

Auteurs : Jean-Baptiste Paire
Jean-Marc Vince

Rayonnement synchrotron

I – Rayonnement d’une particule chargée accélérée

I.A.1) La dépendance du champ en $t - r/c$ est justifiée par la propagation du champ de O à M qui induit un retard temporel de r/c si $r = OM$.

I.A.2) La structure d’onde plane électromagnétique se propageant selon la direction $\vec{e}_r$ dans le vide permet d’écrire que le trièdre $(\vec{e}_r, \vec{E}, \vec{B})$ est direct avec $\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$ ce qu’on peut résumer par l’écriture

$$\vec{B} \wedge \vec{e}_r = \frac{1}{c} \vec{E} \quad \text{ou encore} \quad \vec{E} = -c(\vec{e}_r \wedge \vec{B})$$

soit

$$\boxed{\vec{E}(M, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \vec{e}_r \wedge \left(\vec{e}_r \wedge \vec{a}(t - r/c) \right)}$$

I.B - On utilise la base des coordonnées sphériques $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ en écrivant $\vec{a}(t - r/c) = a(t - r/c)\vec{e}_z$. En remarquant que $\vec{e}_r \wedge \vec{e}_z = -\sin\theta\vec{e}_\varphi$, on obtient

$$\vec{B}(M, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^3 r} a(t - r/c) \sin\theta \vec{e}_\varphi$$

et avec $\vec{e}_\varphi \wedge \vec{e}_r = \vec{e}_\theta$ et le résultat de la question précédente, on obtient

$$\vec{E}(M, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} a(t - r/c) \sin\theta \vec{e}_\theta$$

On obtient alors le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}(M, t) = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}(M, t) \wedge \vec{B}(M, t)$, dont on simplifie l’expression à l’aide de la relation $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$

$$\boxed{\vec{\Pi}(M, t) = \frac{q^2 \sin^2 \theta}{(4\pi r)^2 \epsilon_0 c^3} a^2(t - r/c) \vec{e}_r}$$

La norme de ce vecteur de Poynting représente la puissance rayonnée à travers une surface unité perpendiculaire à la direction de propagation $\vec{e}_r$.

Cette puissance est rayonnée selon toutes les directions $\vec{e}_r$ mais la présence du facteur $\sin^2 \theta$ montre que ce rayonnement s’effectue préférentiellement dans les directions $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ c’est à dire dans une direction perpendiculaire à celle de $\vec{a}$.

L’onde émise est de polarisation rectiligne (si on l’assimile localement à une onde plane) la direction de $\vec{E}$ étant constamment celle de $\vec{e}_\theta$.

I.C - On calcule le flux du vecteur $\vec{\Pi}(M, t)$ précédent à travers une sphère de rayon r pour laquelle le vecteur surface élémentaire en coordonnées sphériques s’écrit $d\vec{S} = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \vec{e}_r$. On obtient alors

$$\mathcal{P}(r, t) = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{q^2 \sin^2 \theta}{(4\pi r)^2 \epsilon_0 c^3} a^2(t - r/c) r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

soit

$$\mathcal{P}(r, t) = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} a^2(t - r/c) \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{\theta=0}^{\pi} \sin^3 \theta d\theta$$

ce qui donne, avec le résultat rappelé par l’énoncé

$$\boxed{\mathcal{P}(r, t) = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} a^2(t - r/c)}$$

II – Injecteur

II.A.1) La distribution de charges étant invariante par translation selon les directions Oy et Oz , le champ $\vec{E}(M)$ ne dépend a priori que de la coordonnée x de M . De même par tout point M , l'axe Mx est axe de symétrie de la distribution plane infinie donc le champ en M est porté par cet axe. On peut alors écrire que $\vec{E}(M) = E(x)\vec{e}_x$. De plus le plan chargé $x = 0$ est plan de symétrie de la distribution de charge ainsi, en deux points symétriques M et M' par rapport à ce plan, les champs $\vec{E}(M)$ et $\vec{E}(M')$ sont symétriques c'est à dire ici opposés. On peut alors écrire que $E(-x) = -E(x)$.

On applique alors le théorème de Gauss sur un cylindre droit fermé par deux surfaces planes S en x et en $-x$. Le flux de $\vec{E}$ à travers la surface latérale est nul car les vecteurs surface élémentaire y sont orthogonaux à $\vec{e}_x$. On obtient alors le flux Φ à travers cette surface fermée en utilisant le fait que la champ $\vec{E}$ est uniforme sur chacune des surfaces S situées en x et $-x$ ($x > 0$) :

$$\Phi = E(x)\vec{e}_x \cdot S\vec{e}_x + E(-x)\vec{e}_x \cdot (-S\vec{e}_x)$$

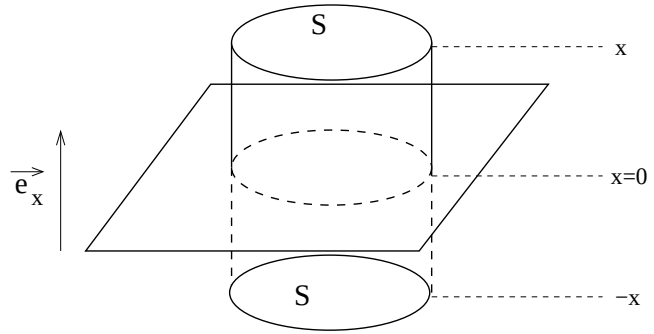
$$\Phi = (E(x) - E(-x))S$$

pour obtenir $\Phi = 2E(x)S$ avec la remarque faite sur l'impairité de $E(x)$.

La charge intérieure à la surface fermée est $Q_{\text{int}} = -\sigma S$ ce qui permet d'obtenir

$$\vec{E}(x) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_x \quad \text{si } x > 0$$

$$\vec{E}(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_x \quad \text{si } x < 0$$



En notant 1 le milieu où $x < 0$ et 2 celui où $x > 0$, on peut écrire

$$\vec{E}(x = 0^+) - \vec{E}(x = 0^-) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_x$$

avec $\vec{e}_x = \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ vecteur unitaire normal à la surface traversée, orienté du milieu 1 vers le milieu 2. On obtient bien les relations de passage à la traversée du plan chargé (continuité des composantes tangentielles de $\vec{E}$ et discontinuité des composantes normales).

II.A.2) On note alors $\vec{E}_+$ le champ créé par le plan chargé avec la densité superficielle σ et $\vec{E}_-$ le champ créé par le plan chargé avec la densité superficielle $-\sigma$.

On calcule alors le champ total comme superposition de ces deux champs.

$$\bullet x < 0 : \vec{E}_+ = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-\vec{e}_x) \text{ et } \vec{E}_- = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}(-\vec{e}_x) \text{ donc } \vec{E} = \vec{0}$$

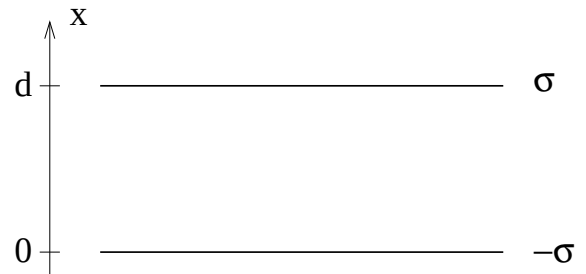
$$\bullet x > d : \vec{E}_+ = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\vec{e}_x) \text{ et } \vec{E}_- = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}(\vec{e}_x) \text{ donc } \vec{E} = \vec{0}$$

$$\bullet d > x > 0 : \vec{E}_+ = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-\vec{e}_x) \text{ et } \vec{E}_- = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}(\vec{e}_x) \text{ donc}$$

$$\vec{E} = \frac{-\sigma}{\varepsilon_0}(\vec{e}_x)$$

On obtient donc

$$\vec{E} = \vec{0} \quad \text{pour } x < 0 \quad \text{et } x > d \quad ; \quad \vec{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_x \quad \text{pour } 0 < x < d$$



II.B - On écrit $\vec{E}_0 = -\vec{\text{grad}} V$ entre les deux plaques soit $-\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = -\frac{dV}{dx}$ ce qui donne $V(x) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}x + cte$ et donc

$$U = V(d) - V(0) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}d$$

On peut alors aussi écrire $\vec{E}_0 = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_x = -\frac{U}{d}\vec{e}_x = -\frac{m}{e}\alpha\vec{e}_x$ ce qui permet d'obtenir

$$\boxed{\alpha = \frac{Ue}{md}}$$

II.C - En négligeant toute autre force que la force $-e\vec{E}_0$ agissant sur les électrons, l'application du principe fondamental de la dynamique à un électron dans le référentiel galiléen de la cavité donne

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}_0$$

soit

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \alpha\vec{e}_x$$

α étant constant, on obtient par intégrations successives en tenant compte des conditions initiales et en notant M la position de l'électron :

$$\vec{v} = (v_0 + \alpha t)\vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{OM} = (v_0 t + \frac{\alpha}{2}t^2)\vec{e}_x$$

Ainsi par définition du temps T

$$d = v_0 T + \frac{\alpha}{2}T^2$$

On obtient donc une équation du second degré pour T dont la seule racine positive est

$$\boxed{T = \frac{v_0}{\alpha} \left(\sqrt{1 + 2\frac{\alpha d}{v_0^2}} - 1 \right)}$$

On obtient alors la vitesse de sortie $\vec{v}_1 = (v_0 + \alpha T)\vec{e}_x$ soit

$$\boxed{\vec{v}_1 = v_0 \left(\sqrt{1 + 2\frac{\alpha d}{v_0^2}} \right) \vec{e}_x}$$

II.D - En négligeant les pertes énergétiques par rayonnement, l'énergie mécanique de l'électron se conserve entre l'entrée et la sortie ce qu'on écrit

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - eV(0) = \frac{1}{2}mv_1^2 - eV(d)$$

soit

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 - eU = \frac{1}{2}mv_1^2 - \alpha md$$

ou

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \alpha md = \frac{1}{2}mv_1^2$$

Avec les pertes par rayonnement et en assimilant T' à T, l'énergie perdue par rayonnement est $\mathcal{P}T$. On obtient alors

$$\text{Énergie mécanique initiale} - \text{Énergie mécanique finale} = \text{Énergie rayonnée}$$

c'est à dire

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \left(\frac{1}{2}mv_1'^2 - \alpha md \right) = \mathcal{P}T = m\tau a^2 T$$

ce qui donne en faisant apparaître v_1

$$\frac{1}{2}mv_1'^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 - m\tau a^2 T$$

soit

$$v_1'^2 = v_1^2 \left(1 - 2\tau a^2 \frac{T}{v_1^2} \right)$$

ou

$$v'_1 = v_1 \left(1 - 2\tau a^2 \frac{T}{v_1^2} \right)^{1/2}$$

le terme $2\tau a^2 \frac{T}{v_1^2}$ est le terme correctif tenant compte du rayonnement. Le texte indique que cet effet est faible si bien que ce terme doit être petit devant 1. En utilisant alors $(1+x)^{1/2} \simeq 1 + \frac{x}{2}$ si $x \ll 1$, on obtient ici

$$v'_1 \simeq v_1 \left(1 - \tau a^2 \frac{T}{v_1^2} \right)$$

soit

$$v'_1 \simeq v_1 - \tau a^2 \frac{T}{v_1}$$

qui est le résultat attendu avec $\boxed{\zeta = \tau a^2}$

La dimension de τ est celle d'un rapport $\frac{\text{puissance}}{\text{masse} \times \text{accélération}^2}$ soit $\frac{\text{force} \times \text{vitesse}}{\text{masse} \times \text{accélération}^2}$. Sachant que les dimensions d'une force et d'un produit masse $\times$ accélération sont les mêmes, la dimension de τ est donc celle d'un rapport $\frac{\text{vitesse}}{\text{accélération}}$, τ est donc bien homogène à un temps.

III – Anneau de stockage

III.A.1) La puissance de la seule force à laquelle est soumis l'électron s'écrit $P = (-e \vec{v} \wedge \vec{B}_0) \cdot \vec{v}$. Elle est nulle puisque les vecteurs $\vec{v} \wedge \vec{B}_0$ et $\vec{v}$ sont toujours orthogonaux. Ainsi

$$P = \frac{d\mathcal{E}_C}{dt} = 0$$

soit

$$\boxed{\mathcal{E}_C = \text{cte}}$$

III.A.2) L'application du principe fondamental de la dynamique à l'électron donne alors

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \vec{v} \wedge \vec{B}_0$$

en utilisant les coordonnées cartésiennes et ω donné par l'énoncé on obtient les trois équations

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\omega \dot{y} & (1) \\ \ddot{y} = \omega \dot{x} & (2) \\ \ddot{z} = 0 & (3) \end{cases}$$

Avec les conditions initiales de position et de vitesse, on obtient à partir de (3) $\boxed{z(t) = 0 \quad \forall t \geq 0}$.

On peut résoudre (1) et (2) en utilisant la variable complexe $v(t) = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t)$ où $i^2 = -1$, alors en faisant (1) + $i(2)$, on obtient :

$$\dot{v} - i\omega v = 0$$

ce qui donne

$$v(t) = v(0)e^{i\omega t}$$

avec $v(0) = \dot{x}(0) + i\dot{y}(0) = v_0(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) = v_0 e^{i\frac{\pi}{4}}$, on écrit

$$v(t) = v_0 e^{i(\omega t + \frac{\pi}{4})}$$

et en intégrant par rapport au temps, on obtient

$$x(t) + iy(t) = \frac{v_0}{i\omega} e^{i(\omega t + \frac{\pi}{4})} + \text{cte} = \frac{v_0}{\omega} e^{i(\omega t - \frac{\pi}{4})} + \text{cte}$$

Or à $t = 0$, $x(t) = y(t) = 0$ donc $\text{cte} = -\frac{v_0}{\omega}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et alors

$$x(t) + iy(t) = \frac{v_0}{\omega}e^{i(\omega t - \frac{\pi}{4})} - \frac{v_0}{\omega}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

On obtient $x(t)$ et $y(t)$ en prenant partie réelle et partie imaginaire de l'expression précédente soit

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \cos(\omega t - \frac{\pi}{4}) - \frac{v_0}{\omega} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{v_0}{\omega} \left(\cos(\omega t - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

et

$$y(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t - \frac{\pi}{4}) + \frac{v_0}{\omega} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{v_0}{\omega} \left(\sin(\omega t - \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

III.A.3) La trajectoire est bien celle d'un cercle dans le plan (xOy) car $z(t) = 0$ avec

$$\left(x(t) + \frac{v_0}{\omega\sqrt{2}}\right)^2 + \left(y(t) - \frac{v_0}{\omega\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2$$

C'est bien l'équation cartésienne d'un cercle de centre $C(-\frac{v_0}{\omega\sqrt{2}}; \frac{v_0}{\omega\sqrt{2}}; 0)$ et de rayon $R_0 = \frac{v_0}{\omega}$.

III.B - On peut continuer de travailler avec les complexes et écrire $\underline{a}(t) = \dot{v}(t) = i\omega v_0 e^{i(\omega t - \frac{\pi}{4})}$
Alors $a^2 = |\underline{a}|^2$ ce qui donne directement $a^2 = \omega^2 v_0^2$, d'où

$$\mathcal{P} = m\tau a^2 = \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{e^2 B_0^2}{m^2} v_0^2$$

En considérant que la décroissance de $\mathcal{E}_C$ est faible, on peut écrire remplacer la vitesse au carré par $\frac{2\mathcal{E}_C}{m}$ dans l'expression de $\mathcal{P}$, soit encore :

$$\mathcal{P} = \frac{e^4 B_0^2}{3\pi\epsilon_0 c^3 m^3} \mathcal{E}_C$$

Or $\mathcal{P} = -\frac{d\mathcal{E}_C}{dt}$ ce qui permet d'écrire

$$\frac{d\mathcal{E}_C}{dt} = -\frac{\mathcal{E}_C}{\tau'}$$

avec $\tau' = \frac{3\pi\epsilon_0 c^3 m^3}{e^4 B_0^2}$ et $\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} m v_0^2 e^{-\frac{t}{\tau'}}$

III.C - On a vu que $a^2 = \omega^2 v^2$ et $v = R_0 \omega$ ce qui permet d'écrire la norme de l'accélération

$$a = \frac{v^2}{R_0}$$

alors en écrivant aussi que $\delta\mathcal{E} = \mathcal{P}T$ où $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi R_0}{v}$ est la période de l'électron sur sa trajectoire quasi-circulaire, on obtient avec $\mathcal{P} = m\tau a^2 = m\tau \frac{v^2}{R_0}$

$$\delta\mathcal{E} = \frac{e^2 v^3}{3\epsilon_0 R_0 c^3}$$

III.D.1) On calcule avec le même nombre de chiffres significatifs que celui de l'énoncé (!) $\gamma = 5423,26145$ qu'on pourra arrondir à 5423.

III.D.2) Alors, avec l'indication de l'énoncé $\delta\mathcal{E} = \gamma^4 \frac{e^2 v^3}{3\epsilon_0 R_0 c^3}$, on calcule

$$\delta\mathcal{E} = 1,5 \cdot 10^{-14} \text{ J} = 93 \text{ keV}$$

III.D.3) $T_0 = \frac{2\pi R_0}{v} = 1,2 \cdot 10^{-6} \text{ s}.$

Pour perdre 0,275 GeV soit $0,275 \cdot 10^6 \text{ keV}$, alors que 93 keV sont perdus par tour, il faut réaliser le nombre n de tours avec

$$n = \frac{0,275 \cdot 10^6}{93} = 2960$$

Alors $\tau_{10\%} = nT_0 = 3,4 \text{ ms}$. Ce temps est petit, un contrôle électronique du nombre de tours s'impose.

IV – Spectre de rayonnement émis

IV.A.1) À chaque tour une impulsion est reçue par le détecteur lorsque le cône d'émission passe devant le détecteur. La période de répétition de ces impulsions est donc celle de rotation des électrons soit T_0 .

IV.A.2) En A, le cône d'émission de largeur angulaire $2/\gamma$ commence à passer devant le détecteur alors qu'en

B c'est la fin du cône qui passe devant le détecteur, ce cône « tournant » avec l'électron. On a alors $\beta = \frac{2}{\gamma}$.

IV.A.3) L'électron se déplaçant à la vitesse v , on a $\Delta t = \frac{\widehat{AB}}{v}$. Sachant que $\widehat{AB} = R_0\beta = \frac{2R_0}{\gamma}$, on obtient

$$\Delta t = \frac{2R_0}{\gamma v}$$

L'impulsion électromagnétique se déplaçant à la vitesse c , on en déduit que $\delta x = c\Delta t = \frac{2R_0}{\gamma} \frac{c}{v}$

On représente par AC cette longueur δx parcourue par le début de l'impulsion émise en A. On constate que lorsque l'électron arrive en B, il y a coupure de la réception par le détecteur car le cône d'émission ne l'atteint plus. La longueur de l'impulsion qui va atteindre le détecteur est donc inférieure à δx et est égale à $\delta l = \delta x - AB$ correspondant à la longueur du train d'onde émis dans la direction du détecteur pendant Δt . On peut alors écrire

$$\delta l = \delta x - 2R_0 \sin(\beta/2)$$

soit

$$\delta l = \frac{2R_0}{\gamma} \frac{c}{v} - 2R_0 \sin(1/\gamma)$$

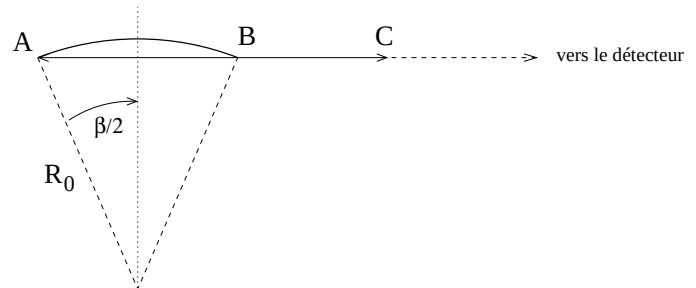
IV.A.4) En élevant γ au carré, on obtient aisément $\left(\frac{v}{c}\right)^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2}$. On a déjà vu que $\gamma \gg 1$ donc que $\frac{1}{\gamma^2} \ll 1$.

En effectuant un développement limité à l'ordre 1 en $\frac{1}{\gamma^2}$, on obtient finalement

$$v = c \left(1 - \frac{1}{2\gamma^2}\right)$$

IV.A.5) L'impulsion émise se propageant à la vitesse c , on a $\delta t = \frac{\delta l}{c}$ donc

$$\delta t = \frac{2R_0}{c} \left(\frac{c}{\gamma v} - \sin \frac{1}{\gamma} \right)$$



À l'aide de la question précédente et en effectuant encore un développement limité on peut écrire que

$$\frac{c}{\gamma v} = \frac{1}{\gamma} \frac{1}{1 - \frac{1}{2\gamma^2}} = \frac{1}{\gamma} \left(1 - \frac{1}{2\gamma^2}\right)^{-1} \simeq \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{2\gamma^3}$$

On effectue alors de même un développement limité à l'ordre 3 en $1/\gamma$ de $\sin(1/\gamma) \simeq \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{6\gamma^3}$. On obtient alors à l'ordre 3 en $1/\gamma$

$$\delta t = \frac{2R_0}{c} \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{2\gamma^3} - \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{6\gamma^3} + \dots \right)$$

Ce qui donne

$$\delta t = \frac{4}{3} \frac{1}{\gamma^3} \frac{R_0}{c} \quad ; \quad \text{A.N : } \delta t = 1,6 \cdot 10^{-18} \text{ s}$$

IV.B.1) On obtient $\nu_0 = \frac{1}{T_0}$ et $\nu_C = \frac{1}{\delta t}$.

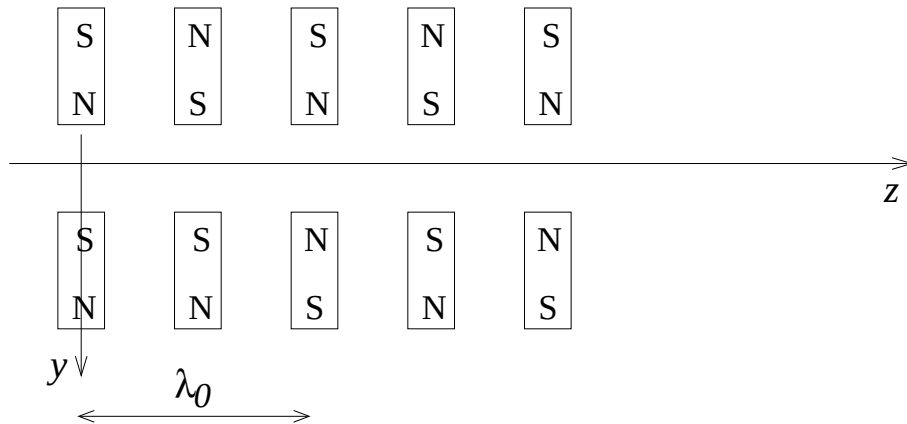
Les longueurs d'onde correspondantes sont

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} = cT_0 \quad \text{et} \quad \lambda_C = \frac{c}{\nu_C} = c\delta t$$

Pour les applications numériques, on trouve $\lambda_0 = 360 \text{ m}$ et $\lambda_C = 4,7 \cdot 10^{-10} \text{ m}$.
Le spectre couvert est très large des ondes rayons aux rayons X.

V – Onduleurs et wigglers

V.A.1) Proche de O, en supposant $B_0 > 0$, le champ est dirigé selon $\vec{e}_y$ puis quand z augmente successivement selon $-\vec{e}_y, \vec{e}_y, -\vec{e}_y, \dots$. Sachant que pour un aimant droit les lignes de champ magnétique sortent du pôle Nord et rentrent vers le pôle sud, on en déduit la disposition suivante :



V.A.2) L'équation de Maxwell-Ampère n'est pas vérifiée avec la forme proposée du champ magnétique car $\text{rot } \vec{B} \neq \vec{0}$ alors que $\vec{j} = \vec{0}$ et $\vec{E} = \vec{0}$.

V.B - Par application du principe fondamental de la dynamique à un électron, on écrit :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \vec{v} \wedge B_0 \cos(k_0 z) \vec{e}_y$$

soit avec toujours $\omega = \frac{eB_0}{m}$

$$\begin{cases} \ddot{x} = \omega \dot{z} \cos(k_0 z) & (1) \\ \ddot{y} = 0 & (2) \\ \ddot{z} = -\omega \dot{x} \cos(k_0 z) & (3) \end{cases}$$

Avec les conditions initiales, l'équation (2) donne $y(t) = 0 \quad \forall t \geq 0$.

En supposant $\vec{v} \simeq \vec{v}_0$, on peut remplacer (3) par $\ddot{z} = 0$, ce qui donne alors avec les conditions initiales $z(t) = v_0 t$.

Enfin, on écrit (1) sous la forme

$$\ddot{x} = \omega v_0 \cos(k_0 v_0 t)$$

ce qui donne avec les conditions initiales $\dot{x}(0) = 0$ et $x(0) = 0$:

$$x(t) = \frac{\omega}{v_0 k_0^2} (1 - \cos(k_0 v_0 t)) = \frac{e B_0}{m v_0 k_0^2} (1 - \cos(k_0 v_0 t))$$

V.C - On peut écrire ici $\langle a^2 \rangle = \langle \ddot{x}^2 \rangle$ puisque $\ddot{y} = \ddot{z} = 0$ si on néglige les oscillations selon Oz. Alors

$$\langle a^2 \rangle = \frac{e^2 B_0^2 v_0^2}{2m^2}$$

Avec la formule donnée au **I**. pour la puissance en fonction de l'accélération, on obtient

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{e^4 B_0^2 v_0^2}{12\pi \epsilon_0 c^3 m^2}$$

V.D - Avec le même γ que précédemment et $\lambda_0 = 2\gamma^2 \lambda_r$, on trouve $\lambda_0 = 6 \text{ cm}$.

V.E - La période magnétique est $T_0 = \frac{\lambda_0}{c}$. L'énergie perdue pendant une période est $\mathcal{E} = \langle \mathcal{P}' \rangle T_0$ avec $\langle \mathcal{P}' \rangle = \gamma^2 \langle \mathcal{P} \rangle$ soit

$$\mathcal{E} = \frac{\gamma^2 e^4 B_0^2 v_0^2 \lambda_0}{12\pi \epsilon_0 m^2 c^4}$$

On considère ici les photons émis donc de longueur d'onde λ_0 et de fréquence $\frac{c}{\lambda_0}$. On peut alors écrire

$$\mathcal{E} = N_\gamma h \frac{c}{\lambda_0}$$

ce qui donne avec $v_0 \simeq c$:

$$N_\gamma = \frac{\gamma^2 e^4 B_0^2 \lambda_0^2}{12\pi \epsilon_0 h m^2 c^3} \quad ; \quad \text{A.N : } N_\gamma = 88.10^6$$

V.F - On utilise le résultat du **V.B** - en remplaçant m par γm et avec $z(t) = v_0 t$, on peut écrire

$$x(z) = \frac{e B_0}{\gamma m v_0 k_0^2} (1 - \cos(k_0 z))$$

soit

$$\frac{dx}{dz} = \frac{e B_0}{\gamma m v_0 k_0} \sin(k_0 z) = \frac{e B_0 \lambda_0}{2\pi \gamma m v_0} \sin(k_0 z)$$

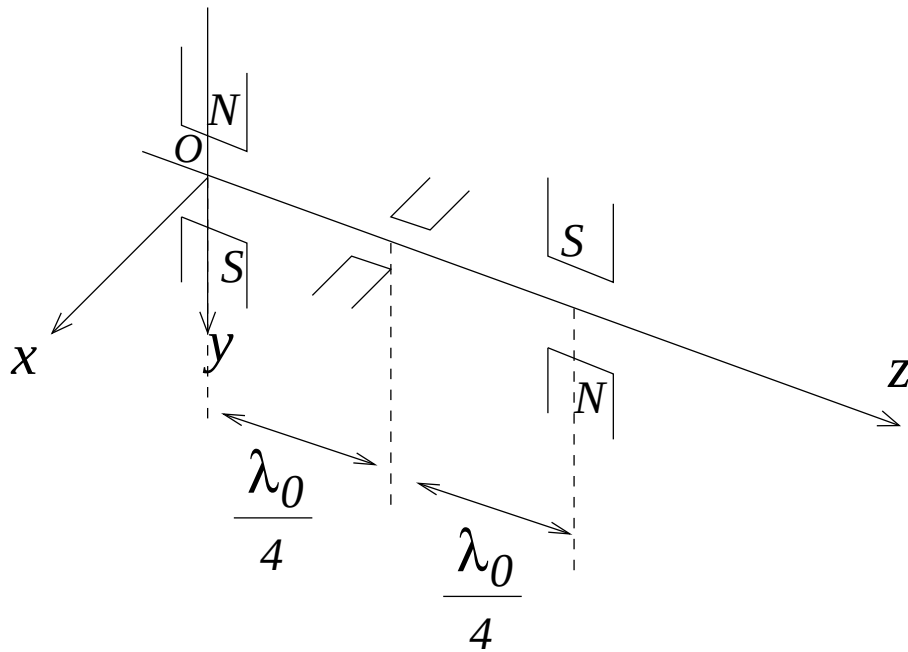
Le terme $\left(\frac{dx}{dz}\right)_{\max}$ représente donc $\tan \Psi_0 \simeq \Psi_0$ puisque le texte indique $\Psi_0 \ll 1$. Ainsi avec $v_0 \simeq c$:

$$\Psi_0 = \frac{e B_0 \lambda_0}{2\pi \gamma m c} = \frac{K}{\gamma} = K \Delta\theta$$

Avec les données numériques, on calcule $K = 14$, on peut donc affirmer que $\Psi_0 \gg \Delta\theta$.

L'élément d'insertion est un wiggler

V.G - Pour obtenir une polarisation circulaire de l'onde émise, il suffit de superposer deux polarisations rectilignes croisées et déphasées d'un quart de période. On peut ainsi placer une seconde ligne d'aimants cette fois dans le plan (xOz) qui produira un rayonnement de polarisation rectiligne selon $\vec{e}_y$ comme le montre le schéma ci-dessous.



V.F - Ces autres pics correspondent aux harmoniques du signal périodique mais non sinusoïdal décomposable en série de Fourier.