

Partie A : Détection d'onde électromagnétique**I) Analogie entre une cavité résonnante et la corde de guitare****A) Onde dans une cavité résonnante****1) Conducteur parfait**

a) La loi d'Ohm locale s'exprime $\vec{j} = \gamma \cdot \vec{E}$. Dans un conducteur parfait la conductivité électrique γ tend vers l'infini.

b) D'après la loi d'Ohm $\vec{E} = \vec{j}/\gamma$ et dans un conducteur parfait $\gamma \rightarrow \infty$ implique $\vec{E} = \vec{0}$.

c) Les relations de passage du champ électrique à la surface d'un tel conducteur s'écrivent alors $\vec{E}_{\text{ext}} - \vec{E}_{\text{int}} = \sigma/\epsilon_0 \cdot \vec{n}$ soit $\vec{E}_{\text{ext}} = \sigma/\epsilon_0 \cdot \vec{n}$. Ainsi :

- la composante tangentielle du champ électrique est continue
- la composante normale du champ électrique subit une discontinuité σ/ϵ_0 .

2) Propagation d'une onde électromagnétique dans le vide

a) Dans le vide, sans charge ni courant, les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\overrightarrow{\text{div}}(\vec{E}) = 0 \quad \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\partial \vec{B} / \partial t \quad \overrightarrow{\text{div}}(\vec{B}) = 0 \quad \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \partial \vec{E} / \partial t$$

b) En exprimant le rotationnel des deux termes de l'équation de Maxwell-Faraday :

$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E})) = -\overrightarrow{\text{rot}}(\partial \vec{B} / \partial t)$ d'où, en utilisant l'identité fournie et en permutant les dérivations spatiales et temporelles, $\overrightarrow{\text{grad}}(\overrightarrow{\text{div}}(\vec{E})) - \Delta(\vec{E}) = -\partial(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B})) / \partial t$.

D'après les équations de Maxwell-Gauss et de Maxwell-Ampère on obtient finalement :

$$\Delta(\vec{E}) = \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \text{ nommée équation de propagation de d'Alembert.}$$

c) Le terme $\epsilon_0 \mu_0$ est l'inverse du carré de la vitesse de la lumière c .

$$\text{d) } \Delta(\vec{E}_1(x,t)) = \Delta(E_1(t - x/c) \cdot \vec{u}_y) = \left(\frac{\partial^2 E_1(t - x/c)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_1(t - x/c)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_1(t - x/c)}{\partial z^2} \right) \cdot \vec{u}_y$$

$$\text{donc } \Delta(\vec{E}_1(x,t)) = \left(-\frac{1}{c} \right)^2 \cdot \ddot{E}_1\left(t - \frac{x}{c}\right) \cdot \vec{u}_y \text{ de plus } \frac{\partial^2 \vec{E}_1(x,t)}{\partial t^2} = \ddot{E}_1\left(t - \frac{x}{c}\right) \cdot \vec{u}_y.$$

Ce qui vérifie bien l'équation précédente en posant $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$. Idem pour $\vec{E}_2(x,t)$.

e) Le champ $\vec{E}_1(x,t)$ est une onde plane progressive et le champ $\vec{E}_2(x,t)$ une onde plane régressive.

3) Étude de l'onde incidente

a) Cette onde est polarisée rectilignement selon la direction $\vec{u}_y$.

b) La relation de dispersion s'exprime $\omega/k = c$.

4) Étude de l'onde résultante

a) L'onde incidente a une direction de propagation orthogonale au dioptré, son angle d'incidence par rapport à la normale au dioptré (l'axe Ox) est donc nul. D'après les lois de Snell-Descartes, l'onde réfléchie se propage alors avec une angle d'incidence nul, c'est à dire selon la direction $-\vec{u}_x$.

b) Le problème est invariant par translations selon $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ donc les composantes de $\vec{E}_r(x,t)$ le sont également et son amplitude vectorielle $\vec{E}_{r0}$ ne dépend que de x.

c) $\vec{E}_r(x,t)$ doit vérifier l'équation de Maxwell-Gauss en l'absence de charge

$$\text{div}(\vec{E}_r(x,t)) = 0 \text{ d'où } \frac{\partial E_{r,x}(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial E_{r,y}(x,t)}{\partial y} + \frac{\partial E_{r,z}(x,t)}{\partial z} = 0 \text{ donc } \vec{E}_r(x,t) \cdot \vec{u}_x \text{ est}$$

uniforme et, comme on étudie ici uniquement des champs variables, on fixe cette composante à 0. Ainsi $\vec{E}_r(x,t) = E_{r,y}(x,t) \cdot \vec{u}_y + E_{r,z}(x,t) \cdot \vec{u}_z$ est transverse.

De plus, $\vec{E}_r(x=0,t) + \vec{E}_i(x=0,t)$ doit vérifier la condition de passage pour la

composante tangentielle soit $E_{r,y}(x=0,t) + E_{i,y}(x=0,t) = E_{\text{metal},y} = 0$

et $E_{r,z}(x=0,t) + E_{i,z}(x=0,t) = E_{\text{metal},z} = 0$ d'où $E_{r,y}(x=0,t) = -E_0$ et $E_{r,z}(x=0,t) = 0$.

d) On en déduit la forme de $\vec{E}_r(x,t) = -E_0 \cdot \exp(i(\omega t + kx)) \cdot \vec{u}_y$

e) Le champ électrique total s'exprime alors $\vec{E}(x,t) = E_0 \cdot e^{i\omega t} \cdot (e^{-i kx} - e^{+i kx}) \cdot \vec{u}_y$ soit $\vec{E}(x,t) = -2i \cdot E_0 \cdot \sin(kx) \cdot e^{i\omega t} \cdot \vec{u}_y$ d'où, en temporel, $\vec{E}(x,t) = 2 \cdot E_0 \cdot \sin(kx) \cdot \sin(\omega t) \cdot \vec{u}_y$

f) Il n'y a plus de couplage entre le temps t et l'espace x dans cette expression : cette onde ne se propage plus, elle est qualifiée de **stationnaire**.

g) Les plans nodaux sont tels que $\sin(kx)=0$ soit $x_n = n \cdot \pi / k = n \cdot \lambda / 2$.

5) Cavité résonante : quantification de la fréquence

a) La présence de ce deuxième conducteur parfait impose que $\boxed{\text{le champ électrique soit également nul sur tout le plan } x=-\ell}$ (car il y est tangentiel à la surface du métal parfait).

b) La condition précédente impose de placer le plan $x=-\ell$ sur un plan nodal du champ

$\vec{E}$, il faut donc que $\boxed{n\lambda/2 = \ell}$ or $\lambda = c.T = \frac{2\pi.c}{\omega}$ d'où $n.\frac{2\pi.c}{\omega} = 2.\ell$ et $\boxed{\omega_n = n.\pi.\frac{c}{\ell}}$

c) $\boxed{\omega_0 = \pi.c/\ell}$.

d) D'après les questions précédentes $\boxed{\vec{E}(x,t) = 2.E_0.\sin\left(\frac{n.\omega_0.x}{c}\right).\sin(n.\omega_0.t).\vec{u}_y}$

B) Analogie avec une corde de guitare**1) Caractéristiques**

a) Par définition $\mu = \frac{m}{\ell} = \frac{\rho.\pi.D^2.\ell}{4.\ell}$ donc $\boxed{\mu = \frac{\rho.\pi.D^2}{4}}$

b) D'après la question précédente $s = \frac{\pi.D^2}{4} = \frac{\mu}{\rho}$ donc $\boxed{s = 0,75 \text{ mm}^2}$ et $\boxed{\ell = \frac{m}{\mu} = 0,6 \text{ m}}$

2) Analogie avec l'onde électromagnétique

a) La corde étant fixée à ses deux extrémités, $\boxed{y(-\ell, t) = y(0, t) = 0}$

b) $[v] = \left(\frac{[T_0]}{[\mu]}\right)^{1/2} = \left(\frac{M.L.T^{-2}}{M.L^{-1}}\right)^{1/2}$ donc $\boxed{[v] = L.T^{-1}}$ et v est homogène à une vitesse.

c) Pour une onde électromagnétique se propageant selon $\vec{e}_x$, l'équation de d'Alembert

s'écrit $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ donc $\boxed{\text{le terme correspondant à } v \text{ est la célérité de la lumière } c}$.

Le terme $\boxed{v}$ représente la vitesse de propagation de l'onde transversale long de la corde.

d) $\boxed{v = 141 \text{ m.s}^{-1}}$

e) Par analogie avec la question **I-A-5-c)** $\boxed{\omega_0 = \pi.v/\ell}$

f) Cette expression vérifie $y(-\ell, t) = y(0, t) = 0$ à chaque instant ce qui est cohérent avec les conditions aux limites.

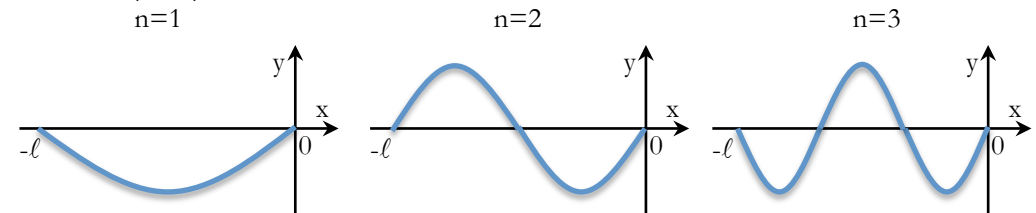
De plus $\frac{\partial^2 y_n(x,t)}{\partial t^2} = -Y_{0,n}.n^2.\omega_0^2.\sin\left(\frac{n.\pi}{\ell}.x\right).\sin(n.\omega_0.t)$

et $\frac{T_0}{\mu} \cdot \frac{\partial^2 y_n(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{T_0}{\mu} \cdot Y_{0,n}.n^2 \cdot \frac{\pi^2}{\ell^2} \cdot \sin\left(\frac{n.\pi}{\ell}.x\right).\sin(n.\omega_0.t)$

sont bien égaux, conformément à l'équation, de propagation car $\omega_0^2 = \pi^2 \cdot \frac{v^2}{\ell^2} = \frac{T_0}{\mu} \cdot \frac{\pi^2}{\ell^2}$

g) ➤ A $t=2\pi/\omega_n$ le terme $\sin(n.\omega_0.t)$ est nul et la corde est confondue avec l'axe (Ox).

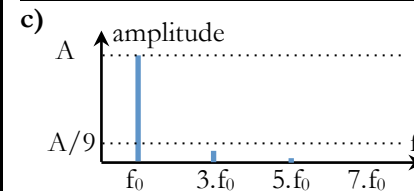
➤ A $t=\pi/(2.\omega_n)$:

**3) Spectre d'une corde de guitare**

a) Les fréquences émises dans les vibrations et dans le son émis sont celles des

harmoniques impaires c'est à dire $f_1 = \frac{\omega_0}{2\pi}$, $f_3 = \frac{3.\omega_0}{2\pi}$, ..., $\boxed{f_{2.k+1} = \frac{(2.k+1).\omega_0}{2\pi}}$

b) La fréquence du son le plus intense est celle du fondamental soit $\boxed{f_1 = \frac{\omega_0}{2\pi}}$



d) On note que les harmoniques décroissent très rapidement...

Si l'on souhaite capter toute la timbre de ce son, $\boxed{\text{il faut que le microphone soit très sensible sur une large bande passante}}$.

II) Étude d'un microphone**A) Préliminaires****1) Théorème d'Ampère**

a) L'équation locale de Maxwell-Ampère s'écrit $\vec{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \cdot \vec{j} + \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

b) Soit un contour fermé orienté noté C et S une surface s'appuyant sur ce contour et orientée en conséquence. Le flux de l'équation sur S s'écrit :

$$\iint_S \vec{\text{rot}}(\vec{B}) \cdot d\vec{S} = \iint_S \mu_0 \cdot \vec{j} \cdot d\vec{S} + \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

soit, d'après le théorème de Stokes : $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \cdot I_{\text{enlacés}} + \mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$

c) En régime quasistationnaire, le terme de courant de déplacement est négligeable donc

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \cdot I_{\text{enlacés}}$$

2) Application de la loi de Biot et Savart

a) Le champ magnétique créé en un point M par une distribution de courants filiforme s'étendant le long d'un contour Γ s'exprime

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{I d\vec{\ell} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

b) Tout plan contenant (Oy) est un plan de symétrie des courants donc un plan de symétrie du champ $\vec{B}$ qui est donc contenu dans leur intersection : $\vec{B} = B(y) \cdot \vec{e}_y$.

D'après la question précédente $B(y) = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{d\vec{\ell} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} \cdot \vec{e}_y$.

Or $\overrightarrow{PM} = -R \cdot \vec{e}_r + y \cdot \vec{e}_y$ et $d\vec{\ell} = R \cdot d\theta \cdot \vec{e}_\theta$ d'où $PM^3 = (R^2 + y^2)^{3/2}$ et $(d\vec{\ell} \wedge \overrightarrow{PM}) \cdot \vec{e}_y = R^2 \cdot d\theta$

$$\text{Ainsi } B(y) = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi \cdot (R^2 + y^2)^{3/2}} \cdot \oint_{\Gamma} R^2 \cdot d\theta \quad \text{et} \quad \vec{B}_{\text{axe}} = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot R^2}{2 \cdot (R^2 + y^2)^{3/2}} \cdot \vec{e}_y$$

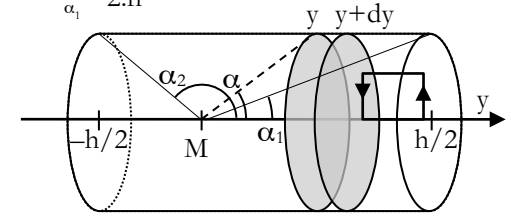
c) La tranche considérée comporte $N \cdot dy/h$ spires et est parcourue par $dI = N \cdot I \cdot dy/h$.

Elle crée en un point M un champ élémentaire $d\vec{B}_{\text{axe, tranche}}(M) = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{2 \cdot R \cdot h} \cdot \sin^3(\alpha) \cdot dy \cdot \vec{e}_y$

d) On note sur le schéma que $y = R/\tan(\alpha)$ donc $dy = -R \cdot d\alpha / \sin^2(\alpha)$

Ainsi en intégrant entre α_1 et α_2 : $\vec{B}_{\text{axe}}(M) = - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{2 \cdot h} \cdot \sin(\alpha) d\alpha \cdot \vec{e}_y$ et

$$\vec{B}_{\text{axe}}(M) = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{h} \cdot \frac{\cos(\alpha_2) - \cos(\alpha_1)}{2} \cdot \vec{e}_y$$

**3) Champ magnétique créé par un « solénoïde infini »**

a) Soit M un point quelconque de l'espace. Le plan orthogonal à l'axe (Oy) et passant par M est un plan de symétrie des courants donc un plan d'antisymétrie du champ magnétique qui lui est donc orthogonal et $\vec{B}(M) = B(M) \cdot \vec{e}_y$

De plus la distribution de courants est invariante par translation selon $\vec{e}_y$ et par rotation autour de l'axe (Oy) donc les composantes de $\vec{B}$ ne dépendent que r , distance à l'axe ainsi $\vec{B}(M) = B(r) \cdot \vec{e}_y$.

b) En appliquant le théorème d'Ampère sur le rectangle noir de la figure précédente :

$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0$ car aucun courant n'est enlacé donc

$$\int_y^{y+dy} (B_{\text{axe}} \cdot \vec{e}_y) \cdot (dy \cdot \vec{e}_y) + \int_0^r (B(r) \cdot \vec{e}_y) \cdot (dr \cdot \vec{e}_r) + \int_y^{y+dy} (B(r) \cdot \vec{e}_y) \cdot (-dy \cdot \vec{e}_y) + \int_0^r (B(r) \cdot \vec{e}_y) \cdot (dr \cdot \vec{e}_r) = 0$$

d'où $B_{\text{axe}} \cdot dy - B(r) \cdot dy = 0$ d'où $B(r) = B_{\text{axe}} = \mu_0 \cdot n \cdot I \cdot \vec{e}_y$ car, d'après la question II-A-2-d)

$$\lim_{h \rightarrow \infty} (\vec{B}_{\text{axe}}(M)) = \lim_{\substack{\alpha_1 \rightarrow 0 \\ \alpha_2 \rightarrow \pi}} \left(\frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{h} \cdot \frac{\cos(\alpha_2) - \cos(\alpha_1)}{2} \cdot \vec{e}_y \right) = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{h} \cdot \vec{e}_y$$

c) Le flux de $\vec{B}$ à travers une spire du solénoïde s'exprime alors

$$\Phi = \iint_{\text{spire}} (\mu_0 \cdot n \cdot I \cdot \vec{e}_y) \cdot (dS \cdot \vec{e}_y) \quad \text{soit} \quad \Phi_1 = \mu_0 \cdot n \cdot I \cdot \pi \cdot R^2$$

B) Caractéristiques électriques du bobinage**1) Résistance du bobinage**

a) $\vec{j}$ a pour unité des $A \cdot m^{-2}$ et représente la quantité de charge traversant une section donnée par unité de temps.

Il peut s'exprimer $\vec{j} = n_m \cdot q_m \cdot \vec{v}_m$ où n_m est la densité volumique de porteurs de charges, q_m leur charge individuelle et $\vec{v}_m$ leur vitesse mésoscopique moyenne.

b) Par définition $I = \iint_{\text{section}} \vec{j} \cdot d\vec{S}$, or d'après la loi d'Ohm $\vec{j} = \gamma \cdot \vec{E}$ et comme $\vec{E}$ est supposé uniforme $I = \gamma \cdot E \cdot S$. De plus, $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{OM} = -E \cdot dz$ et comme $\vec{E}$ est uniforme $0 - U = -E \cdot d$ donc $I = \gamma \cdot S \cdot U / d$

c) Par définition $R_L = \frac{U}{I} = \frac{d}{\gamma \cdot S}$

d) $R_L = \frac{N \cdot 2 \cdot \pi \cdot R}{\gamma \cdot \pi \cdot (D/2)^2} = \frac{N \cdot 8 \cdot R}{\gamma \cdot D^2}$ donc $R_L = 2,7 \text{ k}\Omega$

2) Inductance de la bobine

a) Le flux total du champ magnétique vaut $\Phi_N = N \cdot \Phi_1 = \mu_0 \cdot \frac{N^2}{h} \cdot I \cdot \pi \cdot R^2$

b) Son inductance propre vaut donc $L = \mu_0 \cdot \frac{N^2}{h} \cdot \pi \cdot R^2$

c) Les capacités parasites sont dues à l'espace inter-spires : les fils de deux spires voisines ont un effet capacitif (deux conducteurs en regard).

3) Modèle électrique du microphone

a) R_0 et C_0 sont équivalents à une impédance complexe $Z_0 = \frac{R_0}{1 + j \cdot R_0 C_0 \cdot \omega}$ aux bornes de laquelle la tension est v . D'après la relation du diviseur de tension :

$$\underline{v} = \frac{Z_0}{Z_0 + R_L + j \cdot L \cdot \omega} \cdot \underline{e} \text{ ainsi } \underline{H}(\omega) = \frac{R_0}{R_0 + (R_L + j \cdot L \cdot \omega) \cdot (1 + j \cdot R_0 C_0 \cdot \omega)}$$

b) Soit sous forme canonique $\underline{H}(\omega) = \frac{R_0 / (R_0 + R_L)}{1 + j \cdot \left(\frac{L + R_0 \cdot R_L \cdot C_0}{R_0 + R_L} \right) \cdot \omega - \frac{R_0 \cdot L \cdot C_0}{R_0 + R_L} \cdot \omega^2}$

Par identification $H_0 = \frac{R_0}{R_0 + R_L}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{R_0 + R_L}{R_0 \cdot L \cdot C_0}}$ et $Q = \frac{\sqrt{(R_0 + R_L) \cdot R_0 \cdot L \cdot C_0}}{L + R_0 \cdot R_L \cdot C_0}$

c) La résonance est définie comme la présence d'un maximum dans la courbe de gain. Il faut donc pour cela que $|1 + j \cdot x / Q - x^2|$ présente un minimum ce qui vérifié si

$\frac{d}{dx} \left((1 - x^2)^2 + x^2 / Q^2 \right) = 0$ (inutile de travailler avec la racine carré du module)
d'où $-2 \cdot (1 - x^2) \cdot 2 \cdot x + 2 \cdot x / Q^2 = 0$ soit $x^2 = 1 - 1/2 \cdot Q^2$ qui n'a de solution que si $1 - 1/2 \cdot Q^2 \geq 0$ ce qui impose $Q \geq 1/\sqrt{2}$ condition de résonance.

(Rq : on n'a pas vérifié ici qu'il s'agit bien d'un minimum du dénominateur...)

La pulsation de résonance s'exprime alors $\omega_r = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - 1/2 \cdot Q^2}$

d) Diagramme de Bode en amplitude d'un passe-bas du second ordre avec résonance...

e) La pulsation de coupure à -3 dB est telle que $|\underline{H}(\omega_c)| = \frac{\max(|\underline{H}|)}{\sqrt{2}}$

f) Si $Q \gg 1$, la pulsation de résonance est quasiment égale à ω_0 et la fonction de transfert à la résonance s'exprime alors $\underline{H}(\omega_r \approx \omega_0) = Q \cdot H_0$. Sur le diagramme, le gain dans la bande passante vaut environ 25-30 et le gain maximal vaut 90 donc $Q \approx 3$.

g) (Rq : le sujet semble supposer que la largeur de la bande passante vaut ω_0 / Q comme dans le cas d'un filtre passe-bande sans le rappeler ni donner d'autres explications).

La fréquence propre vaut $f_0 \approx 7 \text{ kHz}$ et les fréquences de coupure (déterminée pour une tension de $90/\sqrt{2} \approx 64 \text{ mV}$ valent $f_{c1} \approx 5,9 \text{ kHz}$ et $f_{c2} \approx 7,8 \text{ kHz}$ donc $Q \approx 3,7$.

h) En utilisant la mesure de f_0 , on détermine $L = \frac{R_0 + R_L}{R_0 \cdot C_0 \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot f_0^2}$ d'où $L \approx 5,2 \text{ H}$.

On en déduit $Q \approx 4,2$ par calcul direct à partir de l'expression de la II-B-3-b)

i) Les trois déterminations sont du même ordre de grandeur.

j) Cela permet de ne sélectionner que le son produit par la corde correspondant au micro concerné mais le spectre du son sera déformé.

C) Principe de fonctionnement du microphone

1) Moment magnétique

a) $\vec{m} = i \cdot S \cdot \vec{n}$ où S est la surface du circuit et $\vec{n}$ la normale au circuit (orientée par i).

b) $\vec{m} = i \cdot \pi \cdot a^2 \cdot \vec{e}_y$

c) Chaque portion de cette spire est soumise à une force de Laplace élémentaire d'expression $d\vec{F}_L = i.a.d\theta.\vec{e}_\theta \wedge \vec{B}_0$. En sommant sur toute la spire on obtient

$$\vec{F}_L = \int_0^{2\pi} i.a.d\theta.\vec{e}_\theta \wedge \vec{B}_0 = i.a.\left(\int_0^{2\pi} d\theta.\vec{e}_\theta\right) \wedge \vec{B}_0 \text{ car } \vec{B}_0 \text{ est uniforme ainsi } \boxed{\vec{F}_L = \vec{0}}.$$

d) $\boxed{\vec{M}_L = \vec{m} \wedge \vec{B}_0}$

2) Champ lointain

a) $\vec{B}_m(M) = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A}) = \overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{m} \wedge \vec{r}}{r^3}\right)$ donc $\vec{B}_m(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{m \cdot \sin(\theta) \cdot \vec{e}_\varphi}{r^2}\right)$

et d'après le formulaire fourni : $\boxed{\vec{B}_m(M) = \frac{\mu_0 \cdot m}{4\pi \cdot r^3} \cdot (2 \cdot \cos(\theta) \cdot \vec{e}_r + \sin(\theta) \cdot \vec{e}_\theta)}$

Rq : rappelons que ni le dipôle électrique, ni le dipôle magnétique (en tant que source) ne sont au programme de la filière...

b) En un point de l'axe (Oy), $\boxed{\vec{B}_m(M)\big|_{\theta=0} = \frac{\mu_0 \cdot m}{2\pi \cdot r^3} \cdot \vec{e}_r = \frac{\mu_0 \cdot m}{2\pi \cdot y^3} \cdot \vec{e}_y}$

c) D'après II-A-2-b) $\boxed{\vec{B}_{\text{axe}} \approx \frac{\mu_0 \cdot I \cdot R^2}{2 \cdot y^3} \cdot \vec{e}_y}$ qui est cohérent avec la réponse précédente.

3) Équation électrique

a) La mise en mouvement de la corde déplace le moment magnétique élémentaire ce qui a pour effet de modifier sa valeur $m(y)$ et de l'éloigner ou de la rapprocher de la bobine. Le champ magnétique qu'il crée au niveau de cette bobine varie donc ainsi que son flux ϕ_m . D'après la loi de Faraday, cette bobine est alors le siège d'une force électromotrice induite $e = -d(\phi_m)$ liée au mouvement de la corde qui génère la tension $u(t)$ et le courant $i(t)$ eux aussi liés au mouvement de la corde.

b) D'après la loi des mailles $\boxed{L \cdot \frac{di}{dt}(t) + (R_L + R_A) \cdot i(t) = e(t) = -\frac{d\phi_m}{dt}}$

c) D'après la loi d'Ohm $i(t) = \frac{u(t)}{R_A}$ donc $\frac{du}{dt}(t) + \frac{R_L + R_A}{L} \cdot u(t) = -\frac{R_A}{L} \cdot \frac{d\phi_m}{dt}$

De plus $\frac{d\phi_m}{dt} = \frac{d\phi_m}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{d\phi_m}{dy} \cdot \dot{y}$ donc $\boxed{\frac{du}{dt}(t) + \frac{R_L + R_A}{L} \cdot u(t) = -\frac{R_A}{L} \cdot \dot{y} \cdot \frac{d\phi_m}{dy}}$

4) Étude de la réponse du microphone si $d\phi_m/dy$ est une constante

a) En régime sinusoïdal forcé, l'équation précédente s'écrit en notation complexe : $(R_L + R_A + jL\omega) \cdot \underline{u} = -R_A \cdot K \cdot Y_0 \cdot e^{j\omega t}$ (on ne considère que les composantes variables)

Ainsi $\underline{u} = -\frac{R_A \cdot K}{R_L + R_A + jL\omega} \cdot Y_0$ d'où $\boxed{U = \frac{R_A \cdot K \cdot Y_0}{\sqrt{(R_L + R_A)^2 + (L\omega)^2}}}$ et

$$\boxed{\varphi_u = \pi - \arctan\left(\frac{L\omega}{R_L + R_A}\right)}$$

b) Le signal issu du microphone ne comporte pas d'harmoniques si on suppose que le mouvement de la corde est purement sinusoïdal (cas de la question précédente)... En pratique il en contient, comme cela a été vu à la question I-B-3).

5) Étude de la réponse réelle du microphone

a) Comme le champ magnétique créé par l'aimant diminue lorsque l'on s'en éloigne, l'aimantation $m(y)$ de la portion de corde diminue également lorsqu'elle s'éloigne ce qui se traduit par une diminution de la quantité $d\phi_m/dy$ lorsque y croît.

Cette décroissance est très forte dans les trois premiers millimètres au-dessus du microphone, elle varie en revanche peu autour de 5-6 mm ce qui correspond en pratique à la distance dont une corde de guitare électrique est espacée des microphones. L'hypothèse précédente est donc recevable si l'amplitude de vibration de la corde ne dépasse pas 1mm, dans le cas contraire il y aura des distorsions du son.

b) Le spectre représente l'amplitude de chaque sinusoïde constituant un signal. Il renseigne à la fois sur les fréquences de ses composantes et sur leurs amplitudes.

c) Le fondamental est ici à $\boxed{f_0 = 200 \text{ Hz}}$.

d) La composante à 600 Hz est l'harmonique de rang 3.

e) Le microphone déforme le son en amplifiant les harmoniques par rapport au fondamental.

6) Critique du modèle

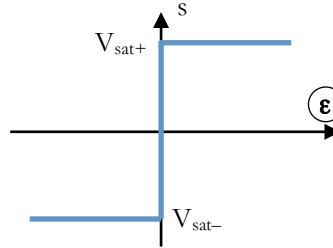
a) Ce moment ne se déplace pas uniquement verticalement, mais aussi horizontalement ce qui provoquerait une fem induite quasi-nulle.

b) La portion de corde aimantée n'est plus plongée dans un champ « uniforme » sur la surface du moment magnétique $\vec{m}$. L'inhomogénéité de champ va ainsi créer une résultante des forces non nulles et la corde va être attirée par l'aimant du microphone.

III) Pédale à effet

1) Réponse d'un filtre

a) Dans un amplificateur opérationnel idéal, la pente de la zone de fonctionnement linéaire est infinie donc $\varepsilon=0$ dans ce mode de fonctionnement.



b) En basse fréquence C_2 et C_4 sont équivalents à des interrupteurs ouverts
En haute fréquence C_2 et C_4 sont équivalents à des interrupteurs fermés.

c) B.F. : l'entrée non-inverseuse est liée à la masse par R_1 et l'entrée inverseuse est liée à la sortie par R_3 , comme $e_-=e_+=0$ la sortie est nulle : $v_{s,B.F.} = 0$

H.F. : un diviseur de tension en e_+ donne $e_+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot v_e$ et un diviseur de tension en

e_- donne $e_- = \frac{R_4}{R_3 + R_4} \cdot v_s$, or $e_-=e_+$ donc $v_{s,H.F.} = \frac{R_1}{R_4} \cdot \frac{R_3 + R_4}{R_1 + R_2} \cdot v_e$.

d) Il s'agit a priori d'un filtre passe-haut.

e) Avec la même démarche d'une c) en prenant en compte les condensateurs :

$$e_+ = \frac{j \cdot R_1 \cdot C_2 \cdot \omega}{1 + j \cdot (R_1 + R_2) \cdot C_2 \cdot \omega} \cdot v_e \quad \text{et} \quad e_- = \frac{1 + j \cdot R_4 \cdot C_4 \cdot \omega}{1 + j \cdot (R_3 + R_4) \cdot C_4 \cdot \omega} \cdot v_s \quad \text{d'où}$$

$$\underline{H} = \frac{j \cdot R_1 \cdot C_2 \cdot \omega}{1 + j \cdot (R_1 + R_2) \cdot C_2 \cdot \omega} \quad \text{et} \quad \underline{H}(\omega) = \frac{j \cdot R_1 \cdot C_2 \cdot \omega \cdot (1 + j \cdot (R_3 + R_4) \cdot C_4 \cdot \omega)}{(1 + j \cdot R_4 \cdot C_4 \cdot \omega) \cdot (1 + j \cdot (R_1 + R_2) \cdot C_2 \cdot \omega)}$$

Ce qui correspond à la forme proposée avec :

$$\omega_1 = \frac{1}{R_1 \cdot C_2}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{(R_3 + R_4) \cdot C_4}$$

$$\omega_3 = \frac{1}{R_4 \cdot C_4}$$

$$\omega_4 = \frac{1}{(R_1 + R_2) \cdot C_2}$$

f) Le gain maximum mesuré est de +26 dB.

D'après la fonction de transfert précédente $\underline{H} \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} \frac{R_1 \cdot (R_3 + R_4)}{R_4 \cdot (R_1 + R_2)}$ (ce qui est

cohérent avec la question c)) dont l'application numérique donne $G = +26,3 \text{ dB}$ cette valeur correspond bien à celle du graphique.

g) La droite horizontale à +23 dB coupe le diagramme de Bode à $f = 70 \text{ Hz}$.

2) Fonctionnement simplifié d'un type de pédale à effet

a) En régime continu C_1, C_2 et C_4 sont équivalents à des interrupteurs ouverts.

b) La borne non-inverseuse est alors seulement reliée à R_1 et comme l'amplificateur opérationnel est idéal $i_+=0$ donc R_1 n'est traversée par aucun courant et la tension à ses bornes est nulle. Les deux résistances R_0 forment ainsi un diviseur de tension donc $V_{+0} = E_0/2$. De même à l'entrée inverseuse où $i_-=0$ donc la tensions aux bornes de R_3 est nulle et $V_{s0} = e_- = E_0/2$.

c) L'impédance des résistances R_0 et de C_1 s'exprime $\frac{R_0}{2 + j \cdot R_0 \cdot C_1 \cdot \omega}$ et son module

$\frac{R_0}{\sqrt{4 + (R_0 \cdot C_1 \cdot \omega)^2}}$ est inférieur à 28Ω dès que f est supérieure à 30 Hz , cet ensemble est donc complètement négligeable devant R_1 dans cette gamme de fréquence.

d) Le montage est alors équivalent à celui de la partie précédente donc :

$$\underline{v}_{+1} = \frac{j \cdot R_1 \cdot C_2 \cdot \omega}{1 + j \cdot (R_1 + R_2) \cdot C_2 \cdot \omega} \cdot v_e$$

$$\underline{v}_{s1} = \frac{j \cdot R_1 \cdot C_2 \cdot \omega \cdot (1 + j \cdot (R_3 + R_4) \cdot C_4 \cdot \omega)}{(1 + j \cdot R_4 \cdot C_4 \cdot \omega) \cdot (1 + j \cdot (R_1 + R_2) \cdot C_2 \cdot \omega)} \cdot v_e$$

e) Les composants R_0 et C_1 (?) permettent de modifier le comportement du montage uniquement pour les composantes continues et d'ajouter ainsi $+E_0/2$.

Rq : tout se passe comme si les composantes continues ne « voyaient » que les deux résistances R_0 et que les composantes variables ne les « voyaient » pas (grâce à C_1).

f) En mode DC on visualise $V_{s0} + v_{s1}$ et en mode AC on ne visualise que v_{s1} .

3) Création de l'effet

a) Pour un signal de $f=10 \text{ kHz}$ le gain sera de +26 dB, celui-ci est donc multiplié par 28 ce qui porte son amplitude de 200-300 mV à 6-9 V auquel on ajoute une composante continue de $E_0/2=4,5 \text{ V}$: son amplitude totale va donc dépasser 9 V par moments ce qui va provoquer une saturation caractéristique.

b) Le caractère réglable de R_4 permet de modifier le gain dans la bande passante et d'obtenir un niveau de saturation plus ou moins marqué.

Corrigé proposé par Jean-Paul Fortin-Ripoche (jean-paul.fortin-ripoche@prepas.org)

N'hésitez pas à me contacter pour toute remarque, question ou erreur.

(Cette épreuve comporte 95 questions).