

Centrale-Supélec 2013, Filière PSI, épreuve de Physique-Chimie

Corrigé proposé par JPh Caniparoli ; pour me contacter (erreurs, ...) : artefact.act@wanadoo.fr

I vibrations d'une corde de piano fixée à ses deux extrémités

I.A – mise en équation du mouvement transversal d'une corde de piano sans raideur

I.A.1)

- corde sans raideur : les actions entre deux portions de corde adjacentes se réduisent à leur point de contact à la force de tension tangente à la corde en ce point.
- dans l'hypothèse des petits mouvements, les déplacements de la corde par rapport à sa position d'équilibre sont suffisamment petits pour qu'à tout instant et en tout point l'angle entre la tangente à la corde en mouvement et la tangente à la corde à l'équilibre soit petit devant 1.

I.A.2)

On considère le segment de corde situé entre les abscisses x et $x + \delta x$ à l'équilibre. Sa masse et son accélération ont pour expressions

$$\delta m = \mu \delta x ; \vec{a} = \frac{\partial v_y}{\partial t} \vec{e}_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{e}_y$$

Il est soumis aux forces de tension $\vec{T}(x + \delta x)$ et $-\vec{T}(x)$ à ses deux extrémités, où $\vec{T} = T_x \vec{e}_x + T_y \vec{e}_y$.

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit

$$\mu \frac{\partial v_y}{\partial t} \vec{e}_y = \mu \delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{e}_y = \vec{T}(x + \delta x) - \vec{T}(x) = \frac{\partial \vec{T}}{\partial x} \delta x$$

En projection sur les axes x et y

$$0 = \frac{\partial T_x}{\partial x} ; \mu \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial T_y}{\partial x}$$

Pour une corde sans raideur, la tension en tout point est colinéaire à la corde

$$\frac{T_y}{T_x} = \frac{\partial y}{\partial x}$$

et dans l'hypothèse des petits mouvements

$$\left| \frac{T_y}{T_x} \right| \ll 1$$

soit

$$T_x \approx \|\vec{T}\|$$

La projection sur x du principe fondamental s'intègre en

$$T_x(x, t) = f(t) \approx \|\vec{T}\| = T_0$$

Par conséquent

$$T_y = T_x \frac{\partial y}{\partial x} = T_0 \frac{\partial y}{\partial x}$$

puis en dérivant par rapport au temps

$$\frac{\partial T_y}{\partial t} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} = T_0 \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

Les deux relations entre v_y et T_y sont

$$\mu \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial T_y}{\partial x} ; \quad \frac{\partial T_y}{\partial t} = T_0 \frac{\partial v_y}{\partial x}$$

I.A.3)

On repart des équations

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial T_y}{\partial x} ; \quad T_y = T_0 \frac{\partial y}{\partial x}$$

qui conduisent en éliminant T_y à l'équation de d'Alembert

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} ; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} ; \quad c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$$

où c représente la célérité des ondes transversales sur la corde.

La propagation des ondes électromagnétiques dans le vide et des ondes de pression de faible amplitude dans un gaz parfait sont régies par la même équation.

I.A.4)

On convertit la tension exprimée sous forme d'une masse équivalente $m = 85 \text{ kg}$ en tension $T_0 = mg = 850 \text{ N}$. Pour la corde d'acier

$$\mu = s\rho = \frac{\pi d^2}{4} \rho = 7,4 \times 10^{-3} \text{ kg m}^{-1}$$

D'où

$$c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} = \sqrt{\frac{4mg}{\pi \rho d^2}} = 3,4 \times 10^2 \text{ m s}^{-1}$$

I.B – modes propres d'une corde de piano sans raideur, fixée aux deux extrémités. Position du marteau sur la corde

I.B.1)

Une onde stationnaire est une onde pour laquelle les dépendances spatiale et temporelle sont séparées : $s(x, t) = f(x) \cdot g(t)$ en notation réelle.

Le report de la forme précédente dans l'équation de d'Alembert conduit à l'équation

$$f''(x)g(t) = \frac{1}{c^2} f(x)g''(t)$$

soit en utilisant la propriété de séparation des variables

$$\frac{f''}{f} = \frac{1}{c^2} \frac{g''}{g} = cste$$

L'équation différentielle en f s'écrit

$$f'' - cste f = 0$$

et admet pour solution des fonctions harmoniques ($cste < 0$), affine ($cste = 0$) ou hyperboliques ($cste > 0$). Comme la corde est fixée à ses deux extrémités, à tout instant $y(0, t) = y(L, t) = 0$, soit $f(0) = f(L) = 0$, condition qui ne peut être vérifiée, si f n'est pas identiquement nulle, que par les solutions harmoniques :

$$f(x) = f_0 \cos(kx + \psi)$$

où f_0 est une constante arbitraire, et k et ψ dépendent des conditions aux limites et sont exprimées à la question suivante.

L'équation différentielle en g s'écrit alors

$$\frac{g''}{g} = c^2 \frac{f''}{f} = -(kc)^2 ; g'' + (kc)^2 g = 0$$

et admet pour solution générale

$$g(t) = g_0 \cos(\omega t + \varphi) ; \omega = kc$$

où g_0 est une constante arbitraire.

Les solutions de l'équation de d'Alembert en ondes stationnaires compatibles avec les conditions aux limites sont de la forme

$$y(x, t) = y_0 \cos(kx + \psi) \cos(\omega t + \varphi) ; \omega = kc$$

I.B.2)

Les modes propres de la corde vibrante sont les ondes stationnaires susceptibles d'exister sur la corde en l'absence d'excitation extérieure. Chaque mode propre a une dépendance temporelle sinusoïdale. Les fréquences propres de la corde sont les fréquences de ses modes propres.

Les conditions aux limites de la corde s'écrivent $y(0, t) = y(L, t) = 0$ à tout instant, soit, comme le terme $y_0 \cos(\omega t + \varphi)$ n'est pas identiquement nul

$$\cos(\psi) = \cos(kL + \psi) = 0$$

on en déduit

$$\psi = \frac{\pi}{2}[\pi] ; kL = n\pi ; k_n = n \frac{\pi}{L}$$

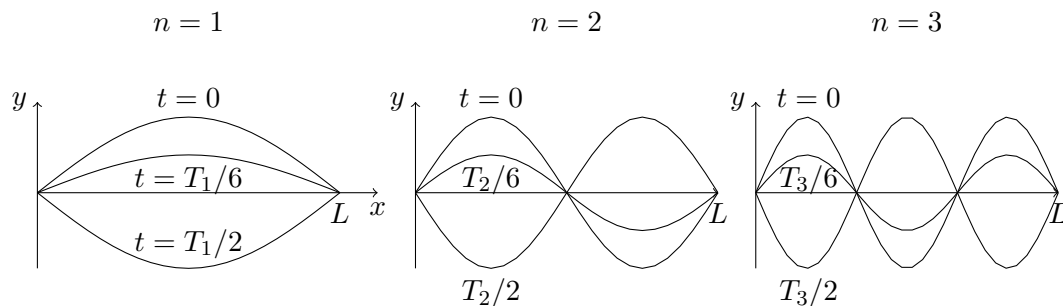
où n est un entier non nul. Les fréquences propres ont pour expression

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{k_n c}{2\pi} = \frac{nc}{2L}$$

Si on choisit $\psi = -\pi/2$, $\cos(kx + \psi) = \sin(kx)$, et les modes propres sont de la forme

$$y_n(x, t) = y_{0,n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi n c t}{L} + \varphi\right)$$

À un instant où le terme temporel est maximal, l'allure de la corde pour les trois premiers modes est la suivante



I.B.3)

a) La largeur a du marteau influence l'amplitude des harmoniques via le facteur

$$\frac{\sin(n\pi a/L)}{n\pi a/L}$$

Qualitativement ce facteur prend des valeurs notables si

$$n \frac{\pi a}{L} < \pi$$

et devient négligeable au-delà.

La largeur a du marteau intervient en limitant l'ordre de grandeur du rang maximal des harmoniques présents dans la vibration de la corde à

$$n < n_{\max} = \frac{L}{a}$$

En particulier, plus la taille du marteau est petite, plus le spectre est riche en harmoniques. La fréquence caractéristique au-delà de laquelle les harmoniques ne sont pas excités par le marteau a pour expression

$$f = n f_1 = \frac{L}{a} f_1$$

correspondant à une longueur d'onde minimale

$$\lambda_{\min} = \frac{c}{f_{\max}} = \frac{ca}{L f_1} = 2a$$

Qualitativement le marteau n'excite que les modes de longueurs d'onde supérieures à sa largeur.

Pour une corde de longueur $L = 65$ cm, de fréquence fondamentale $f_1 = 262$ Hz et un marteau de largeur $2a = 2$ cm

$$n_{\max} \approx 65 ; f_{\max} = 17 \text{ kHz}$$

Les modes excités sont situés dans le spectre audible.

La taille des marteaux résulte d'un compromis :

- une augmentation de la taille du marteau conduit à une augmentation de l'amplitude des vibrations (y est proportionnel à a), donc à un son plus puissant
- une diminution de la taille de marteau permet d'augmenter le nombre de modes excités, donc favorise la richesse spectrale du son émis et sa qualité.

La taille du marteau indiquée correspond à ce compromis, car les modes excités couvrent pratiquement l'ensemble du spectre audible : diminuer sa taille conduirait à une diminution de l'amplitude du son sans amélioration audible de sa richesse.

b) La position x_0 du point d'attaque intervient dans l'expression de la vibration par le facteur multiplicatif

$$\frac{\sin(n\pi x_0/L)}{n\pi x_0/L}$$

Pour supprimer l'harmonique de rang n il suffit que x_0 soit choisi de manière à annuler ce facteur. Pour éviter de supprimer des harmoniques de rang inférieur à n , il faut prendre la première annulation du sinus-cardinal

$$\frac{n\pi x_0}{L} = \pi ; x_0 = \frac{L}{n}$$

I.C – Conséquences sur la conception des cordes d'un piano

I.C.1)

D'après la question, la fréquence fondamentale de la corde vérifie $f = c/2L$, soit

$$L = \frac{c}{2f}$$

En l'absence d'autre information, il faut supposer que la célérité est la même pour les différentes cordes (ce qui est critiquable, en pratique la tension est pratiquement identique mais la masse linéique varie). Dans cette hypothèse, le produit Lf se conserve et, connaissant $f_{\text{Do } 4} = 262 \text{ Hz}$ et $L_{\text{Do } 4} = 65 \text{ cm}$, on détermine les valeurs

$$L_{\text{La } 0} = \frac{f_{\text{Do } 4}}{f_{\text{La } 0}} L_{\text{Do } 4} = 6,1 \text{ m} ; L_{\text{Do } 8} = \frac{f_{\text{Do } 4}}{f_{\text{Do } 8}} L_{\text{Do } 4} = 4,1 \text{ cm}$$

I.C.2)

On reprend la relation précédente en exprimant la célérité $c = \sqrt{T_0/\mu}$

$$f = \frac{c}{2L} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$$

En augmentant la masse linéique des cordes, il est possible, à tension et longueur fixées, de diminuer leur fréquence fondamentale, et ainsi produire les notes graves sans augmentation de la longueur des cordes.

On peut envisager de diminuer la tension des cordes pour produire les notes graves (procédé utilisé pour l'accord du piano et des instruments à corde). Cependant il y a un risque de mauvaise répartition des contraintes sur le cadre du piano.

I.C.3)

La masse linéique de la corde filée a pour expression

$$\mu = s_{\text{Fe}}\rho_{\text{Fe}} + s_{\text{Cu}}\rho_{\text{Cu}} = \frac{\pi}{4} (D^2\rho_{\text{Fe}} + ((D + 2e)^2 - D^2)\rho_{\text{Cu}}) = 89,2 \text{ g m}^{-1}$$

On en déduit pour le La 0 de fréquence $f = 28 \text{ Hz}$

$$L = \frac{1}{2f} \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} = 1,74 \text{ m}$$

I.D – Prise en compte de la raideur : dispersion et inharmonicité

I.D.1)

a) L'équation aux dimensions s'écrit

$$[\Gamma] = \frac{L^4 \text{Pression} L}{L^2} = \text{Pression} L^3 = \text{Force} L = \text{Couple}$$

b) Le principe fondamental de la dynamique est inchangé par rapport à la question I.1), et conduit aux deux équations scalaires

$$0 = \frac{\partial T_x}{\partial x} ; \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial T_y}{\partial x}$$

La première équation s'intègre comme précédemment en

$$T_x = f(t) = T_0$$

c) Le mouvement de la corde se fait dans le plan Oxy , donc le vecteur rotation du segment de corde de longueur δx , de barycentre G considéré est dirigé selon $\vec{e}_z$. La distance maximale des points de ce segment à l'axe Gz est $\delta x/2$, donc le moment d'inertie du segment par rapport à Gz vérifie

$$J_{Gz} \propto \delta m \delta x^2 = \mu \delta x^3 \left(J_{Gz} = \frac{\delta m \delta x^2}{12} \right)$$

Il s'agit donc d'une quantité du troisième ordre en δx . Le moment cinétique barycentrique vérifie la même propriété et sera donc négligeable si on se limite au premier ordre dans l'expression du théorème du moment cinétique.

Le moment en G des actions s'appliquant sur le segment de corde à ses extrémités A d'abscisse x et B d'abscisse $x + \delta x$ a pour expression

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{GB} \wedge \vec{T}_a(x + \delta x) + \vec{\Gamma}(x + \delta x) + \vec{GA} \wedge -\vec{T}_g(x) - \vec{\Gamma}(x) ; \vec{GB} = -\vec{GA} = \frac{\delta x \vec{e}_x + \delta y \vec{e}_y}{2}$$

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}} = \frac{\delta x e_x + \delta y e_y}{2} \wedge (2T_0 \vec{e}_x + (T_y(x + \delta x) + T_y(x)) \vec{e}_y) + \vec{\Gamma}(x + \delta x) - \vec{\Gamma}(x) = \\ \left(\frac{\delta x}{2} (T_y(x + \delta x) + T_y(x)) - \delta y T_0 + \Gamma(x + \delta x) - \Gamma(x) \right) \vec{e}_z \end{aligned}$$

soit à l'ordre 1 en δx

$$\vec{\mathcal{M}} = \left(T_y - \frac{\partial y}{\partial x} T_0 + \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \right) \delta x \vec{e}_z$$

Ce moment est d'ordre 1 en δx , donc le moment cinétique d'ordre 3 est bien négligeable. Le théorème du moment cinétique barycentrique s'écrit alors $\vec{\mathcal{M}} = \vec{0}$, soit

$$T_y - \frac{\partial y}{\partial x} T_0 + \frac{\partial \Gamma}{\partial x} = 0 ; T_y = T_0 \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial \Gamma}{\partial x}$$

d) On déduit du principe fondamental de la dynamique et de l'expression précédente de T_y l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $y(x, t)$

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial T_y}{\partial x} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2}$$

soit, d'après l'expression de $\Gamma(x, t)$

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\pi r^4}{4} E \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} ; \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + E \frac{\pi r^4}{4} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$$

I.D.2)

a) L'expression proposée pour $y(x, t)$ conduit aux relations

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 y ; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 y ; \quad \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = k^4 y$$

soit en reportant dans l'équation des mouvements de la corde

$$\omega^2 = \frac{T_0}{\mu} k^2 + E \frac{\pi r^4}{4\mu} k^4 = c^2 k^2 \left(1 + E \frac{\pi r^4}{4T_0} k^2 \right)$$

b) Les conditions aux limites en $x = 0$ et $x = L$ sont inchangées par rapport à la première partie, donc k vérifie toujours la relation

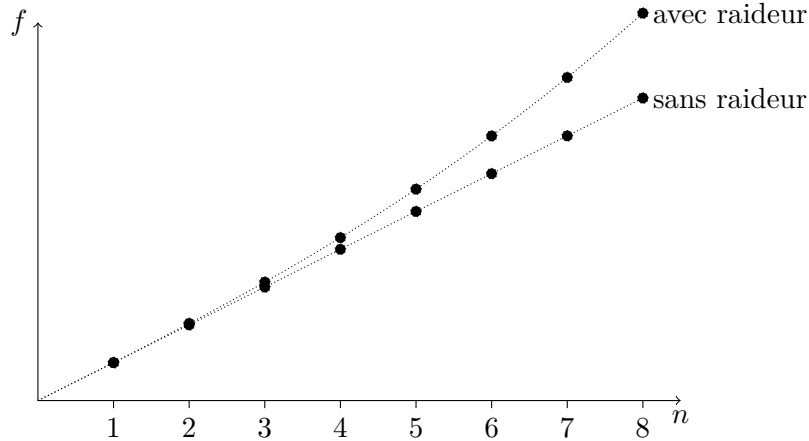
$$k_n = \frac{n\pi}{L}$$

Par conséquent, d'après la question précédente

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{ck_n}{2\pi} \sqrt{1 + E \frac{\pi r^4}{4T_0} k_n^2} = n \frac{c}{2L} \sqrt{1 + E \frac{\pi^3 r^4}{4T_0 L^2} n^2} = n \frac{c}{2L} \sqrt{1 + Bn^2} ; \quad B = \frac{\pi^3 E r^4}{4T_0 L^2}$$

Il faut savoir que les cordes d'un piano à queue sont plus longues que celles d'un piano droit, donc la valeur de B est plus petite pour un piano à queue, et l'effet de la raideur des cordes est plus faible : la déviation des fréquences des harmoniques par rapport à une série arithmétique est plus petite.

c)



Les fréquences propres de la corde sans raideur forment une suite arithmétique. Celles de la corde avec raideur sont plus élevées et s'en écartent d'autant plus que leur rang n est élevé.

d) Application numérique : $B = 3,75 \times 10^{-4}$.

Pour les harmoniques de rang inférieur à 20, le facteur correctif Bn^2 est petit devant 1, et de manière approchée

$$f_n = n \frac{c}{2L} \sqrt{1 + Bn^2} = f_n^0 \sqrt{1 + Bn^2} \approx f_n^0 \left(1 + \frac{Bn^2}{2} \right)$$

On en déduit l'inharmonicité

$$i_n = \frac{f_n - f_n^0}{f_n^0} = \frac{Bn^2}{2}$$

e) On cherche à déterminer le rang n à partir duquel

$$\frac{f_n}{f_n^0} = \sqrt{1 + Bn^2} > 2^{1/12} ; n > \sqrt{\frac{2^{1/6} - 1}{B}} = 18$$

L'écart sera supérieur au demi-ton à partir de l'harmonique de rang 18.

II Couplage entre une corde de piano et la table d'harmonie : le rôle du chevalet

II.A – Impédance caractéristique d'une corde vibrante

II.A.1)

La vitesse de déplacement transversal associée à une onde progressive sinusoïdale se propageant selon les x croissants est de la forme

$$v_y(x, y) = v_0^+ \cos(\omega t - kx)$$

D'après la question I.A.2

$$\frac{\partial T_y}{\partial x} = \mu \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\mu \omega v_0^+ \sin(\omega t - kx)$$

relation qui s'intègre en

$$T_y = -\frac{\mu \omega}{k} v_0^+ \cos(\omega t - kx) = -\mu c v_y$$

$$\frac{T_y}{v_y} = -\mu c = -Z_C$$

$$Z_C = \text{masse} \times \text{temps}$$

II.A.2)

Si l'onde se propage selon les z décroissants

$$v_y = v_y^- \cos(\omega t + kx)$$

Le changement de signe dans le terme de propagation se traduit par un changement de signe de l'impédance caractéristique

$$\frac{T_y^-}{v_y^-} = \mu c = Z_C$$

II.B – Couplage corde-chevalet

II.B.1)

Cette condition à la limite $x = L$ traduit le couplage entre la corde et l'ensemble chevalet, table d'harmonie. De point de vue énergétique, la puissance transmise par la corde au chevalet a pour expression

$$P = \vec{T}_g(L, t) \cdot \vec{v}(L, t) = -T_y(L, t) v_y(L, t) = R v_y(L, t)^2 > 0$$

donc il existe un transfert énergétique net de la corde vers le chevalet et la table d'harmonie, qui va permettre à la table d'harmonie de rayonner de l'énergie sonore grâce à son excitation par la corde.

Je ne vois pas d'autre argument simple justifiant la cohérence de ce modèle.

II.B.2)

Les vibrations de la corde sont décrites par l'équation de d'Alembert et les conditions aux limites en $x = 0$ et $x = L$.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} ; y(0, t) = 0 ; \frac{T_y(L, t)}{v_y(L, t)} = T_0 \frac{\frac{\partial y}{\partial x}(L, t)}{\frac{\partial y}{\partial t}(L, t)} = -R$$

en utilisant la relation

$$T_y = T_0 \frac{\partial y}{\partial x}$$

pour relier T_y et y .

On considère dans un premier temps l'équation de d'Alembert et la condition en $x = 0$

$$s^2 \exp(st) f(x) = c^2 \exp(st) f''(x) ; f(0) \exp(st) = 0$$

soit les équations

$$f'' - \left(\frac{s}{c}\right)^2 f = 0 ; f(0) = 0$$

L'équation différentielle en f admet la solution générale

$$f(x) = a \exp\left(\frac{sx}{c}\right) + b \exp\left(-\frac{sx}{c}\right)$$

les constantes d'intégration a et b étant liée par la condition

$$f(0) = a + b = 0 ; b = -a$$

soit, en considérant l'extension aux arguments complexes de la fonction $\sinh$

$$f(x) = a \left(\exp\left(\frac{sx}{c}\right) - \exp\left(-\frac{sx}{c}\right) \right) = A \sinh\left(\frac{sx}{c}\right)$$

La condition à la limite $x = L$ s'écrit alors

$$-R = T_0 \frac{\frac{\partial y}{\partial x}(L, t)}{\frac{\partial y}{\partial t}(L, t)} = \frac{T_0 s \cosh(sL/c)}{cs \sinh(sL/c)} = \frac{T_0}{c \tanh(sL/c)}$$

soit, comme $T_0 = \mu c^2$

$$\tanh\left(\frac{sL}{c}\right) = -\frac{T_0}{Rc} = -\frac{\mu c}{R} = -\frac{Z_C}{R} = -\frac{1}{r}$$

La forme équivalente donnée dans l'énoncé découle de la relation

$$\tanh(x) = \frac{\exp(2x) - 1}{\exp(2x) + 1}$$

II.B.3)

On recherche s sous la forme $s = \alpha + j\omega$, soit, comme r est réel et $r > 1$

$$\exp\left(\frac{2L\alpha}{c}\right) \exp\left(j\frac{2L\omega}{c}\right) = \frac{r-1}{r+1} \in R^+$$

On en déduit les deux équations

$$\exp\left(j\frac{2L\omega}{c}\right) = 1 ; \exp\left(\frac{2L\alpha}{c}\right) = \frac{r-1}{r+1}$$

La première équation impose les valeurs de ω

$$\frac{2L\omega}{c} = 2\pi n ; \omega = n \frac{\pi c}{L} = 2\pi f_n^0$$

Les solutions constituent un ensemble de modes propres de fréquence identiques aux fréquences propres de la corde vibrante non couplée au chevalet.

D'autre part, comme $r > 1$, $0 < (r-1)/(r+1) < 1$

$$\alpha = \ln\left(\frac{r-1}{r+1}\right) \frac{c}{2L} = \ln\left(\frac{r-1}{r+1}\right) f_0 < 0$$

La dépendance temporelle de $y(x, t)$ est de la forme

$$\exp(st) = \exp(\alpha t) \exp(j\omega t)$$

Comme $\alpha < 0$, $\exp(st)$ est amortie exponentiellement avec le temps, ce qui est cohérent avec la perte d'énergie de la corde au profit de l'ensemble chevalet, table d'harmonie.

II.B.4)

On reporte $s = \alpha + j\omega$ dans l'expression de la solution, en développant $\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$

$$y(x, t) = \frac{A}{2} \left(\exp\left(\frac{\alpha x}{c}\right) \exp\left(j\frac{\omega x}{c}\right) - \exp\left(-\frac{\alpha x}{c}\right) \exp\left(-j\frac{\omega x}{c}\right) \right) \exp(\alpha t) \exp(j\omega t)$$

en regroupant les exponentielles complexes

$$y(x, t) = \frac{A}{2} \left(\exp\left(\frac{\alpha x}{c}\right) \exp\left(j\omega \left(t + \frac{x}{c}\right)\right) - \exp\left(-\frac{\alpha x}{c}\right) \exp\left(j\omega \left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \right) \exp(-\alpha t)$$

et en notant $F(u) = (A/2) \exp(j\omega u)$

$$y(x, t) = \exp(\alpha t) \left(\exp\left(\frac{\alpha x}{c}\right) F\left(t + \frac{x}{c}\right) - \exp\left(-\frac{\alpha x}{c}\right) F\left(t - \frac{x}{c}\right) \right)$$

Il s'agit de la superposition de deux ondes progressives se propageant en sens inverses, amplifiées ($\alpha < 0$) dans le sens de la propagation et atténuées temporellement. Ce n'est donc plus une onde stationnaire, puisque les dépendances spatiales et temporelles ne sont plus séparées.

II.B.5)

Le temps caractéristique d'atténuation de l'onde est

$$\tau = -\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{f_0} \frac{1}{\ln\left(\frac{r-1}{r+1}\right)}$$

Ce temps est d'autant plus court que la fréquence fondamentale de la corde est plus élevée, donc que le son émis est plus aigu. L'atténuation des sons aigus est donc plus rapide que celle des sons graves, ce qui est cohérent avec les constatations expérimentales.

La première amélioration possible pour le modèle serait la modélisation de l'ensemble chevalet, table d'harmonie par un oscillateur amorti, pour tenir compte des deux sens de transfert énergétique possible, et non du seul sens corde $\rightarrow$ chevalet. En effet quand on excite la table d'harmonie (en la frappant par exemple, l'expérience étant encore plus démonstrative avec une guitare), elle transmet de l'énergie aux cordes qui se mettent à vibrer. L'amortissement de l'oscillateur modélisant la table rend compte du rayonnement d'énergie sonore par cette dernière.

La seconde amélioration possible consisterait à modéliser l'ensemble des cordes du piano, qui sont en réalité couplées par l'intermédiaire du cadre du piano et de la table d'harmonie (principe d'émission de sons harmoniques par un piano : enfoncer sans la jouer une note pour permettre la vibration de la corde associée, puis jouer et relâcher immédiatement une note située par exemple une octave au-dessus ou au-dessous : la corde libérée est mise en vibration)

Modéliser mécaniquement la table d'harmonie, qui se comporte comme une surface vibrante et possède donc différents modes propres de vibration, ainsi que ses interactions avec les cordes (excitation de la table d'harmonie) et interaction avec l'air qui l'entoure (rayonnement de puissance sonore).

Pour avoir une idée de ce type de modélisation, on peut consulter par exemple les thèses de G. Derveaux (2002) pour une guitare, de J. Chabassier (2012) pour un piano, en accès libre aux adresses <http://pastel.archives-ouvertes.fr/pastel-00002585/> et <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00662740/>.

III Corrosion des cordes de piano

III.A – L'acier : constituant essentiel des cordes de piano

III.A.1) Le fer α

a) Une maille élémentaire est le plus petit motif permettant de reconstruire le cristal par translations successives.

b) La maille conventionnelle du fer α contient :

- un atome à chacun des 8 sommets, partagé entre 8 mailles, soit 1 atome en propre ;
- un atome au sommet de la maille, appartenant en propre à la maille.

soit au total deux atomes par maille conventionnelle.

c) Dans la maille conventionnelle du fer α les atomes sont tangents le long de la grande diagonale de la maille, donc

$$4R_{\text{Fe}} = \sqrt{3}a_{\alpha}$$
$$R_{\text{Fe}} = \frac{\sqrt{3}}{4}a_{\alpha} = 124 \text{ pm}$$

Une maille conventionnelle de volume a_α^3 contient 2 atomes, donc

$$\rho_{\text{Fe}\alpha} = \frac{2\mathcal{M}_{\text{Fe}}}{\mathcal{N}_A a_\alpha^3} = 7,84 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$$

d) Le site O' est un site octaédrique délimité par les quatre atomes de fer situés aux sommets de la face dont O' est le centre et les deux atomes de fer situés aux centres des mailles adjacentes auxquelles appartient O' . La distance de O' aux centres des mailles vaut $a_\alpha/2$, tandis que sa distance aux sommets de la face vaut $\sqrt{2}a_\alpha$, donc le site n'est pas un octaèdre régulier.

e) La site T' est un site tétraédrique correspondant à un quart du site octaédrique précédent. Les distances entre les atomes délimitant ce site sont a_α entre les atomes au centre des deux mailles et entre les atomes aux sommets de la face et de $\sqrt{3}a_\alpha/2$ sinon. Le tétraèdre n'est donc pas régulier.

f) Dans la maille conventionnelle se trouvent :

- un site O' par face partagé entre deux mailles adjacentes, soit en propre trois sites O' (sites correspondant au schéma) ;
- un site O' par arête partagé entre quatre mailles (site non représenté sur l'énoncé, délimité par les deux sommets d'une arête et les centres des quatre mailles se partageant cette arête), soit en propre trois sites, soit un total de six sites O' par maille.
- quatre sites T' par face partagés entre deux mailles voisines, soit en propre douze sites T' .

g) Les plus proches voisins du centre du site O' sont les atomes aux centres des deux mailles qui se partagent ce site, dont les centres sont distants de a_α , donc le rayon maximal $R_{O'}$ d'un atome s'insérant dans le site O' vérifie

$$2(R_{O'} + R_{\text{Fe}\alpha}) = a_\alpha = \frac{4}{\sqrt{3}} R_{\text{Fe}\alpha}$$

$$R_{O'} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \right) R_{\text{Fe}\alpha} = 19,2 \text{ pm}$$

h) La distance entre le centre du site T' et un plus proche voisin vérifie

$$d^2 = \frac{a_\alpha^2}{4} + \frac{a_\alpha^2}{16} = \frac{5a_\alpha^2}{16} ; d = \frac{\sqrt{5}}{4} a_\alpha = \sqrt{\frac{5}{3}} R_{\text{Fe}\alpha}$$

Le rayon maximal d'un atome pouvant s'insérer dans un site T' vérifie

$$R_{T'} + R_{\text{Fe}\alpha} = d = \sqrt{\frac{5}{3}} R_{\text{Fe}\alpha}$$

$$R_{T'} = \left(\sqrt{\frac{5}{3}} - 1 \right) R_{\text{Fe}\alpha} = 36 \text{ pm}$$

III.A.2) Du fer α à la ferrite

a) D'après l'énoncé $R_C = 70 \text{ pm} > R_{T'} > R_{O'}$, donc les atomes de carbone ne peuvent s'insérer dans les sites du fer sans déformation du réseau hôte. Ils se placent dans les sites T' pour engendrer le minimum de déformation.

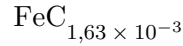
b) Au maximum de solubilité

$$3,5 \times 10^{-4} = s = \frac{m_C}{m_{Fe} + m_C} \approx \frac{m_C}{m_{Fe}} = \frac{n_C \mathcal{M}_C}{n_{Fe} \mathcal{M}_{Fe}}$$

Par conséquent

$$\frac{n_C}{n_{Fe}} = \frac{\mathcal{M}_{Fe}}{\mathcal{M}_C} s = \frac{55,8}{12,0} 3,5 \times 10^{-4} = 1,63 \times 10^{-3}$$

d'où la formule de la ferrite



c) La maille conventionnelle contient deux atomes de fer, donc $1,63 \times 10^{-3} \times 2 = 3,26 \times 10^{-3}$ atomes de carbone, et douze sites T' . La proportion de sites occupés vaut donc

$$\frac{3,26 \times 10^{-3}}{12} = 2,7 \times 10^{-4}$$

d) La maille conventionnelle est supposée non déformée, donc son volume reste égal à a_α^3 . Elle contient $s = 0,035\%$ en masse de carbone, soit d'après a)

$$\frac{m_C}{m_{Fe}} \approx s ; m = m_{Fe} + m_C \approx (1 + s)m_{Fe} = 1,00035 \times m_{Fe}$$

La masse de la maille augmente donc à volume constant d'un facteur 1,00035. Il en est de même de la masse volumique de la ferrite

$$\rho_{\text{ferrite}} = 1,00035 \rho_{\text{Fe}\alpha} \approx 7,84 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$$

Le nombre de chiffres significatifs des données ne permet pas de distinguer la masse volumique de la ferrite de celle du fer α pur. Quel est l'intérêt réel de cette question ?

III.A.3) Cordes de grave

III.B – Le cuivre : configuration électronique, isotopes stables

a) La détermination de la configuration électronique est régie par les règles :

- de *Pauli* : il ne peut pas y avoir d'électrons dans le même état quantique, défini par les nombres quantiques n, l, m, s , chaque orbitale (ou case quantique) contient donc au maximum deux électrons de spin $s = \pm 1/2$;
- de *Klechkowski* : les sous-couches électroniques, caractérisées par les nombres quantiques n, l , sont remplies par valeurs de $n + l$ croissantes ; pour des valeurs identiques le remplissage s'effectue par valeur croissante de n ; cette règle correspond à un remplissage par énergie croissante ;
- de *Hund* : le remplissage des orbitales d'une sous-couche est effectué en occupant le maximum d'orbitales, les éventuels électrons non-appariés ayant des spins parallèles (même valeur de s).

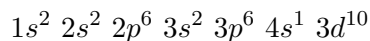
Pour le cuivre de numéro atomique 29, la configuration électronique attendue s'écrit

$$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^9$$

Les électrons de valence sont les électrons de la couche de plus grand nombre quantique principal n et ceux de la sous-couche $(n - 1)d$ si elle est incomplète : dans le cas du cuivre ce sont les onze électrons $4s^2$ et $3d^9$.

Les autres électrons sont les électrons de cœur.

La configuration observée est



Qui est plus stable car la couche $3d$ est complète. Certains texte proposent de ce fait de limiter le nombre d'électrons de valence à un ($4s^1$).

b) Il existe plusieurs définitions des éléments de transition :

- éléments du bloc d à l'exception du lutécium (lanthanide) et du lawrencium (actinide)
- éléments possédant une sous-couche d incomplète (ce qui exclut les éléments de la colonne 12 : Zn, Cd, Hg, Cp)
- une définition étendue qui inclut tous les éléments du bloc d (colonnes 3 à 12 du tableau périodique).

Ils sont donc situés dans les colonnes 3 à 12 de la classification périodique. La configuration attendue s'achevant par $4s^2 3d^9$, le cuivre est situé à l'intersection de la quatrième ligne et de la onzième colonne de la classification périodique.

III.B.1) Préparation industrielle du cuivre

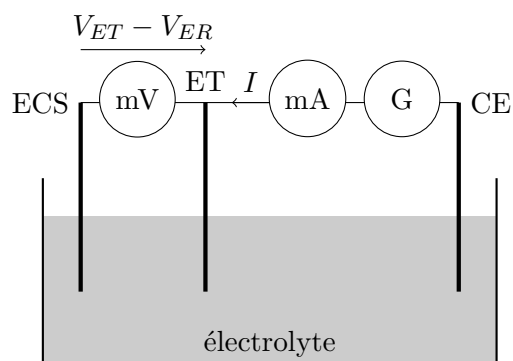
a) Procédé par voie sèche : pyroméallurgie

Procédé par voie humide : hydroméallurgie

b)

- lixiviation : attaque acide ou basique d'un minerai solide permettant de solubiliser par réaction acido-basique sans changement de degré d'oxydation le métal sous forme ionique.
- la cémentation consiste à ajouter à une solution contenant sous forme oxydée cationique un métal majoritaire et des impuretés métalliques, de la poudre du métal majoritaire, afin de réduire sous forme métallique les impuretés cationiques associées aux éléments moins réducteurs que le métal majoritaire. La précipitation sous forme métallique de ces impuretés permet de les éliminer par décantation et filtration.

c)



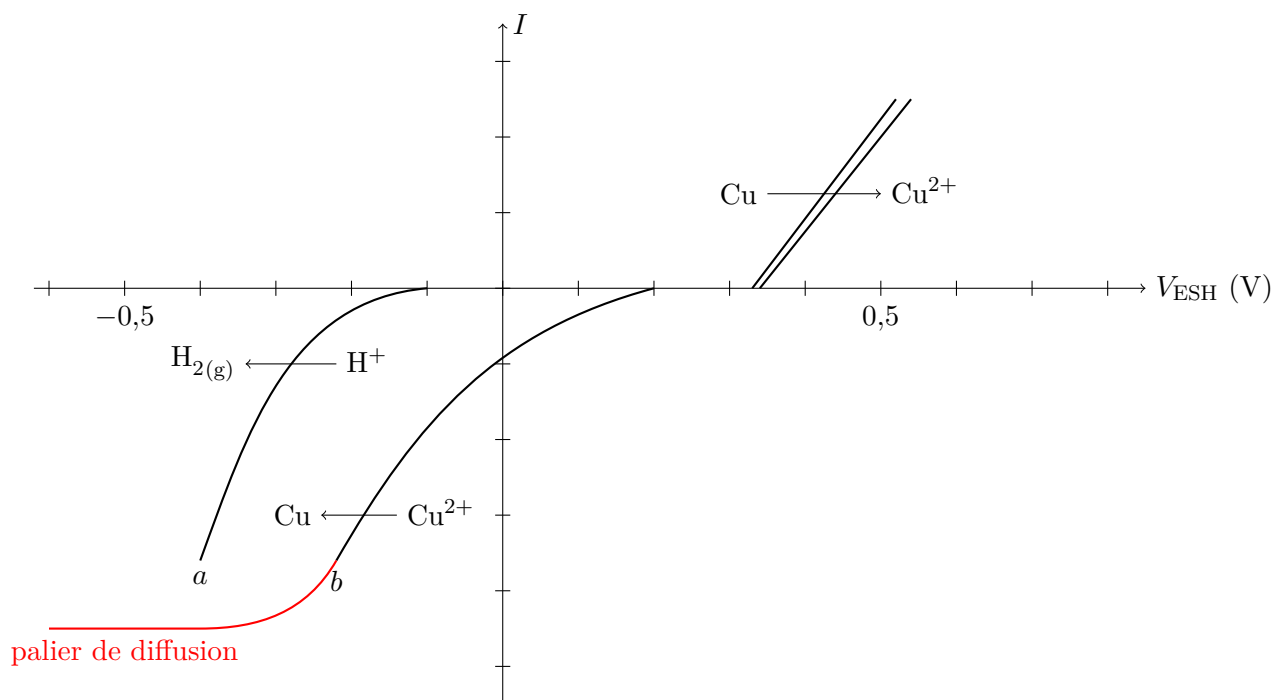
- ER : électrode de référence ;
- ET : électrode de travail ;
- CE : contre-électrode ;
- mV : milli-voltmètre ;
- mA : milli-ampèremètre ;
- G : source continue réglable

d) Les espèces électroactives présentes sont l'eau, qui appartient aux couples H^+/H_2 et $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$, le cuivre, et dans la solution *b* les ions Cu^{2+} .

Les réactions observées sont

- oxydation du cuivre $\text{Cu} \rightarrow \text{Cu}^{2+} + 2\text{e}^-$ à l'anode
- réduction de l'eau $2\text{H}^+ + 2\text{e}^- \rightarrow \text{H}_2$ (courbe a) ou du cuivre $\text{Cu}^{2+} + 2\text{e}^- \rightarrow \text{Cu}$ (courbe b) à la cathode

e) La relation de Nernst donne le potentiel de l'électrode de cuivre au contact d'une solution molaire de Cu^{2+} , $E = 0,34\text{ V}$. D'après le graphique, la surtension anodique est négligeable, tandis que la surtension cathodique est de l'ordre de $0,14\text{ V}$: le couple Cu^{2+}/Cu est rapide pour l'oxydation, lent pour la réduction.



f) Le palier apparaît pour la branche associée à la réduction de Cu^{2+} , car la vitesse de renouvellement des ions Cu^{2+} subissant la réduction à la surface de l'électrode est limitée par le phénomène de diffusion, ce qui conduit à la limitation de la cinétique de réduction par transfert de matière.

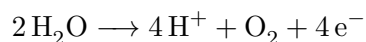
L'ordonnée est une fonction décroissante de la concentration des ions Cu^{2+} , et de la vitesse d'agitation de la solution, car l'augmentation de la concentration et de la vitesse d'agitation favorisent la cinétique, en permettant un apport plus efficace d'ions Cu^{2+} à la surface de l'électrode.

Ce palier n'est pas observé :

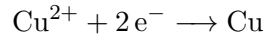
- pour le solvant (couples H^+/H_2 et $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$) ;
- pour l'oxydation du métal constituant l'électrode.

car dans ces deux cas l'apport de l'espèce n'est pas limité.

g) Sur l'anode, le dégagement de dioxygène est associé à l'oxydation de l'eau selon la réaction



Sur la cathode, le dépôt de cuivre résulte de la réduction des ions Cu^{2+} en solution



Les trois phénomènes assurant le transport de matière vers l'électrode sont

- la convection forcée (agitation de la solution) ou naturelle ;
- la migration (déplacement des espèces chargées sous l'effet des champs électriques) ;
- la diffusion.

h) La loi de Nernst donne les potentiels d'électrode pour $[\text{Cu}^{2+}] = 1 \text{ mol L}^{-1}$, $p(\text{O}_2) = 1 \text{ bar}$ et $p\text{H} = 0$

$$E(\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}) = E^\ominus(\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}) + \frac{0,06}{2} \log[\text{Cu}^{2+}] = 0,34 \text{ V}$$

$$E(\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}) = E^\ominus(\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}) + \frac{0,06}{4} \log \left(\frac{[\text{H}^+]^4 p(\text{O}_2)}{c^\ominus p^\ominus} \right) = 1,23 \text{ V}$$

d'où la tension théorique de fonctionnement

$$(V_a - V_c)_{i=0} = E(\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}) - E(\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}) = 0,89 \text{ V}$$

Le dépôt de $m = 1 \text{ kg}$ de cuivre correspond à l'échange de la charge utile

$$Q_u = 2 \frac{m}{\mathcal{M}_{\text{Cu}}} \mathcal{F}$$

Le facteur 2 provenant de la stœchiométrie : la formation d'une mole de cuivre met en jeu deux moles d'électrons.

Comme le rendement faradique vaut $\rho = 85\%$, la charge totale échangée sous la tension $V = 2,44 \text{ V}$ vaut

$$Q_t = \frac{Q_u}{\rho} = \frac{2m\mathcal{F}}{\mathcal{M}_{\text{Cu}}\rho}$$

soit une énergie nécessaire

$$W = Q_t V = \frac{2m\mathcal{F}V}{\mathcal{M}_{\text{Cu}}\rho} = 8,72 \text{ MJ}$$

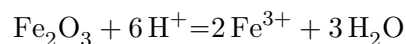
III.C – Corrosion de l'acier à l'air humide

III.C.1)

Fe	Fe_2O_3	Fe^{2+}	Fe^{3+}
0	III	II	III

Les espèces apparaissent par degré d'oxydation croissant à potentiel croissant, donc en se plaçant à $p\text{H} = 0$ puis à $p\text{H} = 5$, on attribue $C = \text{Fe}(0) = \text{Fe}$, $B = \text{Fe}(II) = \text{Fe}^{2+}$, $A = \text{Fe}(III)$, $D = \text{Fe}(III)$.

L'attribution des domaines A et D correspondant à $\text{Fe}(III)$ se fait en considérant l'équilibre acido-basique entre les deux espèces associées



dans lequel Fe^{3+} apparaît comme l'acide associé à la base Fe_2O_3 . La forme acide apparaît aux $p\text{H}$ faible, donc $A = \text{Fe}^{3+}$ et $D = \text{Fe}_2\text{O}_3$.

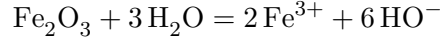
III.C.2)

La frontière BC entre les espèces Fe^{2+} et Fe caractérisée par $E = 0,62 \text{ V}$ est donnée par la loi de Nernst

$$E = E^\ominus(\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}) + \frac{0,06}{2} \log[\text{Fe}^{2+}] = E^\ominus(\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}) + 0,03 \log C_{\text{tra}} ; \log C_{\text{tra}} = \frac{-0,62 + 0,44}{0,03} = -6$$

$$C_{\text{tra}} = 10^{-6} \text{ mol L}^{-1}$$

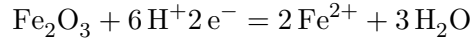
L'équilibre de dissolution de Fe_2O_3 à pH neutre s'écrit à partir de l'équilibre écrit en milieu acide à la question précédente



soit à la limite de précipitation pour laquelle $\text{Fe}^{3+} = C_{\text{tra}}$ et $\text{pH} = 1,75$

$$K_s = [\text{Fe}^{3+}]^2[\text{HO}^-]^6 ; pK_s = -2 \log C_{\text{tra}} + 6\text{pOH} = -2 \log C_{\text{tra}} + 6(pK_e - \text{pH}) = 85,5$$

La frontière BD est associée au couple ($\text{Fe}_2\text{O}_3/\text{Fe}^{2+}$) de demi-réaction



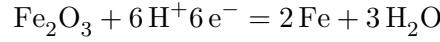
pour lequel la relation de Nernst s'écrit

$$E = E^\ominus + \frac{0,06}{2} \log \left(\frac{[\text{H}^+]^6}{[\text{Fe}^{2+}]^2} \right) = E^\ominus - 0,06 \log[\text{Fe}^{2+}] - 0,18\text{pH}$$

La pente de la frontière BD vaut $-0,18 \text{ V}$.

III.C.3)

On reprend le calcul précédent pour la frontière CD, associée au couple ($\text{Fe}_2\text{O}_3/\text{Fe}$)



$$E = E^\ominus + \frac{0,06}{6} \log[\text{H}^+]^6 = E^\ominus - 0,06\text{pH}$$

La pente de la frontière CD vaut $-0,06 \text{ V}$, elle peut être tracée par continuité à partir de l'intersection des frontières CB et BD.

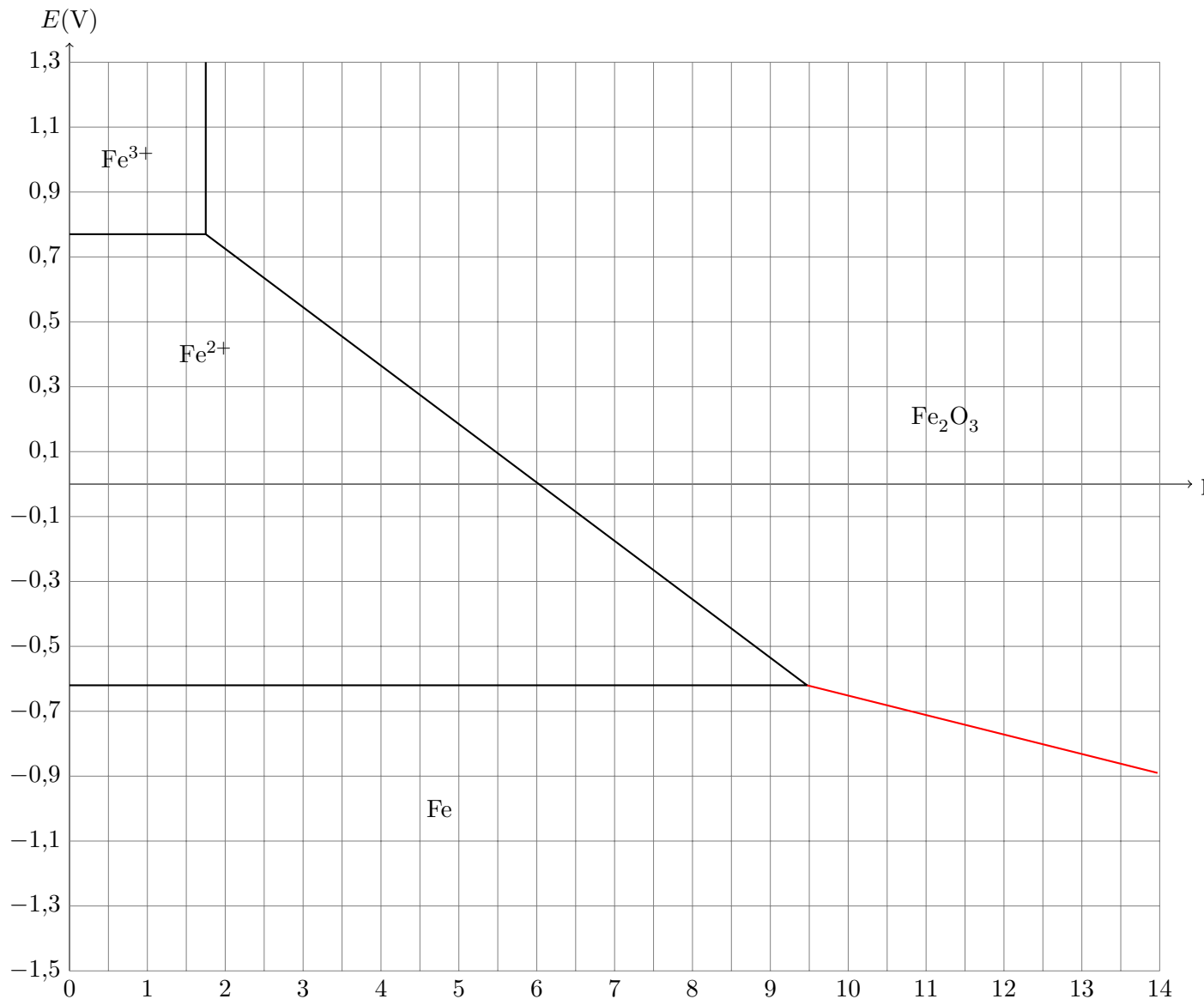
III.C.4)

Pour des pressions gazeuses égales à $P^\ominus$

$$(\text{H}^+/\text{H}_2) : 2\text{H}^+ + 2\text{e}^- = \text{H}_2 ; E = E^\ominus + \frac{0,06}{2} \log \left(\frac{[\text{H}^+]^2 P^\ominus}{c^\ominus P(\text{H}_2)} \right) = -0,06\text{pH}$$

$$(\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}) : \text{O}_2 + 4\text{H}^+ + 4\text{e}^- = 2\text{H}_2\text{O} ; E = E^\ominus + \frac{0,06}{4} \log \left(\frac{[\text{H}^+]^4 P(\text{H}_2)}{c^{\ominus 4} P^\ominus} \right) = (1,23 - 0,06\text{pH})\text{V}$$

Le domaine de stabilité du fer est situé à tout pH dans le domaine de stabilité de H_2 , donc l'acier, assimilé au fer est attaqué à tout pH par l'eau désaérée et par l'eau aérée.



III.C.5)

- le domaine d'immunité du fer est son domaine de stabilité à l'état métal : C ;
- les domaines de corrosion du fer sont les domaines de stabilité des formes solubles dont la formation ne le protège pas d'une attaque ultérieure : domaines A et B ;
- les domaines de passivation sont les domaines de stabilité des produits à l'état solide de l'attaque du fer par une phase aqueuse, susceptibles de former lors de cette attaque une couche protectrice séparant le fer de la phase aqueuse et empêchant l'attaque de se poursuivre : domaine D, en dehors de toute considération sur la protection réelle apportée, qui nécessite que la couche formée soit imperméable.

III.C.6)

La comparaison des potentiels standard $E(Fe^{2+}/Fe) = -0,44$ V et $E(Cu^{2+}/Cu) = 0,34$ V montre que le fer est plus réducteur que le cuivre ; il est donc préférentiellement oxydé par l'eau

($E(\text{H}^+/\text{H}_2) = 0 \text{ V}$), avec formation d'une micropile de corrosion dans laquelle le cuivre joue le rôle de cathode et le fer le rôle d'anode.

IV Polymères synthétiques dans le piano

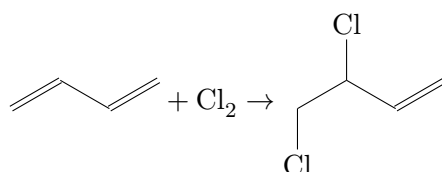
IV.A – Étude du monomère : le chloroprène

IV.A.1)

Le chloroprène est le 2-chlorobuta-1,3-diène.

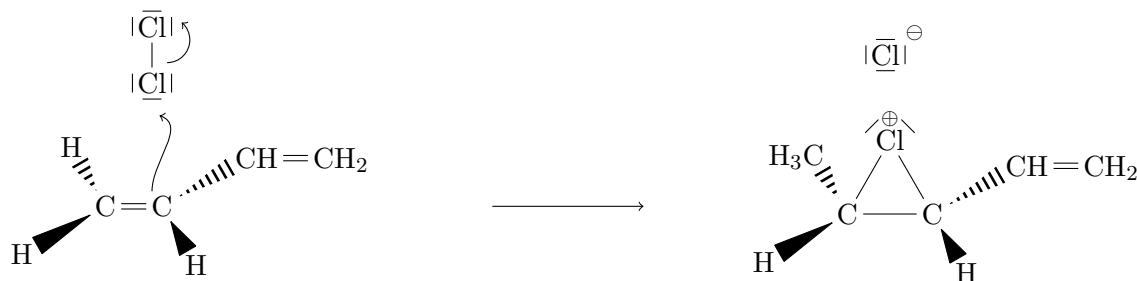
IV.A.2)

a)

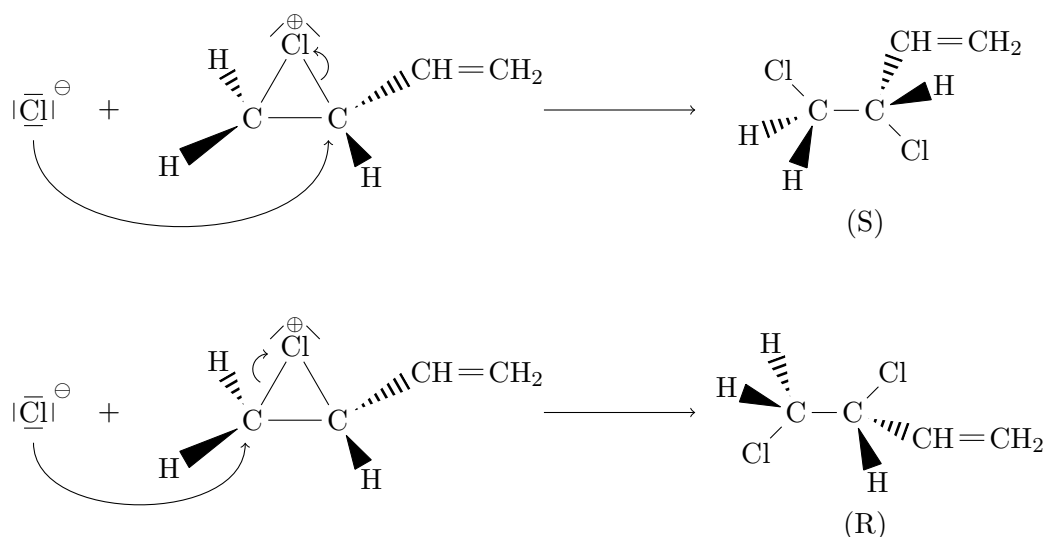


b) L'énoncé suggère dans sa formulation une addition stéréosélective anti avec passage par un ion ponté chloronium par analogie avec la réaction de bromation. Cependant ce mécanisme semble actuellement considéré comme minoritaire devant la formation d'un carbocation non ponté, ce qui conduit à une stéréosélectivité peu marquée voire nulle.

Dans le cas du passage par un ion ponté, la première étape est la polarisation de la liaison $\text{Cl}-\text{Cl}$ à l'approche du nuage π de la double liaison $\text{C}=\text{C}$ conduisant à $\text{Cl}^{+\delta}-\text{Cl}^{-\delta}$ et l'attaque nucléophile de l'atome de chlore $\text{Cl}^{+\delta}$ par le nuage électronique conduisant à la rupture hétérolytique de la liaison $\text{Cl}-\text{Cl}$ et la formation de l'ion ponté



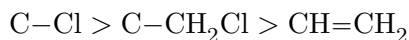
La seconde étape est l'attaque en anti de l'ion ponté par l'ion Cl^- formé lors de la première étape, et la rupture de l'une des liaisons $\text{C}-\text{Cl}$



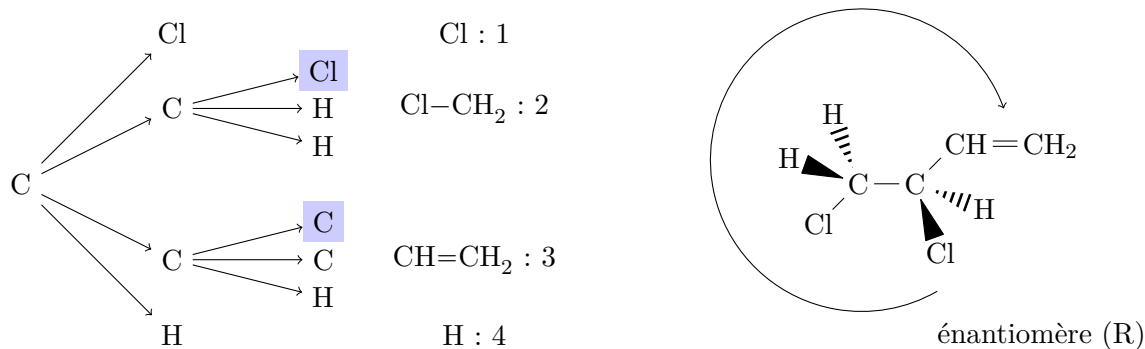
Dans l'hypothèse du passage par un carbocation plan, le mécanisme serait

c) L'addition du second atome de chlore se fait en anti dans le mécanisme impliquant l'ion ponté chloronium, ce qui entraîne la stéréospécificité. Cependant cette addition se fait indifféremment sur les deux atomes de carbone impliqués dans l'ion ponté, donc on obtient un mélange racémique sans activité optique des deux énantiomères (R) et (S) en proportions égales.

d) Les deux énantiomères sont représentés ci-dessus. L'attribution des propriétés est la suivante, les atomes encadrés permettant la discrimination au rang 2 des atomes identiques au rang 1. La configuration est alors déterminée en observant le sens de rotation par ordre de priorité décroissante des liaisons

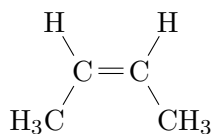


autour de la liaison de plus petite priorité (C-H orientée vers l'arrière de la figure).

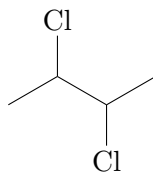


IV.A.3)

En supposant toujours la chloration stéréospécifique anti, on obtient avec le (Z)-but-2-ène

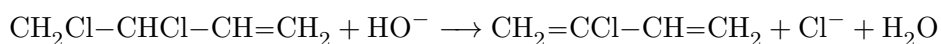


les deux énantiomères (R,R) et (S,S) du 2,3-dichlorobutane



IV.A.4)

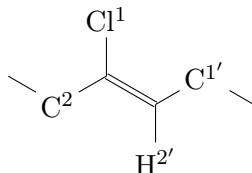
La réaction de déshydrochloration conduit à l'élimination de HCl et la reformation d'une double liaison C=C. En milieu alcalin, HCl formé est neutralisé par les ions hydroxydes selon la réaction $\text{HCl} + \text{HO}^- \rightarrow \text{Cl}^- + \text{H}_2\text{O}$, donc l'équation bilan s'écrit



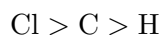
IV.B – Polymérisation du néoprène

IV.B.1)

La double liaison du néoprène a pour configuration



où les ordres de priorités sont déterminés par



Les atomes de priorité identique sont situés du même côté de la double liaison, donc la double liaison est de type (Z).

IV.B.2)

La formule du motif est $\text{CH}_2-\text{CCl}=\text{CH}-\text{CH}_2$ de masse molaire

$$\mathcal{M}_m = 88,5 \text{ g mol}^{-1}$$

Donc l'indice de polymérisation moyen, égal au nombre moyen de monomères présents dans le polymère de masse molaire $\mathcal{M}_p$ vaut

$$n = \frac{\mathcal{M}_p}{\mathcal{M}_m} = 141$$