mu = \frac{mM}{m+M} \approx m \# 9,1.10^{-31} \text{ kg}.$

La valeur $a \approx 0,1 \text{ nm}$ est du même ordre de grandeur que le rayon de Bohr $a_0 = 0,053 \text{ nm}.$

AN : $\omega_0 \simeq \left[\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \mu a^3} \right]^{1/2} \# 1,59.10^{16} \text{ rad.s}^{-1}; \lambda \# 118 \text{ nm} ; c'$ est un rayonnement du domaine ultraviolet.

I.C – Onde électromagnétique rayonnée par l'atome

I.C.1) $\vec{p} = e\vec{R} = e\vec{OP} - e\vec{ON}$ est le moment dipolaire électrique de l'atome.

I.C.2)

a) $\left[\frac{\mu_0 \ddot{p}}{rc} \right] = \frac{[\mu_0] Q L T^{-2}}{L \times L T^{-1}} = \frac{[\mu_0] Q}{L T} = [B].$ En effet, d'après le théorème d'Ampère,

$[B] L = [\mu_0] [I] = [\mu_0] \frac{Q}{T}.$ L'expression correspond donc au champ magnétique de l'onde rayonnée.

b) $\vec{B} = \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi rc} \ddot{p}(t-r/c) \vec{e}_\theta$ et $\vec{E} = -c\vec{e}_r \times \vec{B} = cB_\theta \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi r} \ddot{p}(t-r/c) \vec{e}_\theta.$

c) $\|\vec{R}\| \ll \lambda \ll r$

- Dans la zone de rayonnement, $r \gg \lambda.$

- $\|\vec{R}\| \ll r$: approximation dipolaire. On peut donc confondre PM et NM à $r = OM$ dans le calcul du potentiel vecteur et du c.e.m rayonnés.

- $\|\vec{R}\| \ll \lambda$: approximation non relativiste ($R_{\max} \ll \lambda = 2\pi c / \omega_0 \Rightarrow v_{\max} = \omega_0 R_{\max} \ll 2\pi c$). L'onde est uniforme à l'échelle atomique.

I.C.3) $\vec{\pi} = \vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{E} \times \left(\frac{\vec{e}_r}{\mu_0 c} \times \vec{E} \right) = \frac{\vec{E}^2}{\mu_0 c} \vec{e}_r = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \ddot{p}^2(t-r/c) \vec{e}_r = \frac{\mu_0 e^2}{16\pi^2 c} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \ddot{x}^2(t-r/c) \vec{e}_r.$

$\langle \vec{\pi} \rangle = \frac{\mu_0 e^2}{16\pi^2 c} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \langle \ddot{x}^2 \rangle \vec{e}_r.$

I.C.4) $\langle P \rangle = \iint_{\Sigma} \langle \vec{\pi} \rangle \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 e^2}{16\pi^2 c} \frac{\langle \ddot{x}^2 \rangle}{r^2} \iint_{\Sigma} \sin^2 \theta r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{\mu_0 e^2}{16\pi^2 c} \langle \ddot{x}^2 \rangle \times 2\pi \times \frac{4}{3} = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c} \langle \ddot{x}^2 \rangle = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \langle \ddot{x}^2 \rangle.$

I.D – Amortissement des oscillations par rayonnement

I.D.1) $\langle P \rangle = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \langle \ddot{x}^2 \rangle = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \langle \ddot{x} \cdot \dot{x} \rangle = \langle F\dot{x} \rangle \Rightarrow F = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{x}.$

$$\text{I.D.2)} \frac{d^2 \vec{R}(t)}{dt^2} + \omega_0^2 \vec{R}(t) = \frac{1}{\mu} \vec{F} \Rightarrow -\frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 \mu c^3} \ddot{x} + \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (5).$$

$$\text{I.D.3)} \text{ a- En notation complexe } \underline{x}(t) = \underline{x}_0 e^{i\omega t}; (5) \Rightarrow \frac{i\omega^3 e^2}{6\pi\epsilon_0 \mu c^3} - \omega^2 + \omega_0^2 = 0.$$

$$\frac{i\omega^3 e^2}{6\pi\epsilon_0 \mu c^3} - \omega^2 + \omega_0^2 = \frac{ie^2}{6\pi\epsilon_0 \mu c^3} (\omega_0 + \delta\omega)^3 - 2\omega_0 \delta\omega + \delta\omega^2 \approx \frac{ie^2 \omega_0^3}{6\pi\epsilon_0 \mu c^3} - 2\omega_0 \delta\omega = 0 \Rightarrow \delta\omega \approx \frac{ie^2 \omega_0^2}{12\pi\epsilon_0 \mu c^3}.$$

$$\text{b- } \underline{x}(t) = \underline{x}_0 \exp(i(\delta\omega + \omega_0)t) = \underline{x}_0 \exp\left(-\frac{e^2 \omega_0^2}{12\pi\epsilon_0 \mu c^3} t\right) \exp(i\omega_0 t) = \underline{x}_0 \exp\left(-\frac{\Gamma}{2} t\right) \exp(i\omega_0 t). \text{ Où}$$

$$\Gamma = \frac{e^2 \omega_0^2}{6\pi\epsilon_0 \mu c^3}.$$

$$\text{c- AN : } \Gamma \approx 6.10^9 \text{ s}^{-1}.$$

II - Interaction d'un atome avec une onde électromagnétique plane

II.A – Polarisation de l'atome

$$\text{II.A.1)} \frac{\|\vec{f}_m\|}{\|\vec{f}_e\|} = \frac{\|\dot{\vec{R}} \times \vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} < \frac{\|\dot{\vec{R}}\| \|\vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} = \frac{\|\dot{\vec{R}}\|}{c} \ll 1. \text{ L'effet magnétique de l'onde est donc négligeable. De plus dan}$$

l'approximation dipolaire, $k\|\vec{R}\| \ll 1$, le champ électrique est uniforme à l'échelle de l'atome :

$$\vec{E}(M, t) \simeq \vec{E}(O, t) = E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_x.$$

Ainsi le PFD appliqué à la particule fictive dans le référentiel barycentrique s'écrit $\mu \ddot{\vec{R}} = -\omega_0^2 \vec{R} - \mu \Gamma \dot{\vec{R}} + e\vec{E}$.

$$\text{Soit : } \ddot{\vec{R}} + \Gamma \dot{\vec{R}} + \omega_0^2 \vec{R} = \frac{e}{\mu} E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_x.$$

$$\text{II.A.2)} \text{ En régime sinusoïdal forcé, } \vec{R} = \vec{R}_0 \cos(\omega t + \psi). \text{ en notation complexe : } \underline{\vec{R}} = \underline{\vec{R}}_0 \exp i(\omega t + \psi).$$

$$\text{D'après (E) : } (\omega_0^2 - \omega^2 + i\Gamma\omega) \underline{\vec{R}} = \frac{e}{\mu} E_0 \exp i(\omega t) \vec{e}_x \Rightarrow \underline{\vec{R}} = \frac{eE_0}{\mu(\omega_0^2 - \omega^2 + i\Gamma\omega)} e^{i(\omega t)} \vec{e}_x = \underline{\vec{R}}_0 e^{i(\omega t + \psi)}. \text{ d'où :}$$

$$\underline{\vec{R}}_0 = \frac{eE_0}{\mu \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}} \vec{e}_x \text{ et } \psi = \text{Arg}(\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega). \text{ Ainsi :}$$

$$\vec{p} = e\vec{R} = e\vec{R}_0 \cos(\omega t + \psi) = \frac{e}{\mu \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}} E_0 \cos(\omega t + \psi) \vec{e}_x = \alpha(\omega) E_0 \cos(\omega t + \psi) \vec{e}_x. \text{ avec :}$$

$$\alpha(\omega) = \frac{e}{\mu \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}} \text{ et } \sin(\psi) = -\frac{\Gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}}.$$

On a bien pour $\Delta = \omega - \omega_0 / |\Delta| \ll \omega_0$:

$$\alpha(\omega) = \frac{e}{\mu \sqrt{((\omega_0 - \omega)^2 (\omega_0 + \omega)^2 + \Gamma^2 \omega^2)}} \approx \frac{e}{\mu \sqrt{4\omega_0^2 (\omega_0 - \omega)^2 + \Gamma^2 \omega_0^2}} = \frac{e}{\mu \omega_0} \frac{1}{\sqrt{\Gamma^2 + 4\Delta^2}}$$

$$\text{et } \sin(\psi) = -\frac{\Gamma \omega}{\sqrt{((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2)}} \approx -\frac{\Gamma \omega}{\omega_0} \frac{1}{\sqrt{\Gamma^2 + 4\Delta^2}} \approx -\frac{\Gamma}{\sqrt{\Gamma^2 + 4\Delta^2}}.$$

II.B – Force de pression de radiation

II.B.1) $\vec{F}_{rad} = e\vec{E}(O, t) - e\vec{E}(N, t) + e\dot{\vec{R}}_+ \times \vec{B}(O, t) - e\dot{\vec{R}}_- \times \vec{B}(N, t)$. Or : $\vec{E}(O, t) \approx \vec{E}(N, t) = \vec{E}(t)$ et $\dot{\vec{R}}_+ = \vec{0}$.

Donc : $\vec{F}_{rad} = -e\dot{\vec{R}}_- \times \vec{B}(t)$. D'après ce qui précède : $\vec{R}_- = \overrightarrow{ON} - \frac{M}{m+M} \vec{R} \approx -\vec{R}$. D'où : $\vec{F}_{rad} = e\dot{\vec{R}} \times \vec{B} = \vec{p} \times \vec{B}$.

$$\begin{aligned} \text{II.B.2) } \vec{F}_{rad} &= \vec{p} \times \vec{B} = -\alpha(\omega) E_0 \sin(\omega t + \psi) \vec{e}_x \times \frac{E_0}{c} \cos(\omega t) \vec{e}_y = -\alpha(\omega) \frac{E_0^2}{c} \sin(\omega t + \psi) \cos(\omega t) \vec{e}_z \\ &= -\alpha(\omega) \frac{E_0^2}{2c} [\sin(2\omega t + \psi) + \sin(\psi)] \vec{e}_z. \end{aligned}$$

$$\text{En moyenne : } \langle \vec{F}_{rad} \rangle = -\alpha(\omega) \frac{E_0^2}{2c} \sin(\psi) \vec{e}_z = -\alpha(\omega) \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2\epsilon_0 k c^2} \sin(\psi) k \vec{e}_z = -\alpha(\omega) \frac{I}{2\epsilon_0 c^2 k} \sin(\psi) \vec{k}.$$

II.B.3) a) Au voisinage de la résonance : $k \approx \frac{\omega_0}{c}$ et

$$\langle \vec{F}_{rad} \rangle \approx \frac{I}{\epsilon_0 c^2 k} \frac{e}{\mu \omega_0} \frac{1}{\sqrt{\Gamma^2 + 4\Delta^2}} \frac{\Gamma}{\sqrt{\Gamma^2 + 4\Delta^2}} \vec{k} = \frac{I}{\hbar \epsilon_0 c} \frac{e}{\mu \omega_0^2 \Gamma^2} \left[\frac{\Gamma}{1 + 4\Delta^2 / \Gamma^2} \right] \hbar \vec{k} = \frac{I}{I_s} \left[\frac{\Gamma}{1 + 4\Delta^2 / \Gamma^2} \right] \hbar \vec{k}.$$

$$\text{Où : } I_s = \frac{\hbar \epsilon_0 c \mu}{e} \omega_0^2 \Gamma^2.$$

b) $\|\langle \vec{F}_{rad} \rangle\|$ est maximale pour $\Delta = 0$: à la résonance.

III Ralentissement Doppler des atomes

III.A – Force exercée par deux ondes sur un atome en mouvement.

III.A.1) $\omega_{(+)}' = \omega - kv(t)$ et $\omega_{(-)}' = \omega + kv(t)$.

III.A.2) Analyse qualitative

on a : $\Delta_{(+)}' = \omega_{(+)}' - \omega_0 = \omega - \omega_0 - kv(t) = \Delta - kv(t)$ et $\Delta_{(-)}' = \omega_{(-)}' - \omega_0 = \omega - \omega_0 + kv(t) = \Delta + kv(t)$. D'où : $|\Delta_{(+)}'| = -\Delta + kv(t) > |\Delta_{(-)}'|$. C/C : $\omega_{(-)}'$ se rapproche plus de ω_0 que $\omega_{(+)}'$.

- D'après II.B.3, la force de pression de radiation est d'autant plus intense que la pulsation apparente est proche de la pulsation de résonance. L'onde de vecteur d'onde $-\vec{k}$ se propageant dans le sens des z décroissants agira avec plus d'intensité sur l'atome.
- $\vec{f} \cdot \vec{v} = \left[\langle \vec{F}_{rad} \rangle_{(+)} + \langle \vec{F}_{rad} \rangle_{(-)} \right] \cdot \vec{v} = \left[\frac{1}{1 + 4\Delta_{(+)}^2 / \Gamma^2} - \frac{1}{1 + 4\Delta_{(-)}^2 / \Gamma^2} \right] \frac{I}{I_s} \hbar \vec{k} \cdot \vec{v} < 0$: l'atome est ralenti.
- Au cas où $v(t) < 0$, $|\Delta_{(-)}'| = -(\Delta + kv(t)) > |\Delta_{(+)}'|$: L'onde de vecteur d'onde $\vec{k}$ se propageant dans le sens des z croissants agira avec plus d'intensité sur l'atome. La force de pression de radiation résultante est de même sens que $\vec{k}$ opposé au sens de $\vec{v}$. Donc l'atome sera aussi ralenti.
- Pour $\Delta > 0$ et $v > 0$, $|\Delta_{(-)}'| = \Delta + kv(t) > |\Delta_{(+)}'|$. La force de pression de radiation résultante est de même sens que $\vec{k}$ et $\vec{v}$. L'atome sera donc accéléré.
- C/C : l'atome est ralenti si $\Delta < 0$ accéléré si $\Delta > 0$.

III.A.3) un ralentissement correspond à $\vec{f} \cdot \vec{v} < 0 \Rightarrow \beta < 0$.

$$\beta \Delta = \frac{I}{I_s} \frac{16\Delta^2 / \Gamma}{1 + 4\Delta^2 / \Gamma^2} \frac{\hbar \omega_0^2}{c^2} > 0. \text{ on aura donc ralentissement si } \Delta < 0 : \text{ en accord avec ce qui précède.}$$

$$\text{III.A.4) } \frac{dE_C}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{v} = \beta \vec{v}^2 = \frac{2\beta}{M_{Rb}} E_C = -\frac{E_C}{\tau} \cdot \tau = -\frac{M_{Rb}}{2\beta} = \frac{M_{Rb}}{2|\beta|}.$$

III.B – Ralentissement et refroidissement d'un jet atomique

$$\text{III.B.1) } \langle E_C \rangle = \frac{1}{2} M_{Rb} v_q^2 = \frac{3}{2} k_B T_0 \Rightarrow v_q = \sqrt{\frac{3k_B T_0}{M_{Rb}}}. \text{ AN : } v_q \approx 361 \text{ ms}^{-1}.$$

III.B.2) Ordres de grandeur

$$\text{a) } \langle E_{C \min} \rangle = \frac{1}{2} M_{Rb} v_{q \min}^2 = \frac{3}{2} k_B T_{\min} \Rightarrow T_{\min} = \frac{M_{Rb} v_{q \min}^2}{3k_B} = \frac{\hbar \Gamma}{k_B}. \text{ AN : } T_{\min} \approx 0,028 \text{ K!}. \text{ le gaz d'atomes immobilisés est ultra froid.}$$

$$\text{b) } \tau = \frac{M_{Rb}}{2|\beta|} = \frac{M_{Rb} c^2}{4\hbar \omega_0^2}. \text{ AN : } \tau \approx 5,16 \cdot 10^{-6} \text{ s}. \text{ Les atomes sont instantanément immobilisés.}$$

III.B.3) on envoie des faisceaux laser dans les trois directions :

